

## 远场来流条件下过冷熔体球晶生长的稳定性\*

曹斌 林鑫 黄卫东†

(西北工业大学凝固技术国家重点实验室, 西安 710072)

(2010年6月12日收到; 2010年9月11日收到修改稿)

建立了远场来流条件下过冷熔体球晶生长的温度场和浓度场稳态模型, 分析了对流对球晶周围温度场和浓度场的影响, 并以 Trivedi 的纯扩散球晶稳定性判据为基础, 推导出远场来流条件下过冷熔体球晶生长的临界稳定性判据. 研究表明: 远场来流条件下, 迎流面的扰动振幅增加速率明显大于背流面的扰动振幅增加速率. 振幅增加速率最大值对应的扰动阶次从迎流面到背流面逐渐减小, 随着球晶半径增加而增大. 对流使迎流面的稳定性降低, 背流面的稳定性增大. 随着流速的增加, 球晶的临界稳定半径减小.

**关键词:** 球晶, 远场来流, 界面形态稳定性, Trivedi 判据

**PACS:** 64. 70. D - , 64. 70. dg, 81. 10. Fq, 81. 30. Fb

## 1. 引言

凝固界面的形态稳定性是所有复杂凝固花样的起源, 界面稳定性理论是理解所有凝固组织的基础. Mullins 和 Sekerka<sup>[1]</sup> 最早对纯扩散条件下球晶生长的界面稳定性进行了分析, 分别考察了浓度场和温度场对界面稳定性的影响, 并获得了溶质扩散控制和热扩散控制两种情况下的球晶临界稳定半径. Trivedi<sup>[2]</sup> 则综合考虑了浓度场和温度场的影响, 得到了纯扩散条件下过冷熔体球晶生长的界面稳定性判据

$$-G_L = m_L G_C \zeta(l) = (T_M F' / R_0^2) L(l), \quad (1)$$

其中  $G_L$  是温度梯度,  $m_L$  是液相线斜率,  $G_C$  是浓度梯度,  $\zeta(l)$  和  $L(l)$  都是球谐函数阶次  $l$  的函数,  $T_M$  是纯物质熔点,  $F'$  是界面能系数,  $R_0$  是球晶半径. (1) 式的左边如果大于右边, 界面就会失稳, 左边如果小于右边, 界面保持稳定.  $l$  的函数  $\zeta(l)$ ,  $L(l)$  都大于零,  $m_L$ ,  $G_L$ ,  $G_C$  都小于零, 因此温度梯度  $G_L$  和浓度梯度  $G_C$  的绝对值增大都会使(1)式左边增大, 也就是使界面失稳. 界面能系数大于零, 因此球晶半径  $R_0$  减小时, (1)式右边增大, 所以界面能作用使界面保持稳定, 并且球晶半径越小, 界面越稳定. 需要指

出的是, 尽管 Trivedi 的球晶界面稳定性分析已经非常严格, 但仅仅是在纯扩散条件下得到的. 在地面实验中, 由于合金的密度通常要随温度及溶质浓度的改变而变化, 受重力的影响, 界面前沿的液相对流通常是不可避免的, 同时许多其他因素也会引致对流发生, 如 Marangoni 对流、电磁搅动等. 对流的存在一方面将影响界面前沿的热质传输场, 同时对流的不稳定性将有可能与界面的不稳定性发生耦合, 进而显著影响界面稳定性机理. 1977 年, Vogel 和 Cantor<sup>[3]</sup> 考虑了搅拌熔体中球晶生长的稳定性, 将对流效应引入静止热边界层和扩散边界层, 发现对流搅拌会降低球晶生长的界面稳定性, 这与实验中观察到的对流剪切提高球晶生长界面稳定性的现象是相左的<sup>[4]</sup>. 而在平界面稳定性理论分析中, 许多研究者已经考察了强制性凝固条件下各种对流剪切方式对界面稳定性的影响. Delves<sup>[5]</sup> 分析了 Blasius 边界层流对固液界面稳定性的影响, 认为流动模式的连续快速转变可以增强界面稳定性. Coriell 等<sup>[6]</sup> 分析了施加平行液固界面的平面 Couette 流对稳定性的影响, 发现对流可以削弱温度场和浓度场分布的不均匀性, 增强界面稳定性. Brattkus 和 Davis<sup>[7]</sup> 分析了垂直界面施加平面滞止流的影响, 发现垂直于界面的流速分量降低了界面稳定性. Forth 和 Wheeler<sup>[8]</sup> 分析了边界层流对界面稳

\* 国家自然科学基金(批准号:50771083)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: huang@nwpu.edu.cn

