

交换节点基于电磁波全向辐射特性的 M 维空时纠错码理论*

谢映海[†] 杨 维 许昌龙

(北京交通大学轨道交通控制与安全国家重点实验室, 北京 100044)

(西安电子科技大学综合业务网理论和关键技术国家重点实验室, 西安 710071)

(2010年12月11日收到; 2011年2月17日收到修改稿)

电磁波在自由空间中的全向辐射特性在无线通信领域一直被认为是一个巨大缺点,但在网络环境下该特性可被用来提高无线通信系统的性能. 考虑在一个无线网络中, M 个节点通过一个交换节点来相互交换各自信息. 不同于传统传输方式, 交换节点将对对自己接收到的这 M 份独立信息进行联合编码, 再利用电磁波全向辐射特性向所有节点同时发送相同码字. 对于这种新型网络编码方式, 本文给出了它对应的 M 维空时纠错码的数学定义, 并证明了一些关于码本性能的基本定理, 为构造性能较好的码本奠定了基础. 这种同时引入空域和时域冗余的纠错码本有效地提高了发射天线电磁能的利用率, 因此可以设计出高码率且检错纠错性能较好的码本, 同时带有数据分布式处理特点的译码算法也可以有效降低复杂度. 值得强调的是, 新型码本的实例已经推翻了纠错码理论中具有检错纠错功能的码本码率不能为 1 的传统思维.

关键词: 全向辐射, 无线通信网络, 交换节点, M 维空时纠错码

PACS: 42. 68. Ay

1. 引 言

作为一种信息承载手段, 在不同媒质中电磁波有多方式实现通信^[1,2]. 而在大气或自由空间中传播时, 电磁波会以发射天线为中心, 向四周全向辐射能量. 这种能量发散特性很长时间内在无线通信领域中被视作是一种能量的浪费, 同时还对同区域的其他用户带来一定的干扰.

在网络编码的概念^[3]提出后, 人们发现具备编码解码功能的网络节点可以有效提高网络通信性能, 从而改变了传统的网络路由信息传输方式, 给通信领域带来了根本性的变革^[4-14]. 而随着其在无线网络通信领域的推广应用, 电磁波的广播特性已经被视之作为一种潜在资源来有效提高通信效果. 为提高无线链路可靠性, 需要采用网络纠错编码方式^[15-19]. 但目前相关理论和应用研究主要集中在信源与信宿之间的单向信息流网络上, 无法应用到信

源和信源之间存在双向通信的网络上.

基于此, 本文则将针对无线网络的一个基本拓扑结构—— M 个节点 S_1, S_2, \dots, S_M 通过一个交换节点 E 来相互交换数字信息, 利用电磁波的全向辐射特性展开多维网络纠错码的设计研究. 从本质上说, 纠错码代表着待传输信息和实际传输数字数列之间的一种函数或映射关系. 在传统纠错编码过程中, 这种函数关系是一元的, 即每份信息映射一个传输码字; 而在网络环境下, 这种关系可以提升至 M 元, 即交换节点 E 将对接收到的 M 份独立信息进行联合编码, 再利用电磁波的全向辐射特性向所有 M 个节点同时发送相同的码字.

从直观上看, 这种方式可以使交换节点的发射天线辐射出去的电磁能被 M 个节点同时利用, 既不会互相干扰, 又大大提高了能量利用率. 而从数学角度看, 这种联合编码方式实际上同时引入了空域和时域上的冗余, 仅含时域冗余度的传统纠错码理论已经不再适用于这种新型编码方式, 因此本文重

* 国家科技重大专项(批准号:2009ZX03003-005)、教育部长江学者和创新团队发展计划(批准号:IRT0949)、轨道交通控制与安全国家重点实验室自主研究课题(批准号:RCS2009ZT014)、西安电子科技大学综合业务网理论和关键技术国家重点实验室(批准号:ISN11-10)资助的课题.

[†] E-mail: 06121957@bjtu.edu.cn

新定义在这种网络拓扑结构下的 M 维空时纠错码本的一些数学概念,并证明了一些关于码本性能的基本定理,为构造性能较好的码本奠定了基础.

纠错码理论的两个主要研究方向分别为构造效率与检错纠错能力愈大愈好的纠错码和寻求低复杂度的译码算法.通过对译码算法的分析可以看出, M 个节点都可以利用自身的发送信息分别对交换节点的 M 维发送码本进行不同的分类,从而在每次译码时都可以在一个 $M - 1$ 维的子码本上完成最大似然搜索.对于这种空时码本,我们在设计时只需在局部上最大化码字之间的最小距离即可,避免了对整个码本的优化设计,从而可以在码率较高的前提下设计出检错纠错性能较好的纠错码本.甚至本文给出的一个三维码本在码率达到 1 的情况下,仍然可以使 3 个节点在译码时都具备检错纠错性能,直接推翻了纠错码理论中具有检错纠错功能的码本的码率不能为 1 的传统思维.

