

椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输特性^{*}

黄永超 张廷蓉[†] 陈森会 宋宏远 李艳桃 张伟林

(四川师范大学物理与电子工程学院, 成都 610066)

(2010 年 5 月 21 日收到; 2010 年 9 月 20 日收到修改稿)

基于光束在各向异性介质中的傍轴矢量传输理论, 导出了椭圆高斯光束在各向异性单轴晶体中垂直于光轴的传输公式, 并利用此解析式进行数值计算和分析, 研究了各向异性介质对 x 方向偏振的椭圆高斯光束偏振特性的影响. 研究表明, 晶体的各向异性对光束的偏振和对称性有较大影响.

关键词: 椭圆高斯光束, 单轴晶体, 各向异性, 传输

PACS: 42.55. Ah, 42.68. Ay, 42.70. Mp

1. 引言

各向异性介质在偏振光的产生, 二阶非线性光学效应的实现(诸如光学谐波、光学和频与差频、光学参量放大与振荡)等方面起着重要作用. 因此, 研究光束在各向异性单轴晶体中的传输特性具有重要的理论和实际意义. 光束在各向异性单轴晶体中传输, 原则上可以采用麦克斯韦方程组直接求解各向异性介质中光传输的问题^[1], 由于这种方法的复杂性而未被广泛采用. 2001 年, Ciattoni 等人^[2,3]基于角谱分析, 求解了用电场矢量描述光在单轴晶体中传输的边值问题, 基于这一理论, 单轴晶体中的任意光束都可以表示为寻常光和非常光独立传输的叠加. 利用此方法, 文献中对光束在单轴晶体中的传输特性作了大量研究^[4-8]. 然而上述研究主要集中于光束在单轴晶体中沿着光轴的传输, 有关光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输, Ciattoni 和 Palma 研究了类贝塞尔光束和各向异性光束垂直于单轴晶体光轴的传输^[9-11]. 最近 Liu 和 Zhou 研究了各类空心光束和部分相干光束垂直于单轴晶体光轴的传输^[12-15]. Tang 研究了厄米-余弦高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输^[16]. 上述研究发现, 晶体的各向异性使初始光场的特性在晶体中不再保持.

2002 年 Cai 等人研究了在空间域和空间-频率域中椭圆高斯光束通过失调光学系统的传输特性, 指出无论是在空间域还是空间-频率域, 一般椭圆高斯光束通过失调薄透镜后都会变成离轴椭圆高斯光束^[17]. 2003 年他们又研究了椭圆高斯光束的分数傅里叶变换, 发现椭圆高斯光束的特性与分数傅里叶变换的阶数和椭圆高斯光束的初始参数有关^[18]. 2005 年王彤华等人研究了椭圆高斯光束在强非局域非线性介质中的传输特性^[19], 得到两横向方向束宽作周期性变化的结论. 2006 年董一鸣等人研究了复杂像散椭圆光束的轨道角动量, 发现轨道角动量与光束参数有关^[20]. 2010 年 Guo 等用 Z-scan 法分析了椭圆高斯光束的高阶非线性折射效应^[21], 然而迄今为止, 尚无关于椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴传输特性的研究报道. 本文基于光束在各向异性单轴晶体中垂直于光轴的傍轴矢量传输理论, 导出了椭圆高斯光束在各向异性单轴晶体中垂直于光轴传输的解析表达式, 并通过数值计算和分析, 研究了椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输特性.

2. 光束在单轴晶体中垂直于光轴的傍轴传输理论

假定在单轴晶体 $z = 0$ 的入射面上, 线偏振光束的偏振方向沿 x 轴, 并且 x 轴与晶体的光轴重合. 那

^{*} 四川省教育厅重点项目基金(批准号: 09ZA089)资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: trz_sc@163.com

么,对于各向异性单轴晶体,其介电张量可以表示

$$\text{为 } \varepsilon = \begin{pmatrix} n_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_o^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_o^2 \end{pmatrix} \text{ 其中 } n_o \text{ 和 } n_e \text{ 分别是寻常光波}$$

与非常光波的折射率^[9,22]. 当光束在单轴晶体中垂直于光轴传输时,Ciattoni 和 Palma 研究了光束在单轴晶体中传输距离为 z 的电场^[2,9,23],其表达式为

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t)],$$

式中

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_o(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_e(\mathbf{r}), \quad (1)$$