定性的影响,并显示剪切流有助于对流和形态稳定性模式的解耦. Davis 和 Schulze<sup>[9]</sup>分析了周期振荡的 Stokes 层流对界面稳定性的影响,发现对于强制性凝固,适当的对流波动频率和振幅可以增强界面稳定性. 林鑫等<sup>[10,11]</sup>对固液界面进行了时间相关的线性稳定性分析,研究了对流对界面稳定性的影响,发现对流缩短了界面失稳的孕育时间. 在实际情况中,如果球晶界面失稳,就会转化成枝晶,陈玉娟等<sup>[12]</sup>用相场法模拟了对流对枝晶生长的影响,发现迎流方向上枝晶生长更快. 孙东科等<sup>[13]</sup>用格子玻尔兹曼方法进行模拟,得到了相同的结论. 这说明固液界面在迎流方向上更容易失稳,演化成枝晶. 熊斌等<sup>[14]</sup>发现对流会使界面前沿的温度边界层变薄. 王建元等<sup>[15]</sup>通过计算发现对流能够改变固液界面前沿溶质的对称分布. 最近,陈明文等<sup>[16,17]</sup>研究了远场来流对过冷熔体中球晶生长形态的影响,发现球晶的迎流面生长速度加快,背流面生长速度减小. 但该工作没有考虑溶质扩散对球晶界面稳定性的影响. 而实际情况中,由于溶质扩散系数要小于热扩散系数,所以溶质扩散对球晶稳定性的影响更大. 为此,本文将建立一个综合温度场、浓度场和对流的物理模型,研究远场来流对过冷熔体中的球晶界面稳定性的影响. 首先采用渐近分析方法研究远场来流对过冷熔体球晶生长温度场、浓度场的影响. 再对球晶界面进行线性稳定性分析,获得远场来流条件下过冷熔体球晶生长的稳定性判据,为将来进一步分析复杂流场对球晶稳定性的影响奠定基础.

## 2. 物理模型

如图 1 所示,考虑在过冷熔体中的一个初始半径为  $R_0$  的球状晶体,该晶体生长受到远场来流的作用,远场流速为  $U_\infty$ ,  $U_\infty > 0$  表明流速向上. 过冷熔

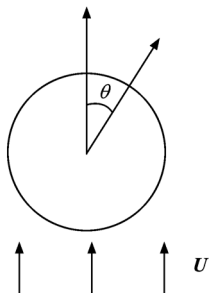


图 1 远场来流情况下的坐标与流速

体中远场浓度为  $C_0$ , 远场温度为  $T_\infty$ , 远场过冷度  $\Delta T_\infty = T_M - m_L C_0 - T_\infty$ , 其中  $m_L$  是液相线斜率. 以球心为原点, 建立极坐标系  $(r, \theta, \varphi)$ , 用一个函数  $R(\theta, \varphi, t)$  表示固液界面位置, 初始时刻  $(t = 0)$  有  $R = R_0$ . 热传导方程和溶质扩散方程分别为

$$\mathbf{U} \cdot \nabla T_L = \frac{k_L}{C_{pL}} \Delta T_L, \quad (2)$$

$$\Delta T_S = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{U} \cdot \nabla C = D \Delta C, \quad (4)$$

其中  $k_L$  是液相导热系数,  $C_{pL}$  是质量定压溶,  $D$  是液相溶质扩散系数,  $T_L$  表示液相温度场,  $T_S$  表示固相温度场,  $C$  表示液相浓度场,  $\mathbf{U}$  表示流速.

在流速分布方面, 本文直接使用小雷诺数圆球绕流的流速分布<sup>[17]</sup>

$$U_R = U_\infty \cos\theta \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{R}{r} + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \quad (5)$$

$$U_\theta = -U_\infty \sin\theta \left[ 1 - \frac{3}{4} \frac{R}{r} - \frac{1}{4} \left( \frac{R}{r} \right)^3 \right], \quad (6)$$

$$U_\varphi = 0, \quad (7)$$

固液界面  $(r = R)$  上的热量和溶质通量守恒方程分别为

$$-h_\Delta \frac{\partial R}{\partial t} = k_L \frac{\partial T_L}{\partial r} - k_S \frac{\partial T_S}{\partial r}, \quad (8)$$

$$-C_1(1 - k_0) \frac{\partial R}{\partial t} = D \frac{\partial C}{\partial r}, \quad (9)$$

其中  $h_\Delta$  是单位质量潜热,  $k_S$  是固相导热系数,  $C_1$  是固液界面上液相一侧的浓度,  $k_0$  是平衡溶质分配系数.

固液界面上溶质场和温度场还应满足 Gibbs-Thomson 方程

$$T_1 = T_M + m_L C_1 - \Gamma K, \quad (10)$$

其中  $\Gamma$  是界面能系数,  $K$  是界面的曲率.