在译码复杂度方面,在码率相同的前提下,这种带有分布式数据处理方式的译码过程可以使得所有节点最大似然搜索的码字数量和远小于使用传统纠错码本时的搜索数量,因此这种新型的多维码本在译码复杂度性能上也将大大优于传统纠错码本.

2. 无线多节点信息交换模型和传统纠错码理论

为增强无线通信网络的鲁棒性并提高传输效率,结合网络编码思想和传统纠错码理论的网络纠错码理论在近年来逐渐受到关注.但目前相关研究主要集中在单信源和信宿之间的单向网络信息流传输,很少涉及到多节点进行相互信息交换领域,因此我们有必要探讨这种情况下的纠错码设计理论.

多节点的信息交换普遍存在于现实的无线网络通信中,如手机用户通过基站进行通话,网络视频会议,在线网络游戏等等.在一个含有大量通信节点的无线网络中,图 1 中的多节点信息交换通信模型是一个十分常见的网络拓扑结构.为简化问题,这里我们就不再严格划分信源和信宿节点,仅认为在某一个无线网络中的 M 个节点 $S_m, m = 1, 2, \dots, M$ 需要进行互相的信息交换.

针对 $M = 2$ 的情形,即两信源中继模型,许多研

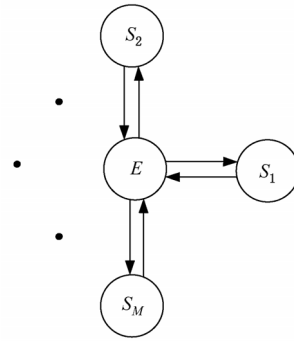


图 1 多节点信息交换通信模型

究都从网络编码的不同角度给出了一些独特的信息编码或传输方案.文献[5]给出了一种在中继节点上采用异或运算的编码方案.比起传统中继传输方式,该方案可以节省能量消耗和传输时间,是一个推翻了独立的比特不能再被压缩的经典结论的网络编码的很好例证.但显然这种传输方式将会提高信息传输的误码率.文献[7]则给出在物理层上的编码方案.该方案对中继节点的接收到的电磁波直接进行异或运算,提高网络吞吐量和减少传输时间.但仿真结果表明,其误码率性能和传统传输方式基本相当.

在无线衰落信道中获得可接受的误码率性能的一种重要方法是使用纠错编码.为提高链路信息传输的可靠性,发送端在每份待传输信息上添加了一些冗余信息,从而使发送码字之间存在一定的差异性.而接收端将利用这些差异性来完成对接收信号的检错和纠错工作,从而提高信息传输的准确性.

在传统纠错编码过程中,冗余信息是体现在时域上的,即我们把每个信息 $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in F_\omega^k$ 的长度加大,将信息编成 F_ω^n 中的向量,因此这是以减低通信效率为代价来提高通信的准确性.下面给出一些传统纠错码理论的数学概念.

定义 1 令 F_ω^n 表示有限域 F_ω 上的 n 维向量空间, F_ω^n 的每个非空子集集合 C 都叫做一个 ω 元码本, n 叫做该码本的码长, C 中向量叫做码字. K 表示 C 中码字个数,即 $K = |C|, 1 \leq K \leq \omega^n. k = \lg_\omega^K$ 叫做码本的信息位数, $\frac{k}{n}$ 叫做码本的码率.

如果码本中不同码字之间 Hamming 距离的最小距离为 d , 则我们把上述 ω 元纠错码表示成 $(n, K, d)_\omega$, 或者 $[n, k, d]_\omega$. 下面是传统纠错码理论的一个基本定理和码本三个参数之间存在的一些

相互制约的关系^[20]:

引理 1 如果一个纠错码的码本 C 的最小距离为 d , 则码本 C 可检查 $\leq d - 1$ 位错, 也可纠正 $\leq \lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 位错. 这里符号 $\lfloor \alpha \rfloor$ 代表不超过实数 α 的最大整数.

引理 2 (Hamming 界) 如果存在一个纠错码 $(n, K, d)_\omega$, 则 $\omega^n \geq K \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor} (\omega - 1)^i \binom{n}{i}$. 这里, $\binom{n}{i}$ 是组合数, 即 $\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!}$.

引理 3 (Singleton 界) 如果存在一个纠错码 $(n, K, d)_\omega$, 则 $K \geq \omega^{n-d+1}$.

3. 新型 M 维空时纠错码的数学定义和一些基本定理

网络编码通常对网络中的错误十分敏感, 一个关键性的错误足以导致译码失败, 而网络中经常存在由信道噪声, 网络拥塞或恶意攻击等引发的各类错误. 作为双向信息流网络的一个基本拓扑结构, 其通信模型如图 1 所示. 结合传统纠错码理论, 下面讨论在交换节点 E 上的新型网络纠错码本设计方式.

