

考虑双速度差效应的耦合映射跟驰模型^{*}葛红霞¹⁾ 程荣军²⁾ 李志鹏³⁾†

1) (宁波大学理学院, 宁波 315211)

2) (浙江大学宁波理工学院基础部, 宁波 315100)

3) (同济大学电子与信息工程学院, 上海 200092)

(2010年6月23日收到; 2011年2月14日收到修改稿)

基于 Konishi 等的研究工作, 提出了涉及前方两辆车车头间距的优化速度函数的耦合映射跟驰模型. 采用反馈控制方法, 研究了耦合映射跟驰模型中的交通拥堵控制. 利用反馈控制理论, 给出了头车速度发生变化时交通流保持稳定的条件, 并与 Konishi 等得到的结果进行了比较. 数值模拟结果表明, 所提出的模型在经典的反馈控制方法下描述的交通拥堵现象得到了有效抑制.

关键词: 交通流, 耦合映射跟驰模型, 优化速度函数, 反馈控制

PACS: 05.50.+q

1. 引言

随着经济的快速发展, 交通拥堵现象已变得越来越严重. 尤其是在大城市中, 交通拥堵问题更为突出. 1961年, Newell^[1]提出了一个由一阶微分方程描述的跟驰模型, 首次定义了优化速度(OV)函数. 1995年, Bando等^[2]提出了一个称为优化速度模型(OVM)的微观交通流模型. 此后, OVM得到了众多学者的关注^[3-5]. 跟驰模型中的耦合映射(CM)跟驰模型^[6-11]不仅通过数值模拟能揭示多种交通现象, 而且以其简洁的算法节省了大量模拟时间. CM跟驰模型可分为两类. 一类是混沌CM跟驰模型^[6], 即把OV作为一个混沌映射, 每一辆车就代表了一个混沌状态或行为. 另一类是非混沌CM跟驰模型^[7], 其中OV函数是原来的函数, 每辆车的行为不表示混沌状态. 1999年, Konishi等^[8]利用非混沌的CM跟驰模型, 通过设置时滞反馈控制项, 研究了开放边界条件下单车道上无倒车现象的车流运行问题, 提出了如何抑制交通拥堵的方案并进行了数值模拟. 这一方法将时滞反馈控制与CM跟驰模型相结合, 对减少交通拥堵十分有意义. 2006年, 赵晓梅等^[9]在文献[8]工作的基础上, 提出

了更为简单有效的交通拥堵控制方法, 设置反馈控制项为当前车速与其前方最近邻车速之差, 利用稳定性理论求得了反馈增益的取值范围. 通过数值模拟可知, 交通流量较文献[8]的确有所增加. 次年, 韩祥临等^[10]提出了一种基于智能交通系统(ITS)的CM跟驰模型. 在该模型中, 当前车除了考虑前方最近邻车辆的车速之外, 借助ITS还可以计及前方若干次近邻车辆的车速. 于是, 通过及时了解前方车辆的运行情况, 可以更准确地把握前方的交通状况, 进而及时采取措施, 控制车速, 使车辆运行处于更佳状态, 减少交通拥堵. 2009年, 沈飞英等^[11]在双速度差(TVD)跟驰模型^[5]的基础上研究了考虑TVD效应的反馈控制项对改善车流的影响. TVD跟驰模型是在OVM的基础上考虑了前方两辆车与当前车之间的速度差, 通过稳定性分析和数值模拟表明, TVD跟驰模型能够较好地刻画交通流的一些本质特性, 诸如司机的反应延迟时间、交通流密度波的传播速度以及红绿灯前的加速度范围都与实测数据能够很好符合.

上述研究都是基于CM跟驰模型, 但是CM跟驰模型本身在这些研究中没有得到进一步改进. 鉴于传统的CM跟驰模型中的OV函数选取的是一种简单的分段线性函数, 难以准确地描述真实交通状

^{*} 国家自然科学基金(批准号:11072117, 10802042, 60904068)、浙江省自然科学基金(批准号:Y6100023)、宁波市自然科学基金(批准号:2009B21003)和宁波大学王宽诚幸福基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: lizhipeng@tongji.edu.cn

况, 本文将从 OV 函数的改进着手, 给出一个修正的 CM 跟驰模型并进行了稳定性分析. 在本文模型中考虑了经典的反馈控制项, 分析交通无拥堵所需的条件以及通过理论分析来确定模型中的参数取值. 同时, 对模型进行了数值模拟, 并与前人的工作进行比较.

2. CM 车辆跟驰模型及其稳定性分析

2.1. CM 车辆跟驰模型

首先, 本文给出修正的 CM 车辆跟驰模型.