## 3. 纯扩散条件下的稳态解和对流修正

当存在远场来流的作用时, 流场的对流对温度场和浓度场产生影响, 温度场、浓度场、界面浓度和界面推进速度都可以根据远场流速  $U_\infty$  进行渐近展开

$$\{T_L, T_S, C, C_1, v\} \sim q_0 + q_1 U_\infty + o(U_\infty^2), \quad (11)$$

其中  $q_0$  表示未受对流影响的部分.  $T_{L0}, T_{S0}, C_{L0}$  满足 Laplace 方程, 其中  $C_{L0}$  对应浓度场  $C$  未受对流影响的部分.

$$\Delta T_{L0} = 0, \quad (12)$$

$$\Delta T_{S0} = 0, \quad (13)$$

$$\Delta C_{U0} = 0. \quad (14)$$

结合(8—10)式,可以求得  $T_{S0}, T_{L0}, C_{U0}$  的表达式,

$$T_{S0} = T_M + m_L C_{10} - 2\Gamma/R_0, \quad (15)$$

$$T_{L0} = v_0 h_\Delta R_0^2 / (k_L r) + T_M + m_L C_{10} - 2\Gamma/R_0 - v_0 h_\Delta R_0 / k_L, \quad (16)$$

$$C_{U0} = v_0 C_{10} (1 - k_0) R_0^2 / (Dr) + C_{10} - v_0 C_{10} (1 - k_0) R_0 / D. \quad (17)$$

这里  $C_{10}$  和  $v_0$  分别表示纯扩散条件下的界面浓度和界面推进速度,可以根据远场浓度  $C_0$  和远场过冷度  $\Delta T_\infty = T_M + m_L C_0 - T_\infty$  求解,

$$C_{10} = (-A_1 - \sqrt{A_1^2 - 4m_L A_2}) / (2m_L), \quad (18)$$

$$v_0 = D(1 - C_0 / C_{10}) / [(1 - k_0) R_0], \quad (19)$$

其中

$$A_1 = \frac{-2\Gamma}{R_0} - \frac{Dh_\Delta}{k_L(1 - k_0)} + \Delta T_\infty - m_L C_0, \quad (20)$$

$$A_2 = Dh_\Delta C_0 / [k_L(1 - k_0)]. \quad (21)$$

下面求解对流对温度场浓度场的修正. 将(11)式代入(2)—(4)式,就可以求解出

$$T_{L1} = \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R_0}{r} + a_1 \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{R_0^3}{r^3} \right) \times \cos\theta A_{T_{L1}} C_{\rho L} / k_L, \quad (22)$$

$$T_{S1} = \cos\theta \frac{A_{T_{L1}} C_{\rho L}}{k_L} \left( a_1 - \frac{3}{8} \right) \frac{r}{R_0}, \quad (23)$$

$$C_{U1} = \cos\theta \frac{A_{C1}}{D} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R_0}{r} + a_2 \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{R_0^3}{r^3} \right), \quad (24)$$

其中

$$A_{T_{L1}} = v_0 h_\Delta R_0^2 / k_L, \quad (25)$$

$$A_{C1} = v_0 C_{10} (1 - k_0) R_0^2 / D. \quad (26)$$

(22)—(24)式中,  $a_1, a_2$  是两个待定系数,还要利用(8)—(10)式进行求解,

$$a_1 = \frac{a_5 a_7 + a_3 a_8}{a_3 a_6 + a_4 a_7}, \quad (27)$$

$$a_2 = \frac{a_5 a_6 - a_4 a_8}{a_3 a_6 + a_4 a_7}, \quad (28)$$

其中

$$a_3 = (1 - k_0) v_0 - 2DR_0^{-1}, \quad (29)$$

$$a_4 = C_{\rho L} (D/k_L)^2 (2k_L R_0^{-1} + k_S R_0^{-1}), \quad (30)$$

$$a_5 = C_{\rho L} \left( \frac{D}{k_L} \right)^2 \left( \frac{9}{8} k_L R_0^{-1} + \frac{3}{8} k_S R_0^{-1} \right) + \frac{3}{8} (1 - k_0) v_0 - \frac{9}{8} DR_0^{-1}, \quad (31)$$

$$a_6 = A_{T_{L1}} C_{\rho L} / k_L, \quad (32)$$

$$a_7 = m_L A_{C1} / D, \quad (33)$$

$$a_8 = \frac{3}{8} \frac{A_{T_{L1}} C_{\rho L}}{k_L} - \frac{3}{8} m_L \frac{A_{C1}}{D}. \quad (34)$$

这样,对流条件下过冷熔体中的温度场和浓度场为

$$T_L = v_0 h_\Delta R_0^2 / (k_L r) + T_M + m_L C_{10} - v_0 h_\Delta R_0 / k_L - \frac{2\Gamma}{R_0} + \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R_0}{r} + a_1 \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{R_0^3}{r^3} \right) \times U_\infty \cos\theta A_{T_{L1}} C_{\rho L} / k_L + o(U_\infty^2), \quad (35)$$

$$T_S = T_M + m_L C_{10} - 2\Gamma/R_0 + U_\infty \cos\theta \times \frac{A_{T_{L1}} C_{\rho L}}{k_L} \left( a_1 - \frac{3}{8} \right) \frac{r}{R_0} + o(U_\infty^2), \quad (36)$$

$$C = \frac{v_0 C_{10} (1 - k_0) R_0^2}{Dr} - \frac{v_0 C_{10} (1 - k_0) R_0}{D} + C_{10} + \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R_0}{r} + a_2 \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{R_0^3}{r^3} \right) \times U_\infty \cos\theta \frac{A_{C1}}{D} + o(U_\infty^2). \quad (37)$$