式中

$$\mathbf{E}_e(\mathbf{r}, z) = \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\kappa_{ez} z) \times \begin{pmatrix} \tilde{E}_x(\mathbf{k}) \\ -\frac{\kappa_x \kappa_y}{\kappa_o^2 n_o^2 - k_x^2} \tilde{E}_x(\mathbf{k}) \\ -\frac{\kappa_{ez} \kappa_x}{\kappa_o^2 n_o^2 - k_x^2} \tilde{E}_x(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_o(\mathbf{r}, z) = \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \exp(i\kappa_{oz} z) \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{k_x k_y}{k_o^2 n_o^2 - k_x^2} \tilde{E}_x(\mathbf{k}) + \tilde{E}_y(\mathbf{k}) \\ -\frac{k_y}{k_{oz}} \left[\frac{k_x k_y}{k_o^2 n_o^2 - k_x^2} \tilde{E}_x(\mathbf{k}) + \tilde{E}_y(\mathbf{k}) \right] \end{pmatrix}. \quad (3)$$

(2)式和(3)式分别是非常光和寻常光的电场. 式中 $\kappa_o = 2\pi/\lambda$ 是光束在真空中的波数.

$$\tilde{E}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 \mathbf{r} \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}, 0), \quad (4)$$

(4)式是电场在 $z=0$ 的平面上的二维傅里叶变换, $\mathbf{r} = x\hat{e}_x + y\hat{e}_y$ 是横截面上的位置矢量; $\mathbf{k} = \kappa_x \hat{e}_x + \kappa_y \hat{e}_y$ 是波矢量, k_x 和 k_y 表示寻常光和非常光沿 x 和 y 轴的波数. 并且

$$k_{oz}(\mathbf{k}) = (k_o^2 n_o^2 - k^2)^{1/2}, \\ k_{ez}(\mathbf{k}) = [k_o^2 n_e^2 - (n_e^2/n_o^2)k_x^2 - k_y^2]^{1/2}. \quad (5)$$

(1)—(4)式给出了光束在单轴晶体中垂直于光轴传输的电场表达式. 根据文献[2],在傍轴条件下,晶体中的电场可以表示为寻常光和非常光的线性叠加,当参数 k_x/k_o 和 k_y/k_o 很小时,将相位和振幅分别展开到二阶项,得到

$$\mathbf{E}_{ex}(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_o n_e z) \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

$$\times \exp\left(-i \frac{n_e^2 k_x^2 + n_o^2 k_y^2}{2k_o n_e n_o^2} z\right) \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}) \\ = \exp(ik_o n_e z) A_{ex}(\mathbf{r}, z), \quad (6)$$

$$\mathbf{E}_{ey}(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_o n_e z) \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp\left(-i \frac{n_e^2 k_x^2 + n_o^2 k_y^2}{2k_o n_e n_o^2} z\right) \left(-\frac{k_x k_y}{k_o^2 n_o^2}\right) \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}) \\ = \exp(ik_o n_e z) A_{ey}(\mathbf{r}, z), \quad (7)$$

$$\mathbf{E}_{ez}(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_o n_e z) \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp\left(-i \frac{n_e^2 k_x^2 + n_o^2 k_y^2}{2k_o n_e n_o^2} z\right) \left(-\frac{n_e k_x}{k_o n_o^2}\right) \tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}) \\ = \exp(ik_o n_e z) A_{ez}(\mathbf{r}, z), \quad (8)$$

$$\mathbf{E}_{ox}(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_{oy}(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_o n_o z) \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_o n_o} z\right) \left(\frac{k_x k_y}{k_o^2 n_o^2}\right) (\tilde{\mathbf{E}}_x(\mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{E}}_y(\mathbf{k})) \\ = \exp(ik_o n_o z) A_{oy}(\mathbf{r}, z), \quad (10)$$

$$\mathbf{E}_{oz}(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_o n_o z) \int d^2 \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ \times \exp\left(-i \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_o n_o} z\right) \left(-\frac{k_y}{k_o n_o}\right) \tilde{\mathbf{E}}_y(\mathbf{k}) \\ = \exp(ik_o n_o z) A_{oz}(\mathbf{r}, z). \quad (11)$$

3. 椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输

设在入射平面上($z=0$)椭圆高斯光束的场分布为^[24]

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, 0) = E_0 \exp\left[-\left(\frac{x^2}{\omega_{0x}^2} + \frac{y^2}{\omega_{0y}^2}\right)\right] \hat{e}_x, \quad (12)$$