头车的运动方程为

$$x_0(n+1) = v_0 T + x_0(n). \quad (1)$$

这里 $x_0(n) > 0$ 是头车在 $t = nT$ 时刻的位置; $v_0 > 0$ 是头车的速度, 该速度是一个常量; T 是采样时间; $x_0(0) > 0$ 是头车的初始位置.

跟随车辆 i 的运动方程为

$$x_i(n+1) = v_i(n)T + x_i(n) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

这里 $x_i(n) > 0$ 是第 i 辆车在 $t = nT$ 时刻的位置, $v_i(n) > 0$ 是第 i 辆车在 $t = nT$ 时刻的速度, N 是车辆的总数. 跟随车辆的速度由以下运动方程描述:

$$v_i(n+1) = \alpha_i [V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - v_i(n)]T + v_i(n), \quad (3)$$

其中 $\alpha_i > 0$ 是第 i 位车辆驾驶员的敏感系数, $V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n))$ 是 OV 函数. 传统的 OV 函数均采用了一种只依赖于第 i 辆车与第 $i-1$ 辆车之间的车头间距的分段线性函数. 新的 OV 函数不仅依赖于前方第 $i-1$ 辆车与第 i 辆车之间的车头间距 $y_i(n)$, 而且依赖于前方第 $i-2$ 辆车与第 $i-1$ 辆车之间的车头间距 $y_{i-1}(n)$. $y_i(n)$ 和 $y_{i-1}(n)$ 可分别表示为

$$\begin{aligned} y_i(n) &= x_{i-1}(n) - x_i(n), \\ y_{i-1}(n) &= x_{i-2}(n) - x_{i-1}(n). \end{aligned} \quad (4)$$

OV 函数的形式如下:

$$\begin{aligned} V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) &= \frac{v_i^{\text{max}}}{2} \left[1 + \bar{H}_{\text{sat}} \left(2 \frac{py_i(n) + (1-p)y_{i-1}(n) - \eta_i}{\zeta_i} \right) \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

这里 v_i^{max} 是最大速度; η_i 是安全间距; $\zeta_i > 0$ 是距离参数; $\bar{H}_{\text{sat}}(\cdot)$ 是饱和函数, 该函数的形式如下:

$$\bar{H}_{\text{sat}}(\rho) = \begin{cases} 1 & (\rho > 1), \\ \rho & (-1 \leq \rho \leq 1), \\ -1 & (\rho < -1). \end{cases} \quad (6)$$

为了保证一个车辆群的存在性, 假设头车的速度 v_0 小于所有跟随车辆的最大速度 v_i^{max} , 即

$$v_0 < v_i^{\text{max}} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

为了避免碰撞和倒退, 所有的车辆采用全速制动形式. 如果

$$py_i(n) + (1-p)y_{i-1}(n) < y_i^{\text{min}}, \quad (8)$$

那么

$$\begin{aligned} x_i(n+1) &= x_i(n), \\ v_i(n+1) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

这里 y_i^{min} 是第 i 辆车与前车之间的最小车头间距. 全速制动意指当车头间距满足 (8) 式时第 i 辆车突然停止运行.

2.2. 稳定性分析

为了简单起见, 我们把跟驰模型看作一个简单的系统. 如果头车以恒定速度 v_0 运行, 第 i 辆跟随车的动力学方程如下:

$$v_i(n+1) = \alpha_i [V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - v_i(n)]T + v_i(n), \quad (10)$$

$$y_i(n+1) = v_0 T - v_i(n)T + y_i(n). \quad (11)$$

系统 (10), (11) 的稳定状态是

$$\begin{aligned} [v_i^*, y_i^*]^T &= \left[v_0, \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{i-1} \left(y_1 - \frac{v_0}{r_i} + \frac{\zeta_i}{2} - \eta_i \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0}{r_i} - \frac{\zeta_i}{2} + \eta_i \right]^T, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$r_i = v_i^{\text{max}} / \zeta_i.$$

显然, 稳定状态存在的一个必要条件是 $v_0 < v_i^{\text{max}}$. 下面我们考虑稳定状态 (12) 式附近的一个扰动模型^[8]

$$\delta v_i(n+1) = \alpha_i [\delta V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - \delta v_i(n)]T + \delta v_i(n), \quad (13)$$

$$\delta y_i(n+1) = -\delta v_i(n)T + \delta y_i(n), \quad (14)$$

即

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta v_i(n+1) \\ \delta y_i(n+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i T & p\alpha_i r_i T \\ -T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 & (1-p)\alpha_i r_i T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{i-1}(n) \\ \delta y_{i-1}(n) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\delta v_i(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix}. \quad (15)$$