根据通量守恒方程(9)可以求出对流条件下的界面推进速度  $v$ ,再由(37)式得到界面浓度  $C_1$ ,分别为

$$v = v_0 + \left[ -\frac{D}{R_0} \left( \frac{9}{8} - 2a_2 \right) - v_0 (1 - k_0) \left( a_2 - \frac{3}{8} \right) \right] \times U_\infty v_0 R_0^2 \cos\theta / D^2 + o(U_\infty^2), \quad (38)$$

$$C_1 = C_{10} + U_\infty \cos\theta \frac{A_{C1}}{D} \left( a_2 - \frac{3}{8} \right). \quad (39)$$

#### 4. 界面线性稳定性分析

在球晶界面施加一无穷小扰动,界面位置变为

$$r = R + \delta Y_{lm}, \quad (40)$$

其中,  $\delta$  是一个无穷小量,表示界面形态扰动的振幅.  $Y_{lm}$  表示球谐函数. 此时的界面推进速度可表示为

$$\dot{r} = \dot{R} + \delta \dot{Y}_{lm}. \quad (41)$$

根据(2)–(4)式,过冷熔体温度场和浓度场可表示为

$$T_L = T_{L0} + T_{L1}U_\infty + \delta A_{\delta T_L} (r/R_0)^{-l-1} Y_{lm}, \quad (42)$$

$$T_S = T_{S0} + T_{S1}U_\infty + \delta A_{\delta T_S} (r/R_0)^l Y_{lm}, \quad (43)$$

$$C = C_{U0} + C_{U1}U_\infty + \delta A_{\delta C} (r/R_0)^{-l-1} Y_{lm}. \quad (44)$$

这样界面上的浓度和温度梯度就变为

$$\left(\frac{\partial T_L}{\partial r}\right)_{r=R+\delta Y_{lm}} = \left(\frac{\partial T_L}{\partial r}\right)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial^2 T_L}{\partial r^2}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm}, \quad (45)$$

$$\left(\frac{\partial T_S}{\partial r}\right)_{r=R+\delta Y_{lm}} = \left(\frac{\partial T_S}{\partial r}\right)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial^2 T_S}{\partial r^2}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm}, \quad (46)$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R+\delta Y_{lm}} = \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm}. \quad (47)$$

界面浓度和温度变为

$$(T_L)_{r=R+\delta Y_{lm}} = (T_L)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial T_L}{\partial r}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm} = (T_S)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial T_S}{\partial r}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm}, \quad (48)$$

$$(C)_{r=R+\delta Y_{lm}} = (C)_{r=R_0} + \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R_0} \delta Y_{lm}. \quad (49)$$

根据 Gibbs-Thomson 方程

$$(T_L)_{r=R+\delta Y_{lm}} = T_M + m_L (C)_{r=R+\delta Y_{lm}} - 2\Gamma/R_0 + \Gamma(l-1)(l+2)\delta Y_{lm}/R_0^2, \quad (50)$$

将(49), (50)式代入(48)式,就可以得到

$$A_{\delta T_L} = m_L \left[ A_{\delta C} + \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R_0} \right] - \left(\frac{\partial T_L}{\partial r}\right)_{r=R_0} + \Gamma(l-1)(l+2)/R_0^2, \quad (51)$$

$$A_{\delta T_S} = m_L \left[ A_{\delta C} + \left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R_0} \right] - \left(\frac{\partial T_S}{\partial r}\right)_{r=R_0} + \Gamma(l-1)(l+2)/R_0^2. \quad (52)$$

这样将(45)–(47)式代入通量守恒表达式(8)和(9)式,两式联立后就可消除未知数  $A_{\delta C}$  并求得扰动

振幅增加速率  $S = \dot{\delta}/\delta$ ,

$$S = \left[ \frac{B_1 R_0}{k_L(-l-1) - k_S l} - \frac{m_L B_2 R_0}{D(-l-1) + vR_0(1-k_0)} + \frac{\Gamma(l-1)(l+2)}{R_0^2} \right] / \left[ \frac{h_\Delta}{(-k_L l - k_L - k_S l)/R_0} - \frac{C_{10}(1-k_0)m_L}{D(-l-1)/R_0 + v(1-k_0)} \right], \quad (53)$$