其中,在 $z=0$ 的平面上,椭圆光束的偏振方向沿 x 轴,并且沿 z 轴传输. 式中 ω_{0x}, ω_{0y} 分别表示椭圆高斯光束在 $z=0$ 平面 x 方向和 y 方向的束腰宽度. 当 $\omega_{0x} = \omega_{0y}$ 时,(12)式表示高斯光束. 为简化起见,取 $E_0 = 1$. 将(10)式代入(4)式得到椭圆高斯光束的二维傅里叶变换

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}) = \frac{\omega_{0x} \omega_{0y}}{4\pi} \exp\left(-\frac{k_x^2 \omega_{0x}^2 + k_y^2 \omega_{0y}^2}{4}\right) \hat{e}_x. \quad (13)$$

将(13)式带入(6)—(11)式积分得

$$A_{ex}(\mathbf{r}, z) = \frac{\omega_{0x} \omega_{0y}}{(q_x q_y)^{1/2}}$$

$$\times \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{y^2}{q_y}\right), \quad (14)$$

$$A_{ey}(\mathbf{r}, z) = \frac{4xy\omega_{0x}\omega_{0y}}{k_0^2 n_o^2 (q_x q_y)^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{y^2}{q_y}\right), \quad (15)$$

$$A_{ez}(\mathbf{r}, z) = \frac{-2in_e x \omega_{0x} \omega_{0y}}{k_0^2 n_o^2 q_x^{3/2} q_y^{1/2}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{q_x} - \frac{y^2}{q_y}\right), \quad (16)$$

$$A_{ox}(\mathbf{r}, z) = 0, \quad (17)$$

$$A_{oy}(\mathbf{r}, z) = \frac{-4xy\omega_{0x}\omega_{0y}}{k_0^2 n_o^2 (q_{ox} q_{oy})^{3/2}} \times \exp\left(-\frac{x^2}{q_{ox}} - \frac{y^2}{q_{oy}}\right), \quad (18)$$

$$A_{oz}(\mathbf{r}, z) = 0. \quad (19)$$

(14)–(16)式分别是 e 光沿 x 轴、 y 轴和 z 轴方向偏振的场分布的慢变振幅, (17)–(19) 式分别是 o 光沿 x 轴、 y 轴和 z 轴方向偏振的场分布的慢变振幅. 式中

$$\begin{aligned} q_x &= \omega_{0x}^2 + \frac{2in_e z}{k_0 n_o^2}, \\ q_y &= \omega_{0y}^2 + \frac{2iz}{k_0 n_e^2}, \\ q_{ox} &= \omega_{0x}^2 + \frac{2iz}{k_0 n_o}, \\ q_{oy} &= \omega_{0y}^2 + \frac{2iz}{k_0 n_o}. \end{aligned} \quad (20)$$

由(15)式和(18)式可得到椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴传输过程中 E_y 表达式

$$E_y(\mathbf{r}, z) = \exp(ik_0 n_e z) A_{ey}(\mathbf{r}, z) + \exp(ik_0 n_o z) A_{oy}(\mathbf{r}, z). \quad (21)$$

4. 数值计算与分析

基于(14)–(21)式对椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输进行数值计算, 计算中取 $\omega_{0x} = 10 \mu\text{m}$, $\omega_{0y} = 20 \mu\text{m}$ 和 $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. 图1和图3给出了椭圆高斯光束在金红石晶体(o光和e光的折射率分别为 $n_o = 2.616$, $n_e = 2.903$) 中, e光沿 x 和 z 方向偏振场分布的慢变振幅在不同传输面上的模 $|A_{ex}|$ 和 $|A_{ez}|$; 图2给出了椭圆高斯光束在金