从本质上说纠错码代表着待传输数字信息数

列和实际传输数字信息数列之间的一种函数或映射关系. 对所有节点 $S_m, m = 1, 2, \dots, M$ 而言, 向交换节点 E 传输信息的上传链路显然仅能使用传统纠错码理论, 即定义一个一元函数 $f(\mathbf{X})$ 来完成待传输数字信息数列和实际传输码字之间的变换, 而交换节点将利用函数 $f(\mathbf{X})$ 的逆关系对先后得到的 M 份接收信息数列展开检错纠错工作. 但是对于交换节点 E 的下传链路而言, 在这种双向无线通信网络中, 我们可以考虑采用一种新的联合纠错编码方式. 即, 在节点 E 上定义一个待传输数字信息数列和实际传输数字信息数列之间的一种 M 元函数关系 $\mathbf{Z} = g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M)$, 这里 $\mathbf{X}_m = (x_{m1}, x_{m2}, \dots, x_{mk_m})$, $m = 1, 2, \dots, M$ 代表交换节点 E 从 M 个节点 S_1, S_2, \dots, S_M 分别得到的长度为 k_m 的 ω 元信息数列. 这里出于对多速率信息传输的通信要求, 我们不强制要求每个节点的发送信息速率一定要相同, 新方案的具体传输过程见图 2.

在新方案中, 交换节点 E 将利用电磁波的全向辐射特性向所有节点同时发送包含着关于 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M$ 信息的数字数列 $\mathbf{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. 由于任意一个接收节点 $S_m, m = 1, 2, \dots, M$ 都知道关于自身发送信息 \mathbf{X}_m , 这本质上是一种对空域冗余度的利用方式, 因此在译码时都可以分别利用各自的先验信息和函数 $g(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M)$ 的逆关系对自己的接收信息数列展开检错纠错工作.

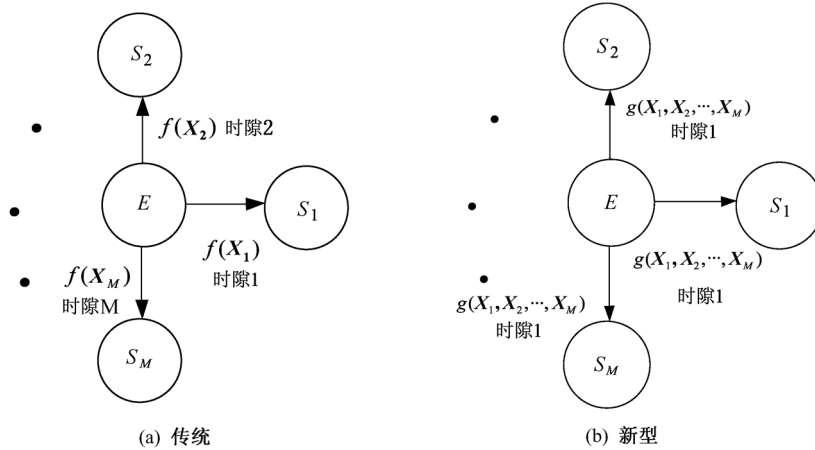


图 2 纠错码传输方式 (a) 传统, (b) 新型

从上述分析可以看出, 传统的仅含时域冗余度的纠错码理论已经不再适用于这种双向无线信息传输网络环境下的新型空时码本, 因此需要重新定义一些数学基本概念:

定义 2 令 F_ω^n 表示有限域 F_ω 上的 n 维向量空

间, 由 F_ω^n 中 $K_1 \times K_2 \times \dots \times K_M$ 个元素组成的非空向量集合 $C = \{C_{r_1, r_2, \dots, r_M}, 1 \leq r_m \leq K_m\}$ 叫做一个 ω 元 M 维码本, n 叫做该码本的码长, 集合中的向量叫做码字, $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_M$ 表示 C 中码字数, 即 $K = |C|, 1 \leq K \leq \omega^n$. 而把 $k = k_1 + k_2 + \dots$

+ $k_M = \lg_{\omega}^{K_1} + \lg_{\omega}^{K_2} + \dots + \lg_{\omega}^{K_M}$ 叫做码本的信息位数, k/n 叫做码本的码率.

设在信息传输中,图 1 中的交换节点 E 从 M 个节点 S_1, S_2, \dots, S_M 分别得到的长度为 k_m 的 ω 元信息数列 $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_M$, 且第 m 份信息数列 \mathbf{X}_m 决定了交换节点发射码字的第 m 个坐标. 令发射码字为 $\mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M}, 1 \leq r_m \leq K_m$, 则节点 $S_m, 1 \leq m \leq M$ 的接收向量为 $\mathbf{v}_m = \mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M} + \boldsymbol{\varepsilon}_m$, 其中, $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ 是信道 $E \rightarrow S_m$ 上的随机错误向量且彼此相互独立.