其中

$$B_1 = v_0 h_\Delta (l-1)/R_0 + U_\infty A_{T_{L1}} C_{pL} \cos\theta/R_0^2 \times [(-l-1) \left(\frac{9}{8} - 2a_1\right) - l \frac{k_S}{k_L} \left(a_1 - \frac{3}{8}\right) - (6a_1 - 3)], \quad (54)$$

$$B_2 = v_0 C_{10} (l-1)(1-k_0)/R_0 + U_\infty A_{C1} \cos\theta/R_0^2 \times [(-l-1) \left(\frac{9}{8} - 2a_1\right) - (6a_1 - 3)]. \quad (55)$$

如果使(53)式中的  $U_\infty = 0$ , 就可以得到纯扩散条件下的振幅增加速率

$$S_0 = \frac{k_L(l-1)}{R_0 h_\Delta} \times \left\{ \frac{v_0 h_\Delta}{k_L} - \frac{\Gamma}{R_0^2} \left[ (l+1) + l \frac{k_S}{k_L} \right] \times (l+2) \left[ \frac{R_0 v_0}{D} (1-k_0) - l-1 \right] / \left[ \frac{v_0 R_0}{D} (1-k_0) - l-1 + C_{10} m_L k_L (1-k_0) \right] \times \frac{l+1 + l \frac{k_S}{k_L}}{h_\Delta D} \right\}. \quad (56)$$

整理(56)式,可得

$$S_0 = \frac{k_L(l-1)}{R_0 h_\Delta} \left\{ -G_L - \frac{T_M \Gamma'}{R_0^2} \times \frac{L\chi[2p(1-k_0) - (l+1)]}{l+1 + l \frac{k_S}{k_L} + \chi 2p(1-k_0) - \chi(l+1)} \right\}, \quad (57)$$

其中

$$G_L = -v_0 h_\Delta / k_L, \quad (58)$$

$$T_M \Gamma' = \Gamma, \quad (59)$$

$$L = (l+1)(l+2) + l(l+2)k_S/k_L, \quad (60)$$

$$\chi = h_\Delta D / [k_L m_L C_{10} (1-k_0)], \quad (61)$$

$$p = v_0 R_0 / (2D). \quad (62)$$

这样,就回到了 Trivedi 的纯扩散条件下的界面稳定性判据<sup>[2]</sup>.

振幅增加速率的表达式(53)就是远场来流条件下过冷熔体中球晶生长的界面稳定性判据. 如果  $S > 0$ , 扰动振幅将随时间增加, 界面将失稳; 如果  $S < 0$ , 扰动振幅将随时间减小, 界面保持稳定. 从(19)和(38)式可以得到界面推进速度的表达式

$$v = \frac{D(1 - C_0/C_{10})}{(1 - k_0)R_0} + o(U_\infty), \text{ 这样就有 } D \frac{-l - 1}{R_0}$$

+  $v(1 - k_0) = \frac{D}{R_0} \left[ -l - \frac{C_0}{C_{10}} \right] + o(U_\infty) < 0$ . 也就是说(53)式分母的第二项大于零, 而第一项显然为负, 所以  $S$  的分母小于零. 这说明  $S$  的正负号取决于组成分子的三项, 如果分子大于零, 则界面保持稳定. 在这三项中, 前两项之和与  $S$  分母的比值为  $\frac{l - 1}{R_0} v_0 + o(U_\infty) > 0$ , 因此前两项之和为负, 第三项因为界面能系数  $\Gamma > 0$  总是为正. 由此可见, 前两项起到的是使界面失稳的作用, 第三项起到的是保持界面稳定的作用.

远场来流对液相温度场的修正为  $T_{L1}$ , 满足

$$\frac{U}{U_\infty} \cdot \nabla T_{L0} = \frac{k_L}{C_{pL}} \Delta T_{L1}, \quad (63)$$

在迎流面上,  $\cos\theta < 0, U_R < 0$ , 而  $\frac{\partial T_{L0}}{\partial r}$  总是为负, 所以就有  $\Delta T_{L1} > 0$ , 再结合远场温度梯度为零的条件, 就有

$$\int_{R_0}^{+\infty} r^2 \Delta T_{L1} dr \approx \int_{R_0}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial T_{L1}}{\partial r} \right) dr = -R_0^2 \frac{\partial T_{L1}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} > 0. \quad (64)$$

这说明远场来流对球晶迎流面温度梯度的修正是负值, 也就是对流使迎流面液相温度梯度的绝对值变大.

远场来流对浓度场的修正为  $C_{U1}$ , 满足

$$\frac{U}{U_\infty} \cdot \nabla C_{U0} = D \Delta C_{U1}. \quad (65)$$

同理可以推得, 迎流面浓度梯度的绝对值也变大. 温度梯度和浓度梯度都小于零, 这样就增强了迎流面一侧的成分过冷效应, 使界面更容易失稳. 在背流面上  $\cos\theta > 0$ , 液相温度梯度和浓度梯度的绝对值变小, 减弱了成分过冷效应, 使界面更稳定.