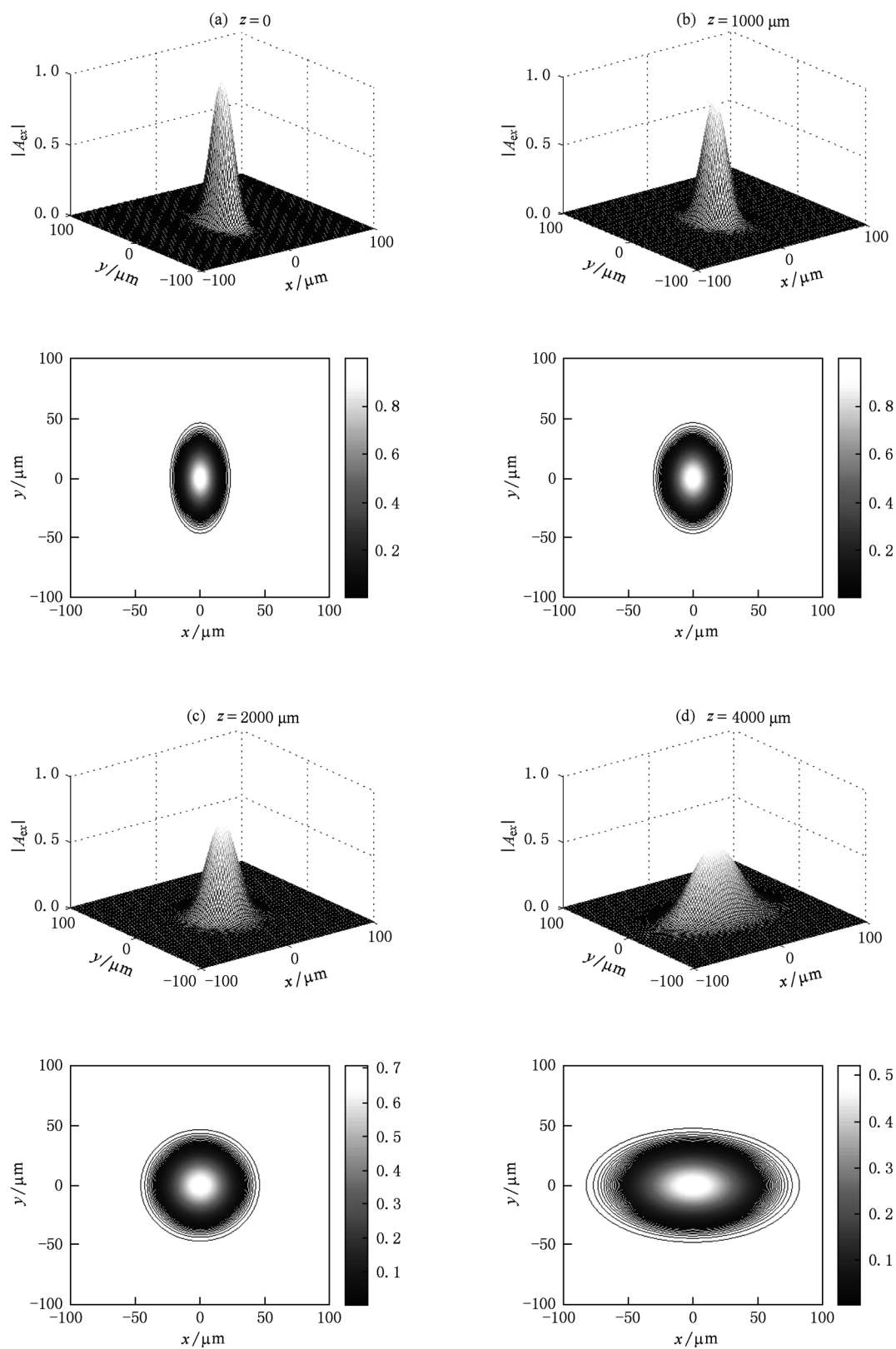
红石晶体中沿 y 方向不同传输面上场分布的模 $|E_y|$; 图4给出了椭圆高斯光束在金红石晶体中不同传输面上的光强分布 $I(x, y, z)$. 由图1可以看出, 随着传输距离的增加, 给定的初始光场峰值逐渐衰减, 并且在 xy 平内逐渐向四周扩散. 由图1(a)和(d)表明: $|A_{ex}|$ 不再保持初始光场的对称性, 而是绕着 z 轴旋转了 $\frac{\pi}{2}$. 图2(a)表明: 在 $z=0$ 的入射面上沿 y 轴方向没有偏振场分布. 图2(b), (c) 和(d)表明由于晶体的各向异性特性, 椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输过程中, 在 y 轴方向出现了衍射峰, 且随着传输距离的增加, 衍射峰越来越明显. 图2还可以看出, 随传输距离的增加, $|E_y|$ 在 xy 平面内逐渐向四周扩散. 在 $z>0$ 的平面内, 由于晶体的各向异性特性导致椭圆高斯光束的线偏振特性不再保持.