这里

$$\delta y_i(n) = y_i(n) - y_i^*,$$

$$\delta v_i(n) = v_i(n) - v_i^*,$$

$$\delta y_{i-1}(n) = y_{i-1}(n) - y_{i-1}^*.$$

稳定状态(12)式的稳定性只依赖于系统中矩阵方程(15)的系数矩阵,该系数矩阵的特征多项式为

$$P_i(z) = z^2 + a_i z + b_i,$$

其中

$$a_i = \alpha_i T - 2,$$

$$b_i = 1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2.$$

从 $[\delta v_{i-1}(n), \delta y_{i-1}(n)]^T$ 到 $\delta v_i(n)$ 的转移函数为

$$\begin{aligned} \tilde{G}_i(z) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z-1 + \alpha_i T & -p\alpha_i r_i T \\ -T & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 & (1-p)\alpha_i r_i T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(1-p)(z-1)\alpha_i r_i T}{P_i(z)}. \end{aligned}$$

下面给出系统(15)在小扰动下保持稳定的一个充要条件.

引理 1 当系数矩阵的特征方程 $P_i(z) = 0$ 的所有根都在单位圆内且 $\max_{|z|=1} |\tilde{G}_i(z)| \leq 1 (i = 1, 2, \dots, N)$ 时,系统(15)是稳定的.

引理 1 的证明见附录 A.

由引理 1 可得如下参数范围:

$$\begin{aligned} 0 < r_i < \frac{1}{pT}, \\ 0 < \alpha_i < \frac{4}{2T - pr_i T^2} \end{aligned} \quad (16)$$

或

$$\begin{aligned} 0 < r_i &\leq \min \left\{ \frac{1}{pT}, \frac{4 - 2\alpha_i T}{\alpha_i T [2(1-p) - pT]} \right\}, \\ 0 < \alpha_i &< \frac{4}{2T - pr_i T^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

当第 $i-1$ 辆车以恒定速度 v_0 运行时,满足条件

(16)或(17)式的第 i 辆车能够以恒定的速度 v_0 运行.

2.3. 无拥堵条件

当第 $i-1$ 辆车不是以恒定速度 v_0 运行时,跟随车辆的运动学方程如下:

$$\begin{aligned} v_i(n+1) &= \alpha_i [V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - v_i(n)] T \\ &\quad + v_i(n), \end{aligned} \quad (18)$$

$$y_i(n+1) = v_{i-1} T - v_i(n) T + y_i(n), \quad (19)$$

此时稳定状态(12)式附近的一个扰动模型为

$$\begin{aligned} \delta v_i(n+1) &= \alpha_i [\delta V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - \delta v_i(n)] T \\ &\quad + \delta v_i(n), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\delta y_i(n+1) = \delta v_{i-1}(n) T - \delta v_i(n) T + \delta y_i(n). \quad (21)$$

即

$$\begin{bmatrix} \delta v_i(n+1) \\ \delta y_i(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \alpha_i T & p\alpha_i r_i T \\ -T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & (1-p)\alpha_i r_i T \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{i-1}(n) \\ \delta y_{i-1}(n) \end{bmatrix},$$

$$\delta v_i(n) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

从 $[\delta v_{i-1}(n), \delta y_{i-1}(n)]^T$ 到 $\delta v_i(n)$ 的转移函数为

$$\begin{aligned} G_i(z) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z-1 + \alpha_i T & -p\alpha_i r_i T \\ T & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} 0 & (1-p)\alpha_i r_i T \\ T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(p\alpha_i r_i T^2 (z-1) (1-p)\alpha_i r_i T)}{(z-1)(z-1 + \alpha_i T) + p\alpha_i r_i T^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

根据引理 1,可以得到在无拥堵条件下模型中参数 r_i 的范围. 当

$$1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 > 0$$

时,有

$$\max \left\{ 0, \frac{\alpha_i T - 1}{p\alpha_i T^2} \right\} < r_i \leq \min \left\{ \frac{-p(1 + \alpha_i T) + \sqrt{p^2(1 + \alpha_i T)^2 + (1-p)^2 \alpha_i^2}}{(1-p)^2 \alpha_i}, \frac{1}{pT} \right\}. \quad (24)$$

当

$$1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 < 0$$

时,有

$$0 < r_i \leq \min \left\{ \frac{\alpha_i T - 1}{p\alpha_i T^2}, \frac{pT(1 - \alpha_i T) + \sqrt{p^2 T^2 (1 - \alpha_i T)^2 + (1-p)^2 (\alpha_i T - 2)^2}}{(1-p)^2 \alpha_i T}, \frac{1}{pT} \right\}. \quad (25)$$

上述参数 r_i 取值范围的证明见附录 B.

3. 反馈控制

我们在本文的 CM 车辆跟驰模型中加入经典的反馈控制项^[9], 即控制信号项 $u_i(n)$.

$$u_i(n) = k(v_{i-1}(n) - v_i(n)), \quad (26)$$

其中 $k > 0$ 是反馈增益, 下面确定其取值范围.