从(63)和(65)式中可以看到, 对流对温度场和

浓度场的修正分别与热扩散系数  $k_L/C_{pL}$  和溶质扩散系数  $D$  成反比, 通常热扩散系数要比溶质扩散系数大3个数量级, 以类金属透明模型合金丁二腈-水合金为例<sup>[4]</sup>, 合金物性参数见表1,  $k_L/C_{pL} = 1.146 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}, D = 1.27 \times 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ , 可见  $k_L/C_{pL}$  要远大于  $D$ . 因此, 对流对浓度场的修正要大于对温度场的修正. 对流条件下, 浓度梯度相比纯扩散条件下的变化更大.

表1 丁二腈-水合金的物性参数<sup>[4]</sup>

物性参数	数值
平衡溶质分配系数 $k_0$	0.001
溶质扩散系数 $D/\text{m}^2\text{s}^{-1}$	$1.27 \times 10^{-9}$
远场溶质质量分数 $C_0/\text{wt}\%$	1.0
液相密度 $\rho_L/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$	1016
液相热传导系数 $k_L/\text{J}\cdot\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$	0.222
固相热传导系数 $k_S/\text{J}\cdot\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$	0.224
液相线斜率 $m_L/\text{K}\cdot(\text{wt}\%)^{-1}$	-7.16
潜热 $h_\Delta/\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$	$4.57 \times 10^7$
界面能系数 $\Gamma/\text{K}\cdot\text{m}$	$6.49 \times 10^{-8}$
质量定压热容 $C_{pL}/\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\text{m}^{-3}$	$1.9375 \times 10^6$

如果不考虑浓度场的影响, 则对流对温度场的修正为

$$T_{L1} = \cos\theta \frac{A_{T_{L1}} C_{pL}}{k_L} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \frac{R_0}{r} + \frac{3}{8} \frac{R_0^2}{r^2} - \frac{1}{8} \frac{R_0^3}{r^3} \right). \quad (66)$$

这个结果和文献[17]得到的对流对温度场的修正是一致的. 此时的界面推进速度为

$$v = v_0 - \frac{k_L}{h_\Delta} U_\infty \frac{\partial T_{L1}}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = v_0 - U_\infty \cos\theta \frac{3A_{T_{L1}} C_{pL}}{8h_\Delta R_0}. \quad (67)$$

显然, 在迎流面上  $\cos\theta < 0$ , 因此界面推进速度增加, 在背流面上界面推进速度减小, 这与文献[17]的结论是一致的.

图2显示了过冷熔体球晶凝固球面不同位置扰动振幅增加速率随  $l$  的变化. 计算所采用的物性参数见表1. 远场流速  $U_\infty = 1.1 \times 10^{-6} \text{ m/s}$ , 远场过冷度 3.0 K, 此时纯扩散条件下的界面推进速度

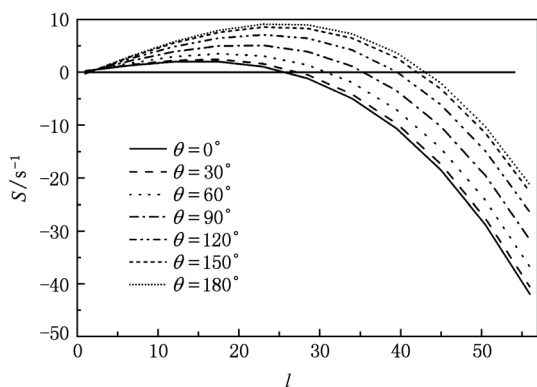


图2 球面不同位置扰动振幅增加速率随  $l$  的变化 远场流速  $U_\infty = 1.1 \times 10^{-6}$  m/s, 远场过冷度为 3.0 K, 球晶半径为 30  $\mu\text{m}$

$v_0 = 12.3 \mu\text{m/s}$ , 流速与界面推进速度的比值为  $U_\infty/v_0 = 8.96 \times 10^{-2}$ . 从图2可以看到, 远场来流情况下, 迎流面的扰动振幅增加速率明显大于背流面的扰动振幅增加速率, 迎流面顶点的扰动振幅增加速率  $S$  最大. 这样流速增加时, 迎流面相比背流面将更快失去稳定性. 从图2中还可以看到,  $S$  随  $l$  的增加存在极大值, 设  $S$  极大值点对应的  $l$  值为  $l_{\text{max}}$ , 可以看到, 从迎流面顶点  $\theta = 180^\circ$  到背流面顶点  $\theta = 0^\circ$ ,  $l_{\text{max}}$  逐渐减小. 这样球晶整体界面的稳定性可以通过计算迎流面顶点的扰动振幅增加速率来确定. 对于球晶凝固, 通常扰动振幅增加速率必须超过球晶表面的推进速度才可能观察到明显的球晶界面失稳, 为此, 采用振幅相对增加速率  $S' = S - v/R_0$  来进一步分析球晶生长的相对稳定性.