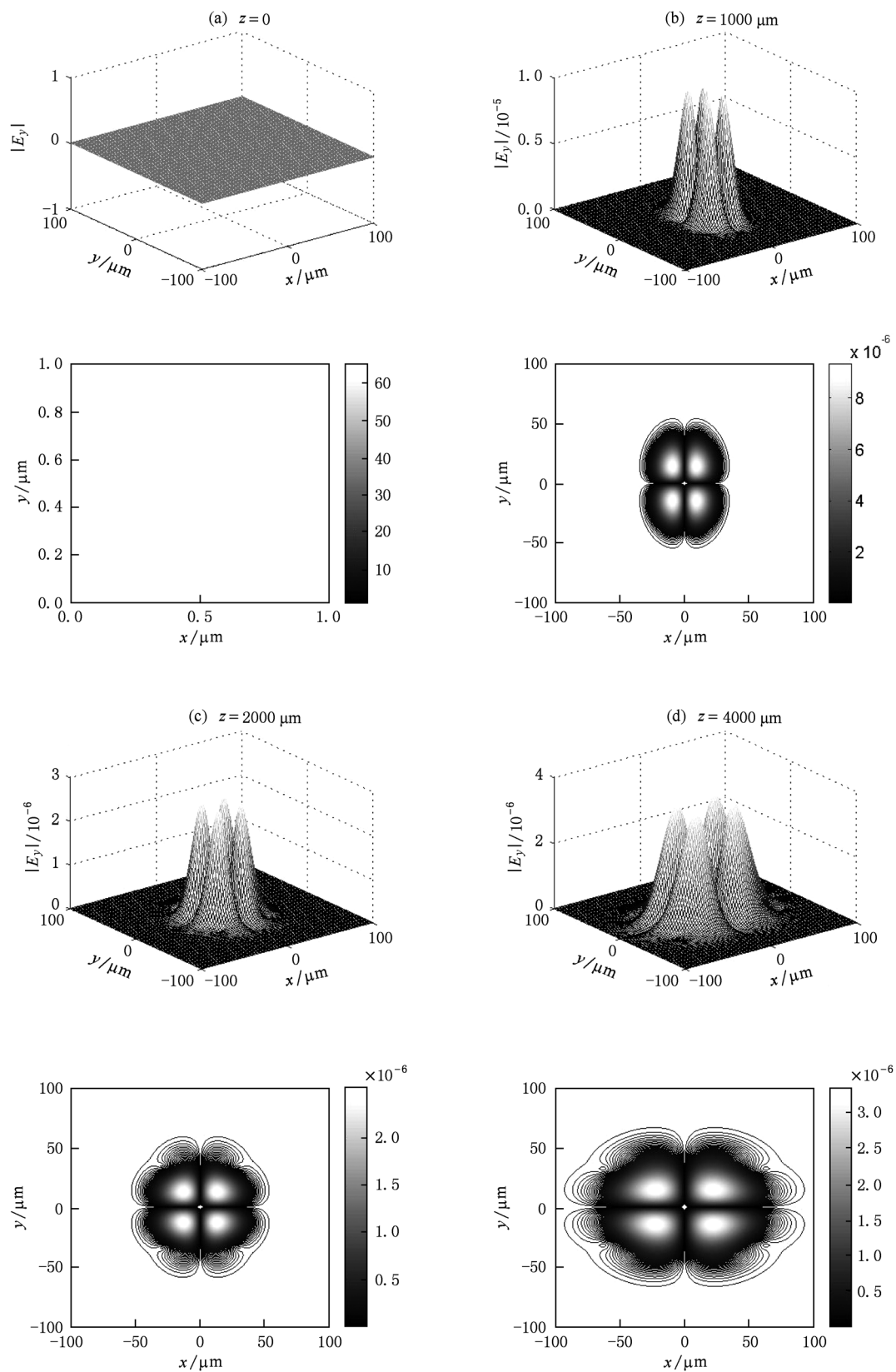
图3可以看出, $|A_{ez}|$ 与 $|A_{ex}|$ 的传输特性相似. 随着传输距离的增加, 给定的初始光场峰值逐渐衰减, 并且在 xy 平面内逐渐向四周扩散. 图3(a)和(d)表明: $|A_{ez}|$ 不再保持初始光场的对称性, 而是绕着 z 轴旋转了 $\frac{\pi}{2}$.