在译码时,由于节点 $S_m, 1 \leq m \leq M$ 是知道自身发射信息 \mathbf{X}_m 的,在这个先验信息的帮助下,其最大似然搜索范围可以从整个含 $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_M$ 个码字的 M 维发射码本 \mathbf{C} 缩小至一个含 $K_1 \times \dots \times K_{m-1} \times K_{m+1} \times \dots \times K_M$ 个码字的 $M-1$ 维子码本 $\tilde{\mathbf{C}}_{m,j}, 1 \leq m \leq M, 1 \leq j \leq K_m$, 因此该节点的译码算法可以分别表示为

$$S_m: \hat{\mathbf{C}} = \arg \max_{\mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M} \in \mathbf{C}} \Pr(\mathbf{v}_m | \mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M}, \mathbf{X}_m) \\ = \arg \min_{\mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M} \in \tilde{\mathbf{C}}_{m,j}} d(\mathbf{v}_m, \mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M}), \quad (1)$$

这里符号 $d(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ 表示两个向量之间的 Hamming 距离.

由上述编码和译码过程可知,新型码本的检错纠错性能有如下定理:

定理 1 如果码本 \mathbf{C} 如定义 2 所定义,且由它的 $K_m (1 \leq m \leq M)$ 个含 $K_1 \times \dots \times K_{m-1} \times K_{m+1} \times \dots \times K_M$ 个码字的 $M-1$ 维子码本的的最小 Hamming 距离组成的向量为 $\mathbf{D}_m = (d_{m,1}, d_{m,2}, \dots, d_{m,K_m})$. 假定交换节点的发射码字为 $\mathbf{C}_{r_1, r_2, \dots, r_M}, 1 \leq r_m \leq K_m$, 则节点 $S_m, 1 \leq m \leq M$ 在译码时可检查 $\leq d_{m,r_m} - 1$ 位错,也可纠正 $\leq [(d_{m,r_m} - 1)/2]$ 位错.

证明 根据(1)式的译码算法可知,节点 $S_m, 1 \leq m \leq M$ 将在先验信息 \mathbf{X}_m 的帮助下,把最大似然搜索范围从整个码本 \mathbf{C} 缩小至这个节点对应的 K_m 个含 $K_1 \times \dots \times K_{m-1} \times K_{m+1} \times \dots \times K_M$ 个码字的 $M-1$ 维子码本中的第 r_m 个,且这个子码本的最小距离为 d_{m,r_m} . 而引理 1 的内容是可以适用于单个节点的译码过程的,综合考虑码本 \mathbf{C} 中所有码字的译码过程后可知,定理 1 的内容成立,证毕.

类似于传统码本表示方法,我们可以把上述新型 M 维空时纠错码本表示成 $(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_M, \mathbf{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{D}_M)_{\omega}$, 或者 $[n, k_1 \oplus \dots \oplus k_M, \mathbf{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{D}_M]_{\omega}$. 显然新型码本中的参数之间也存在一些相互制约的关系.

定理 2 (M 维 Hamming 界) 如果存在一个 M 维空时纠错码本 $(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_M, \mathbf{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{D}_M)_{\omega}$, 则相关参数满足如下共 $\sum_{m=1}^M K_m$ 个不等式:

$$\omega^n \geq \bar{K}_m \sum_{i=0}^{[(d_{m,l}-1)/2]} (\omega-1)^i \binom{n}{i} \\ (1 \leq l \leq K_m, 1 \leq m \leq M), \quad (2)$$

其中, $\bar{K}_m = K_1 \times \dots \times K_{m-1} \times K_{m+1} \times \dots \times K_M$.

证明 对每个正整数 r 和向量 $\mathbf{v} \in \mathbf{F}_{\omega}^n$, 我们用 $S_{\omega}(\mathbf{v}, r)$ 来表示空间 \mathbf{F}_{ω}^n 中与向量 \mathbf{v} 的 Hamming 距离 $\leq r$ 的所有向量组成的集合,即

$$S_{\omega}(\mathbf{v}, r) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{F}_{\omega}^n | d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq r\}. \quad (3)$$

对于这个以 \mathbf{v} 为中心, r 为半径的闭球集合,其中所含的向量个数为 $|S_{\omega}(\mathbf{v}, r)| = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} (\omega-1)^i$.