图3显示了球晶半径对球晶稳定性的影响. 当远场过冷度 0.5 K 时, 纯扩散条件下球晶的临界稳定半径  $R_c^*$  为 1.8  $\mu\text{m}$ . 图3中  $\theta = 90^\circ$  时  $\cos\theta = 0$ ,  $U_\infty \cos\theta = 0$ , 从(53)式可知, 此时的  $S'$  与纯扩散条件下的  $S'$  是相同的, 因此  $\theta = 90^\circ$  代表的曲线也可以代表纯扩散条件下的  $S'$ . 可以看到, 远场来流明显降低了球晶界面的稳定性. 当远场流速  $U_\infty = 2.0 \times 10^{-4}$  m/s 时, 此时球晶的临界稳定半径  $R_c$  减小为 1.55  $\mu\text{m}$ . 另外, 从图3还可以看到, 随着球晶半径的增加,  $S'$  极大值点对应的  $l_{\text{max}}$  变大. 有意思的是, 相比  $\theta = 90^\circ$  所代表的纯扩散条件下的  $S'$ , 迎流面上  $S'$  增大, 背流面上的  $S'$  减小. 这就说明远场来流使迎流面变得更不稳定, 但使背流面变得更稳定. 需要指出的是, 尽管图3中, 当  $l < 3$  时, 背流面的扰动振幅相对增加速率大于零, 但是, 当  $l < 3$  时, 扰动使界面形态发生的变化并不显著, 可以认为此时球晶界面仍然保持稳定.

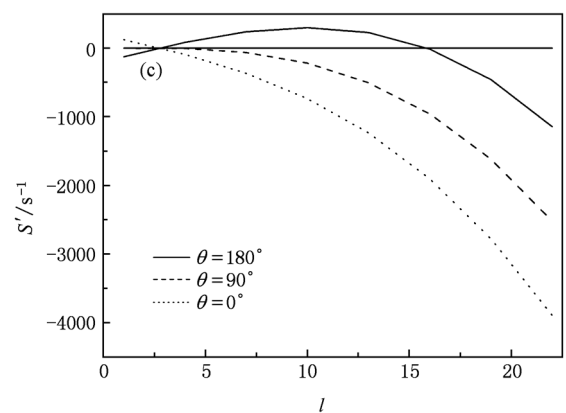
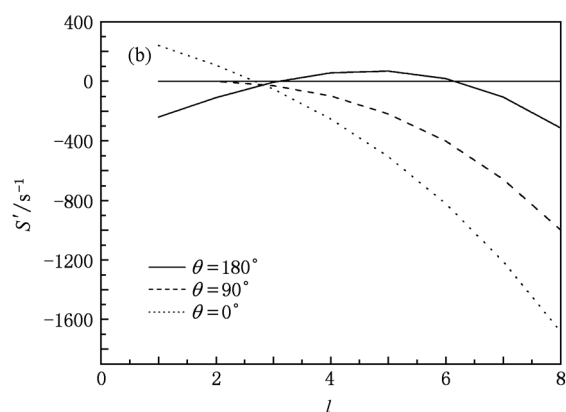
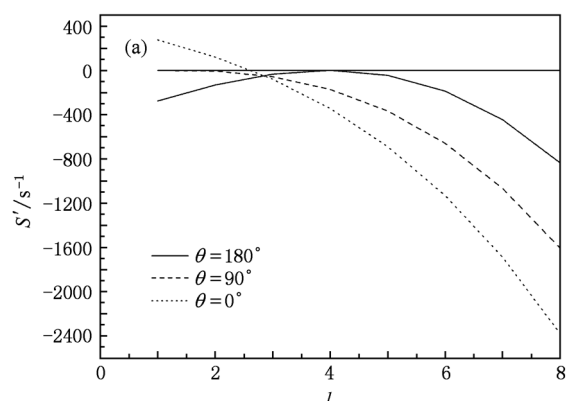


图3 扰动振幅相对增加速率  $S'$  随  $l$  的变化 远场过冷度为 0.5 K, 远场流速  $U_\infty = 2.0 \times 10^{-4}$  m/s (a)  $R_0 = 0.86R_c^* = 1.55 \mu\text{m}$ ; (b)  $R_0 = R_c^* = 1.8 \mu\text{m}$ ; (c)  $R_0 = 2R_c^* = 3.6 \mu\text{m}$

图4显示了球晶凝固相对稳定的临界半径随远场过冷度和流速变化的计算结果. 可以看到, 远场来流条件下球晶的临界稳定半径随远场过冷度增大而减小. 当流速增大时, 临界稳定半径也减小.