图4表明: 由于晶体各向异性, 椭圆高斯光束在晶体中传输时, 光强随传输距离 z 的增加而逐渐减小, 并且在 xy 平面内逐渐向四周扩散. 从图1–3可看出 $|E_y| \ll |A_{ex}|$ 和 $|A_{ez}| \ll |A_{ex}|$, 在单轴晶体中的椭圆高斯光束的光强 $I(x, y, z) = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2 \approx |A_{ex}|^2$.

5. 结 论

本文基于光束在各向异性介质中的傍轴矢量传输理论, 导出了椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输公式, 并利用该表达式作数值计算与分析, 研究了椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的传输特性. 研究表明: 由于晶体的各向异性, 导致椭圆高斯光束在晶体中传输时, 随着传输距离 z 的增加, 其光场在 xy 平面内扩散, 同时峰值逐渐衰减. 在各向异性晶体中 o 光和 e 光有不同的衍射长度, 导致椭圆高斯光束在晶体中的偏振场 E_x 分布不能保持原有对称性, 衍射时会感生出 y 方向的偏振场分量, 并且偏振场 $|E_y|$ 随传输距离 z 的增加而加强.


 图 1 椭圆高斯光束在单晶体中垂直于光轴的不同传输面上, e 光沿 x 方向偏振场分布的慢变振幅的模 $|A_{\text{ex}}|$


 图2 椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的不同传输面上, e 光沿 y 方向偏振场分布的模 $|E_y|$