对于这样一个已知的纠错码本 $(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_M, \mathbf{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{D}_M)_{\omega}$, 任意一个节点 $S_m, 1 \leq m \leq M$ 都可以在先验信息 \mathbf{X}_m 的帮助下把码本 \mathbf{C} 划分成 K_m 个含 $\bar{K}_m = K_1 \times \dots \times K_{m-1} \times K_{m+1} \times \dots \times K_M$ 个码字的子码本 $\tilde{\mathbf{C}}_{m,j}, 1 \leq j \leq K_m$. 对于其中的任意一个子码本而言,我们以其中的每个码字为中心,建立 \bar{K}_m 个半径都为 $[(d_{m,l}-1)/2]$ 的闭球集合,显然这些球彼此之间都是不相交的,但它们所有的元素个数和是不能超过空间 \mathbf{F}_{ω}^n 的元素个数,所以综合考虑所有共 $\sum_{m=1}^M K_m$ 个子码本的情况,我们可以得到(2)式的不等式,证毕.

同样的,新型码本也具有类似引理 3 内容的性质.

定理 3 (M 维 Singleton 界) 如果存在一个 M 维空时纠错码本 $(n, K_1 \oplus \dots \oplus K_M, \mathbf{D}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{D}_M)_{\omega}$, 则相关参数满足如下共 $\sum_{m=1}^M K_m$ 个不等式:

$$\bar{K}_m \geq \omega^{n-d_{m,l+1}}, \quad (1 \leq l \leq \bar{K}_m, 1 \leq m \leq M). \quad (4)$$

类似于前面两个定理的证明,可以把引理 3 的内容引入至每个子码本中,从而综合得到定理 3 的内容,这里不再详细说明.

上述内容给出了 M 维空时纠错码本的数学概念以反映工程应用上的需求,下一步工作就是利用各种数学工具来构造性能较好的码本.

4. 码本实例

纠错码理论的两个最基本的问题是

1) 构造性能良好的纠错码,即要求效率和检错纠错能力愈大愈好;

2) 寻求好的译码算法.

在图 1 的拓扑结构中,交换节点利用电磁波的广播特性向所有节点发送相同的码字,节点 S_1, S_2, \dots, S_M 都分别可以从广播信号中获得自己所需的关于其他 $M - 1$ 个节点上的传输信息. 而在译码

过程中,这种新型多维码本同时引入空域和时域上的冗余,因此设计码本时只需在局部上最大化子码本的最小距离,从而避免了对整个码本进行距离优化. 这种设计要求无疑可以让我们在码率较高的情况下找到具有很好检错纠错性能的码本,取得比仅含时域冗余的传统纠错码本更好的通信效果.

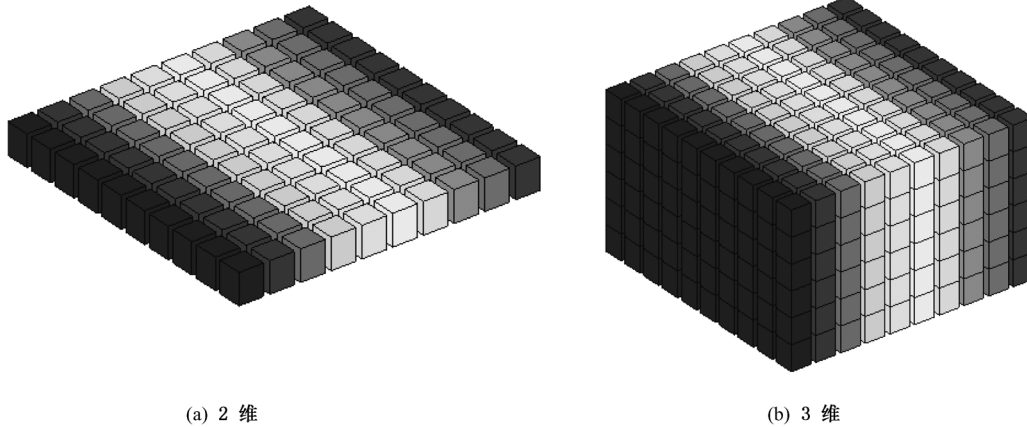


图 3 码本空间想象图

图 3(a) 和 (b) 分别给出 2 维和 3 维空时纠错码本的空间想象图,其中每个小块就代表着码本中的一个码字. 而每个码字的具体位置则是由交换节点 E 从其他节点分别得到的信息数列来共同决定的.

经过一定的计算和筛选,图 4 和图 5 分别给出了一个 2 维码本 C_1 和一个 3 维码本 C_2 的码字情况. 经过计算, C_1 的参数为 $(7, 16 \oplus 8, D_1 \oplus D_2)_2$, 其中 $D_1 = \underbrace{(2, 2, \dots, 2)}_{16\text{个}}, D_2 = \underbrace{(3, 3, \dots, 3)}_{8\text{个}}$; 而 C_2 的参数为 $(8, 4 \oplus 4 \oplus 4, D_3 \oplus D_4 \oplus D_5)_2$, 其中 $D_3 = (3, 3, 3, 3), D_4 = (4, 4, 4, 4), D_5 = (4, 4, 4, 4)$.