### 5. 结 论

采用渐近分析方法研究了远场来流对过冷熔

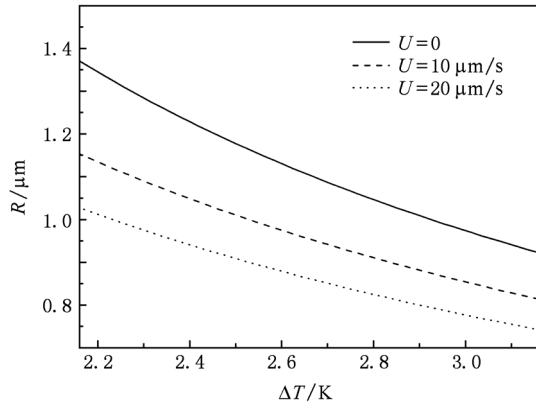


图4 临界稳定半径随过冷度和流速的变化

体中球晶周围温度场和浓度场的影响,并以此为依据,对 Trivedi 球晶稳定性判据进行了对流修正,得到了球晶表面形态扰动的振幅增加速率的表达式. 计算结果表明,远场来流条件下,迎流面的扰动振幅增加速率明显大于背流面的扰动振幅增加速率,振幅增加速率最大值对应的扰动阶次从迎流面到背流面逐渐减小. 相比纯扩散条件下的过冷球晶生长,远场来流使迎流面的稳定性降低,背流面的稳定性增大. 最不稳定的一点是迎流面顶点. 球晶半径增加时,振幅增加速率  $S$  最大值对应的扰动阶次  $l_{\max}$  会变大. 远场来流会显著降低球晶稳定性,减小球晶临界稳定半径.

- [1] Mullins W W, Sekerka R F 1963 *J. Appl. Phys.* **34** 323
- [2] Trivedi R 1980 *J. Cryst. Growth* **48** 93
- [3] Vogel A, Cantor B 1977 *J. Cryst. Growth* **37** 309
- [4] Li T, Lin X, Huang W D 2006 *Acta Mater.* **54** 4815
- [5] Delves R T 1971 *J. Cryst. Growth* **8** 13
- [6] Coriell S R, McFadden G B, Boisvert R F, Sekerka R F 1984 *J. Cryst. Growth* **69** 15
- [7] Brattkus K, Davis S H 1988 *J. Cryst. Growth* **89** 423
- [8] Forth S A, Wheeler A A 1989 *J. Fluid Mech.* **202** 339
- [9] Davis S H, Schulze T P 1996 *Metall. Mater. Trans.* **27A** 583
- [10] Lin X, Li T, Wang L L, Su Y P, Huang W D 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3971 (in Chinese) [林鑫、李涛、王琳琳、苏云鹏、黄卫东 2004 物理学报 **53** 3971]
- [11] Huang W D, Lin X, Li T, Wang L L, Inatomi Y 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3978 (in Chinese) [黄卫东、林鑫、李涛、王琳琳、Inatomi Y 2004 物理学报 **53** 3978]
- [12] Chen Y J, Chen C L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4585 (in Chinese) [陈玉娟、陈长乐 2008 物理学报 **57** 4585]
- [13] Sun D K, Zhu M F, Yang C R, Pan S Y, Dai T 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** S285 (in Chinese) [孙东科、朱鸣芳、杨朝蓉、潘诗琰、戴挺 2009 物理学报 **58** S285]
- [14] Xiong B, Tang Z M, Hu W R 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 1809 (in Chinese) [熊斌、唐泽眉、胡文瑞 1991 物理学报 **40** 1809]
- [15] Wang J Y, Chen C L, Zhai W, Jin K X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6554 (in Chinese) [王建元、陈长乐、翟薇、金克新 2009 物理学报 **58** 6554]
- [16] Chen M W, Wang Z D, Xu J J 2007 *Sci. China E* **37** 644 (in Chinese) [陈明文、王自东、徐鉴君 2007 中国科学 **E** **37** 644]
- [17] Chen M W, Wang Z D, Sun R J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1819 (in Chinese) [陈明文、王自东、孙仁济 2007 物理学报 **56** 1819]

## Effect of far field flow on the stability of the spherical crystal in undercooled melt \*

Cao Bin Lin Xin Huang Wei-Dong<sup>†</sup>

(State Key Laboratory of Solidification Processing, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 12 June 2010; revised manuscript received 11 September 2010)

### Abstract

A model is developed to investigate the effects of far field flow on the solidification of a spherical particle from the melt, under the influence of thermal and solute flow. The stability of the spherical interface is studied and the growth rate of the interface perturbation is calculated. The perturbation to the maximum growth rate becomes larger when the spherical radius increases. The downwind side of the interface is more unstable than the upwind side. The effect of far field flow reduces the critical radius of the spherical crystal.

**Keywords:** spherical crystal, far field flow, interface stability, Trivedi criterion

**PACS:** 64.70.D-, 64.70.dg, 81.10.Fq, 81.30.Fb

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50771083).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: huang@nwpu.edu.cn