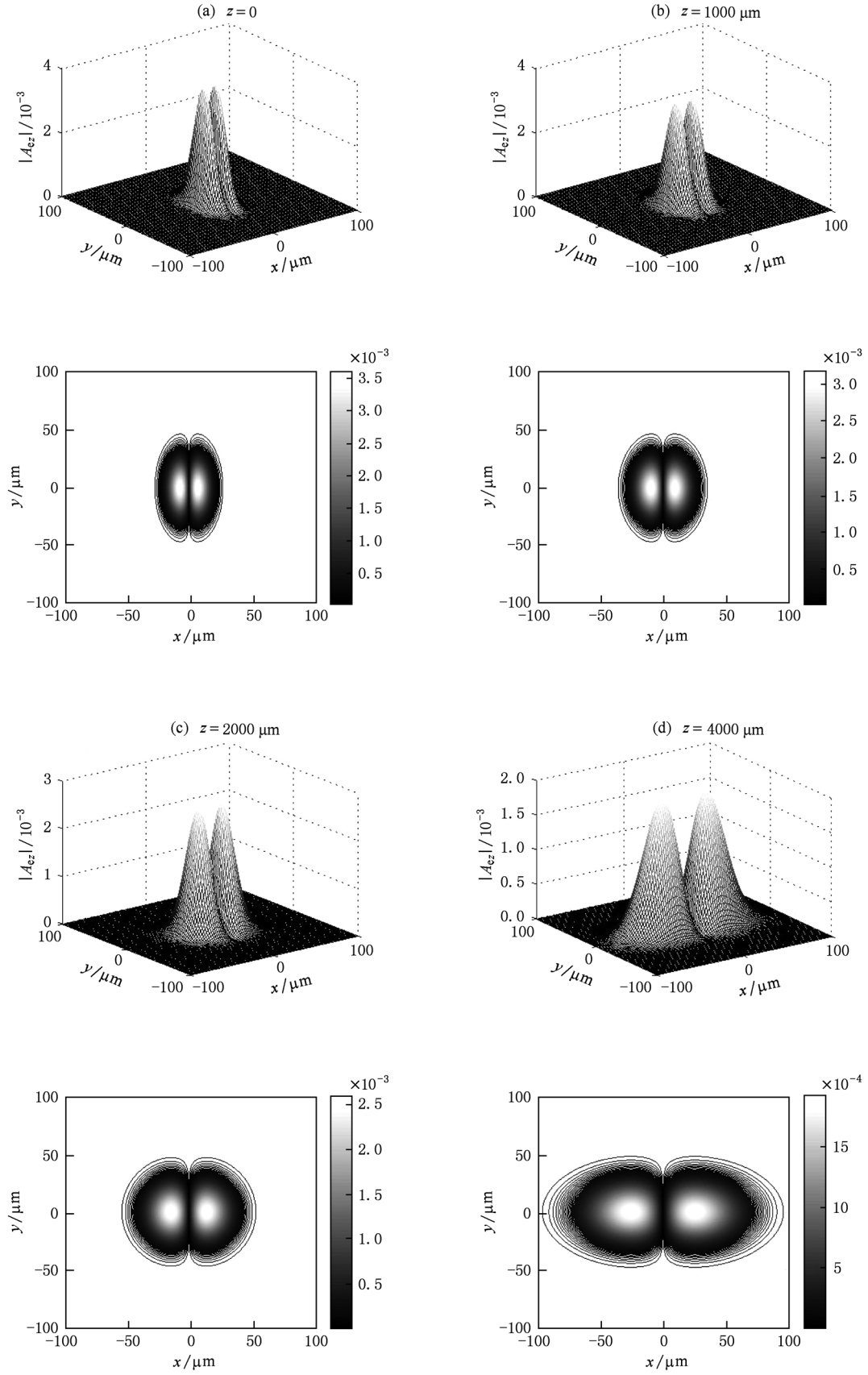


图3 椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的不同传输面上, e 光沿 z 方向偏振场分布的慢变振幅的模 $|A_{ez}|$