对于码本 C_1 而言,码字长度为 $n = 7$, 码字的数量为 $16 \times 8 = 128$ 个,因此它的信息位数为 7 位,码率达到 $7/7 = 1$. 在交换节点的编码过程中,选择发射哪个码字是由中继节点从 S_1 和 S_2 分别得到的信息数列 $X_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{1,4})$ 和 $X_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3})$ 共同决定的.

而对于码本 C_2 而言,码字长度为 $n = 8$, 码字的数量为 $4 \times 4 \times 4 = 64$ 个,因此它的信息位数为 6 位,码率为 $6/8 = 3/4$. 在交换节点的编码过程中,选择发射哪个码字是由交换节点从 S_1, S_2 和 S_3 分别得到的信息数列 $X_3 = (x_{3,1}, x_{3,2}), X_4 = (x_{4,1}, x_{4,2})$

和 $X_5 = (x_{5,1}, x_{5,2})$ 共同决定的.

当每个码字的发送概率相同时,对于中间节点的任意一个码字的发送过程,根据(1)式的译码公式和定理 1 的内容可得如下两个结论:

当交换节点使用码本 C_1 时,节点 S_1 通过对接收信号的译码可获得关于 X_2 的 3 比特的信息,且可检错 $2 - 1 = 1$ 位;而节点 S_2 可获得关于 X_1 的 4 比特的信息,且可检错 $3 - 1 = 2$ 位,纠错 $[(3 - 1)/2] = 1$ 位.

而当使用码本 C_2 时,节点 S_1 可分别获得关于 X_4 和 X_5 的 2 比特的信息,且都可检错 $3 - 1 = 2$ 位,纠错 $[(3 - 1)/2] = 1 = 1$ 位;节点 S_2 可分别获得关于 X_3 和 X_5 的 2 比特的信息,且都可检错 $4 - 1 = 3$ 位,纠错 $[(4 - 1)/2] = 1 = 1$ 位;节点 S_3 可分别获得关于 X_3 和 X_5 的 2 比特的信息,且都可检错 $4 - 1 = 3$ 位,纠错 $[(4 - 1)/2] = 1$ 位.

根据对上述两个码本的性能分析可以看出,这种新型联合编码算法充分利用了无线信道的广播特性和特殊的拓扑结构,因此可以构造出性能非常好的纠错码本.

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0010111 & 0111111 & 1110001 & 0110011 & 1001110 & 0001001 & 0011000 & 0110101 \\ 1001011 & 1010111 & 1011111 & 1000001 & 0101011 & 1000010 & 0001111 & 0011011 \\ 1100101 & 0001011 & 0110111 & 1101111 & 1011001 & 0100111 & 1000100 & 0001100 \\ 1110010 & 0100101 & 1101011 & 0000111 & 1110111 & 1010101 & 0100001 & 1000111 \\ 0111001 & 0110010 & 1000101 & 1011011 & 0011111 & 1111011 & 1010011 & 0100010 \\ 1011100 & 1111001 & 1010010 & 1110101 & 1000011 & 0010011 & 1111101 & 1010000 \\ 0101110 & 0011100 & 0011001 & 1100010 & 1101101 & 1001111 & 0010101 & 1111110 \\ 0000000 & 1101110 & 1111100 & 0101001 & 1111010 & 1100001 & 1001001 & 0010110 \\ 1101000 & 1000000 & 0001110 & 1001100 & 0110001 & 1110110 & 1100111 & 1001010 \\ 0110100 & 0101000 & 0100000 & 0111110 & 1010100 & 0111101 & 1110000 & 1100100 \\ 0011010 & 1110100 & 1001000 & 0010000 & 0100110 & 1011000 & 0111011 & 1110011 \\ 0001101 & 1011010 & 0010100 & 1111000 & 0001000 & 0101010 & 1011110 & 0111000 \\ 1000110 & 1001101 & 0111010 & 0100100 & 1100000 & 0000100 & 0101100 & 1011101 \\ 0100011 & 0000110 & 0101101 & 0001010 & 0111100 & 1101100 & 0000010 & 0101111 \\ 1010001 & 1100011 & 1100110 & 0011101 & 0010010 & 0110000 & 1101010 & 0000001 \\ 1111111 & 0010001 & 0000011 & 1010110 & 0000101 & 0011110 & 0110110 & 1101001 \end{bmatrix}$$