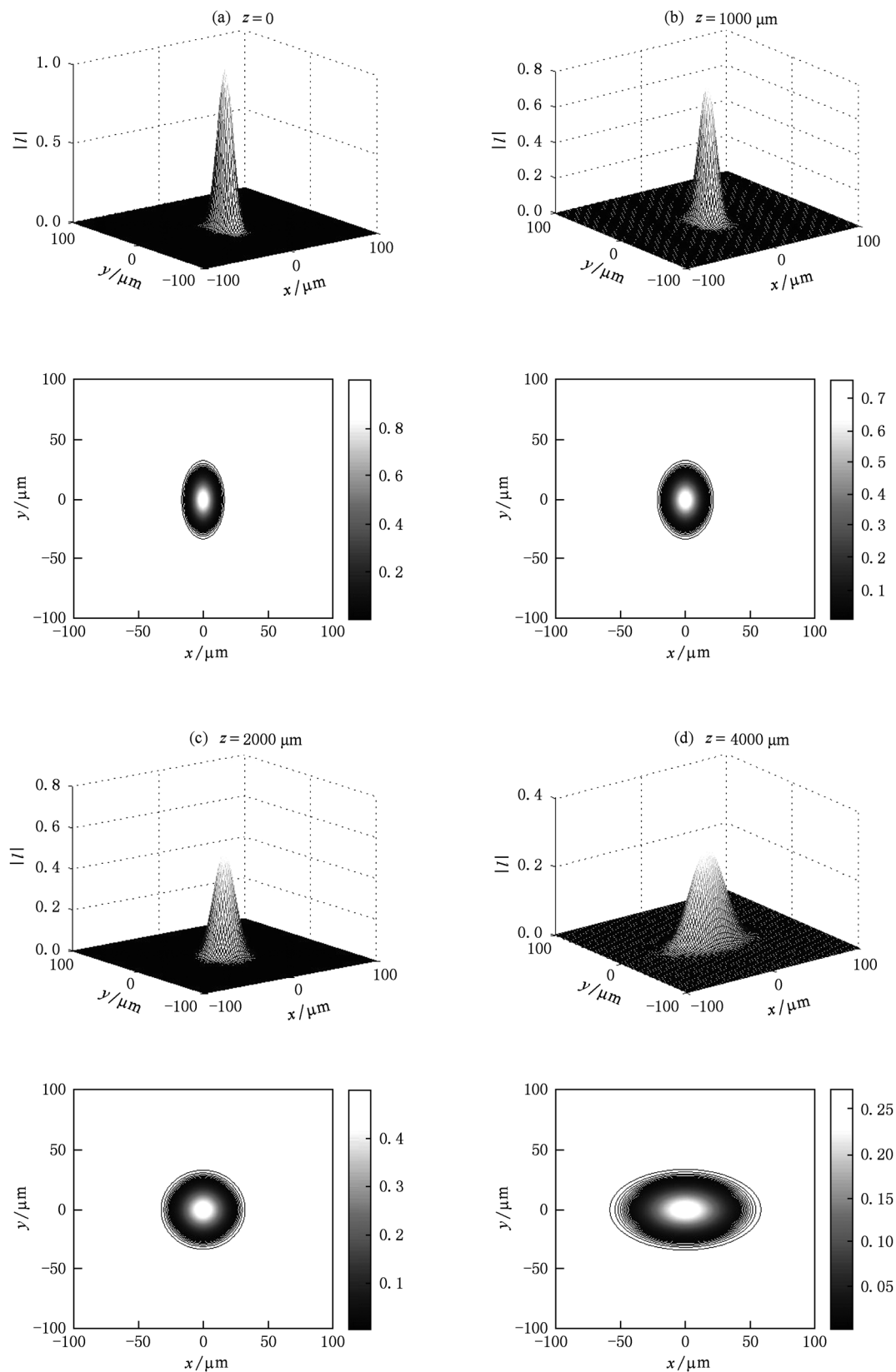


图4 椭圆高斯光束在单轴晶体中垂直于光轴的不同传输面上的光强分布 ($I(x, y, z) = |E_x|^2 + |E_y|^2 + |E_z|^2$)

- [1] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) p793
- [2] Ciattoni A, Cmsiglialli B, Di Porto P 2001 *J. Opt. Soc. Am. A* **18** 1656
- [3] Ciattoni A, Cincotti G, Palma C 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 792
- [4] Cincotti G, Ciattoni A, Palma C 2001 *IEEE J. Quant. Electron* **37** 1517
- [5] Ciattoni A, Cincotti G, Palma C 2002 *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 792
- [6] Cincotti G, Ciattoni A, Palma C 2002. *J. Opt. Soc. Am. A* **19** 1680
- [7] Lu B D, Luo S R 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 3061 (in Chinese) [罗时荣、吕百达 2003 物理学报 **52** 3061]
- [8] Deng D G, Yu H, Xu S Q 2008 *Opt. Comm.* **281** 202
- [9] Ciattoni A, Palma C 2003 *J. Opt. Soc. Am. A* **20** 2163
- [10] Ciattoni A, Palma C 2003 *Opt. Commun.* **224** 175
- [11] Ciattoni A, Palma C 2004 *Opt. Commun.* **231** 79
- [12] Liu D J, Zhou Z X 2008 *J. Opt. A, Pure Appl.* **10** 095005
- [13] Liu D J, Zhou Z X 2009 *Opt. Laser Technol.* **41** 877
- [14] Liu D J, Zhou Z X 2009 *J. Opt. Soc. Am. A* **26** 924
- [15] Liu D J, Zhou Z X 2009 *Eur. Phys. J.* **54** 95
- [16] Tang B 2009 *J. Opt. Soc. Am. A* **26** 2480
- [17] Cai Y J, Lin Q 2002 *Optics & Laser Technology* **34** 415
- [18] Cai Y J, Lin Q 2003 *Optics Commun.* **217** 7
- [19] Wang X H, Guo Q 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 3183 (in Chinese) [王形华、郭旗 2005 物理学报 **54** 3183]
- [20] Dong Y M, Xu Y F, Zhang Z 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5755 (in Chinese) [懂一鸣、徐云飞、张璋 2006 物理学报 **55** 5755]
- [21] Guo S F, Ting Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 067802
- [22] Luo H L, Hu W, Yi X N 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 2947 (in Chinese) [罗海陆、胡巍、易煦农 2004 物理学报 **53** 2947]
- [23] Ciattoni A, Cincotti G, Palma C 2001 *Opt. Commun.* **195** 55
- [24] Siegman A E 1986 *Lasers*. Mill Vallry. California. University Science Books p685

Propagation of elliptical Gaussian beam in uniaxial crystal orthogonal to the optical axis *

Huang Yong-Chao Zhang Ting-Rong[†] Chen Sen-Hui Song Hong-Yuan Li Yan-Tao Zhang Wei-Lin

(Institute of Physics and Electronic Engineering, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, China)

(Received 21 May 2010; revised manuscript received 20 September 2010)

Abstract

Based on the paraxial vectorial theory of the propagation of beam in uniaxially anisotropic medium, the analytical formula for an elliptical Gaussian beam propagating in uniaxial crystal orthogonal to the optical axis is derived. And some numerical simulations were preformed to study the effect of the anisotropy on the polarization property of the diffracted elliptical Gaussian beam in the output plane. The results show that the linear polarization state and the symmetry of beam cannot remain unchanged during propagation due to the anisotropy of crystals.

Keywords: elliptical Gaussian beams, uniaxial crystal, anisotropy, propagation

PACS: 42.55. Ah, 42.68. Ay, 42.70. Mp

* Project supported by the Scientific Research Fundation of the Education Department of Sichuan Province, China (Grant No. 09ZA089).

[†] Corresponding author. E-mail: trz_sc@163.com