图4 2维码本 C_1 的码字位置情况

$$C_{2,1} = \begin{bmatrix} 11110011 & 10011000 & 01010101 & 00000010 \\ 00001100 & 01100111 & 10101010 & 11111101 \\ 00010111 & 11101010 & 11101101 & 01110000 \\ 11101000 & 00010101 & 00010010 & 10001111 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,2} = \begin{bmatrix} 01001011 & 01010010 & 10110001 & 10010100 \\ 10110100 & 10101101 & 01001110 & 01101011 \\ 11011101 & 11000100 & 01111011 & 01011110 \\ 00100010 & 00111011 & 10000100 & 10100001 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,3} = \begin{bmatrix} 10000001 & 00001110 & 10011111 & 11001000 \\ 01111110 & 11110001 & 01100000 & 00110111 \\ 10101111 & 00100000 & 11000011 & 11100110 \\ 01010000 & 11011111 & 00111100 & 00011001 \end{bmatrix}$$

$$C_{2,4} = \begin{bmatrix} 00111001 & 10110110 & 00100111 & 01110000 \\ 11000110 & 01001001 & 11011000 & 10001111 \\ 01100101 & 01111100 & 00001001 & 10111010 \\ 10011010 & 10000011 & 11110110 & 01000101 \end{bmatrix}$$

图5 3维码本 C_2 的码字位置分布情况 ($C_{2,i}, 1 \leq i \leq 4$ 代表垂直方向上的第 i 层子码本)

在问题 1) 中, 码本 C_2 的表现已经优于传统纠错码中著名的 $(7, 16, 3)_2$ 码本; 而码本 C_1 在码率达到 1 的情况下, 仍然使两个接收节点在译码时对接接收信息分别具备检错和纠错性能, 直接推翻了纠错码理论中具有检错纠错功能的码本的码率不能为 1 的传统思维. 而在问题 2) 中, 假设交换节点使用的码字长度都为 n , 且码率为 $\frac{k}{n}$, 如果使用传统单维

纠错码本, 则每发送一个码字, 共 $M - 1$ 个节点都会获得 k 比特的信息, 且每个节点的最大似然搜索码字数量都为 2^k 个; 而如果使用多维纠错码本, 则每发送一个码字, 所有的 M 个节点都会依次获得 $k - k_1, k - k_2, \dots, k - k_M$ ($k = \sum_{m=1}^M k_m$) 比特的信息, 其最大似然搜索码字数量依次为 $2^{k-k_1}, 2^{k-k_2}, \dots, 2^{k-k_M}$ 个. 据此可知交换节点不管是使用传统码本或

者是新型码本,如果码率相同,交换节点每发送一个码字就向外传输了共 $(M - 1)k$ 比特信息,但是前者所需的最大似然码字搜索数量共为 $(M - 1)2^k$ 个,而后者数量共为 $2^{k-k_1} + 2^{k-k_2} + \dots + 2^{k-k_M} = 2^k \sum_{m=1}^M 2^{-k_m}$ 个. 因此两者相比,带有数据分布式处理性质的后者的最大似然码字搜索数量只有前者的 $\sum_{m=1}^M 2^{-k_m} / (M - 1)$. 令 $k_1 = k_2 = \dots = k_M = N$, 则在不同的 M 和 N 值情况下两者码字搜索数量和的百分比情况见图 6.

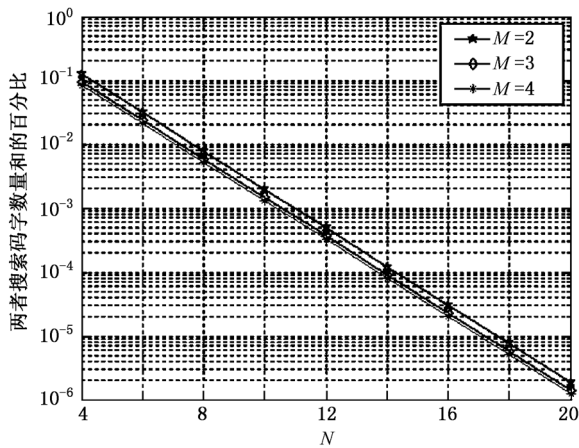


图 6 传统码本和新型码本的译码搜索码字数量和的百分比情况

不失一般性,在本文中我们直接以接收端码字

的最大似然搜索数量来代表译码算法的复杂度,则从图 6 的曲线可以看出,似于快速傅里叶变换算法的优越性,新型码本的译码复杂度不但低于传统码本,而且减小幅度将随着码本大小的增大而迅速提高. 当 $N = 10$ 时,减小幅度约为 $1 - 10^{-3}$, 而当 $N = 20$ 时,减小幅度可以约达到 $1 - 10^{-6}$, 无疑这种特性在含有较多数目码字且码长较长的大码本的应用中有着很高的实际价值.

5. 结 论

针对双向信息传输网络的一个基本拓扑结构—多节点信息交换通信模型通信模型上的交换节点展开新型网络纠错码研究,首次提出了可以同时引入空域和时域冗余的 M 维空时纠错码的概念,并证明了它的一些基本性能定理.

其对应的新型多维码本在设计时仅需在局部上最大化子码本的最小距离,从而避免了对整个码本的优化设计,因此突破了传统纠错码理论中关于检错纠错性能的上限. 而在译码算法复杂度上,在码率相同的前提下,新型纠错码的译码复杂度也将远低于传统纠错码本,且降低幅度将随着码本的扩大而迅速提高. 因此这种新型多维空时纠错码在网络编码中有着很高的应用价值,值的我们做进一步的深入研究.

[1] Wu J G, Wu Z M, Lin X D, Zhang Y, Zhong D Z, Xia G Q 2005 *Acta Phy. Sin.* **54** 4169 (in Chinese) [吴加贵,吴正茂、林晓东、张毅、钟东洲、夏光琼 2005 物理学报 **54** 4169]

[2] Yin J W, Hui J Y, Wang Y L, Hui J 2007 *Acta Phy. Sin.* **56** 5915 (in Chinese) [殷敬伟、惠俊英、王逸林、惠娟 2007 物理学报 **56** 5915]

[3] Rudolf A, Cai N, Robert L S 2000 *IEEE Trans. Inf. Theory* **46** 1204

[4] Robert L S, Raymond W Y, Cai N 2003 *IEEE Trans. Inf. Theory* **49** 371

[5] Raymond W Y, Robert L S, CAI N 2005 *Network Coding Theory (Foundation and Trends in Communication and Information Technology)* P15

[6] Jaggsi S, Sanders P, Chou P A 2005 *IEEE Trans. Inf. Theory* **51** 1973

[7] Zhang S, Liew S, Lam P 2006 *Proceeding of ACM/IEEE International Conference on Mobile Computing and Networking* Los Angeles, USA, 23—26 S, 2006 P1022

[8] Ho T, Medard M, Koetter R 2006 *IEEE Trans. Inf. Theory* **52** 4413

[9] Wu Y, Jain K, Kungs Y 2006 *IEEE Trans. Inf. Theory* **52** 2398

[10] Xue B L 2006 *IEEE Trans. Network* **52** 2433

[11] Shah M, Wong V 2010 *IEEE Trans. Wireless Commun.* **9** 1924

[12] Jovicic A, Wang H, Viswanath P 2010 *IEEE Trans. Inf. Theory* **56** 4941

[13] Sengupta S, Rayanchu S, Banerjee S 2010 *IEEE/ACM Trans. Network* **18** 1158

[14] Parag P, Chamberland J F 2010 *IEEE Trans. Inf. Theory* **56** 1890

[15] Cai N, Raymond W Y 2002 *Proceedings of IEEE Information Theory Workshop Bangalore, India* October 2002 p119

[16] Raymond W Y, Cai N 2006 *Commun. Inf. Syst.* **6** 19

[17] Cai N, Raymond W Y 2006 *Commun. Inf. Syst.* **6** 37

[18] Zhang Z 2006 *Proceedings of IEEE Information Theory Workshop Chengdu, China*, 22—26 October 2006 p88

[19] Zhang Z 2008 *IEEE Trans. Inf. Theory* **54** 209

[20] Mac W F J, Sloane N J A 1977 *The Theory of Error-correcting Codes (Amsterdam:North-Hoolland)* p101

M -dimensional space-time error correction code theory for switch node based on omnidirectional radiation of electromagnetic wave^{*}

Xie Ying-Hai[†] Yang Wei Xu Chang-Long

(State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

(State Key Laboratory of Integrated Service Networks, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 11 December 2010; revised manuscript received 17 February 2011)

Abstract

In wireless communication field, the omnidirectional radiation of electromagnetic wave in free space is always considered as a big shortcoming, nevertheless, it can be used to improve the performance of wireless communication system in network environment. Here, we consider that M nodes use a switch node to exchange their information in a wireless network. Different from the conventional method, the switch node will take the joint coding method for the M independent information, then transmit the same codeword to all M nodes simultaneously through the omnidirectional radiation. For the novel network code, the mathematical definition of the M -dimension space-time error correction code is proposed, and some theorems about its performance are proved to lay a foundation to construct good codebooks. The redundancy of time and space domain is added to the novel codebook at the same time, and the efficiency of the transmit power is improved, so we can design high-rate codebook with good error detection and correction capability. Moreover, the complexity of its decoding algorithm can be reduced, owing to the distributed data processing. Here, we emphasize that contrary to one's intuition, our proposed codebook reveals that it is in general not correct to take the rate of codebook which has the error detection and correction capability to be less than 1.

Keywords: omnidirectional radiation, wireless communication network, switch node, M -dimension space-time error correction code

PACS: 42.68.Ay

^{*} Project supported by the National Science and Technology Major Project of China (Grant No. 2009ZX03003-005), the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University (Grant No. IRT0949), the State Key Laboratory of Rail Traffic Control and Safety (Grant No. RCS2009ZT014), Beijing Jiaotong University, China, and the State Key Laboratory of Integrated Service Networks (Grant No. ISN11-10), Xidian University, China.

[†] E-mail: 06121957@bjtu.edu.cn