将控制信号项加入交通系统 (18), (19) 中, 得到

$$v_i(n+1) = \alpha_i [V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - v_i(n)] T + v_i(n) + u_i(n), \quad (27)$$

$$y_i(n+1) = v_{i-1}T - v_i(n)T + y_i(n). \quad (28)$$

控制信号项 $u_i(n)$ 考虑了第 $i-1$ 辆车和第 i 辆车之间的速度差效应. 该控制信号项在交通系统不稳定时将发挥作用, 而在稳定的交通系统中将不起作用.

在稳定状态附近, 受控系统 (27), (28) 的扰动模型描述如下:

$$\delta v_i(n+1) = \alpha_i [\delta V_i^{\text{op}}(y_i(n), y_{i-1}(n)) - \delta v_i(n)] T + \delta v_i(n) + \delta u_i(n), \quad (29)$$

$$\delta y_i(n+1) = \delta v_{i-1}(n)T - \delta v_i(n)T + \delta y_i(n), \quad (30)$$

即

$$\begin{bmatrix} \delta v_i(n+1) \\ \delta y_i(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k-\alpha_i T & p\alpha_i r_i T \\ -T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & (1-p)\alpha_i r_i T \\ T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_{i-1}(n) \\ \delta y_{i-1}(n) \end{bmatrix},$$

$$\max \left\{ p\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T, \frac{2pr_i T - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 + (1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3}{2} \right\} < k \leq 1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2. \quad (33)$$

情形 II 如果

$$2 < p\alpha_i r_i T^2 < 4,$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3 + 2pr_i T - 4 + \alpha_i T < 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$\max \left\{ p\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T, \frac{2pr_i T - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 + (1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3}{2} \right\} < k \leq \frac{1}{2}(p\alpha_i r_i T^2 - 2\alpha_i T + 4). \quad (34)$$

情形 III 如果

$$p\alpha_i r_i T^2 = 2,$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3 + 2pr_i T - 2 + \alpha_i^2 T - p\alpha_i^2 r_i T^2 < 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$\max \left\{ p\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i T, \frac{2pr_i T - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 + (1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3}{2} \right\} < k < 3 - \alpha_i T. \quad (35)$$

$$\delta v_i(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta v_i(n) \\ \delta y_i(n) \end{bmatrix}. \quad (31)$$

从 $[\delta v_{i-1}(n), \delta y_{i-1}(n)]^T$ 到 $\delta v_i(n)$ 的转移函数为

$$\begin{aligned} \bar{G}_i(z) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z-1+k+\alpha_i T & -p\alpha_i r_i T \\ T & z-1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} k & (1-p)\alpha_i r_i T \\ T & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{((z-1)k + p\alpha_i r_i T^2 \quad (z-1)(1-p)\alpha_i r_i T^2)}{\bar{P}_i(z)} \end{aligned} \quad (32)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{P}_i(z) &= z^2 + \bar{a}_i z + \bar{b}_i, \\ \bar{a}_i &= \alpha_i T + k - 2, \\ \bar{b}_i &= 1 - \alpha_i T - k + p\alpha_i r_i T^2. \end{aligned}$$

为了能够抑制交通拥堵, CM 车辆跟驰模型中反馈增益 k 需满足如下两个条件: (i) 当系数矩阵的特征方程 $\bar{P}_i(z) = 0$ 的所有根都在单位圆内且是稳定的; (ii) $\max_{|z|=1} |\bar{G}_i(z)| \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, N$).

定理 1 当反馈增益 k 满足以下七种情形时, 受控系统 (27), (28) 描述的交通系统不会出现交通拥堵.

情形 I 如果

$$0 < p\alpha_i r_i T^2 < 2,$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i r_i^2 T^3 + 2pr_i T - 2 + \alpha_i T - p\alpha_i r_i T^2 < 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

情形IV 如果

$$\begin{aligned} 0 < p\alpha_i r_i T^2 < 2, \\ \alpha_i T - 2 > 0, \end{aligned}$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4 + \alpha_i^2 T^2 - 4\alpha_i T + 4 < 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$\begin{aligned} \max \left\{ 1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2, \frac{1}{2(\alpha_i T - 2)}(-4 + 4\alpha_i T - 2p\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i^2 T^2 + p\alpha_i^2 r_i T^3 + (1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4) \right\} \\ \leq k < \frac{1}{2}(p\alpha_i r_i T^2 - 2\alpha_i T + 4). \end{aligned} \quad (36)$$

情形V 如果

$$\begin{aligned} 0 < p\alpha_i r_i T^2 < 2, \\ \alpha_i T - 2 < 0, \end{aligned}$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4 + 2p\alpha_i r_i T^2 - p\alpha_i^2 r_i T^3 + \alpha_i^2 T^2 - 2\alpha_i T \leq 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 \leq k < \min \left\{ \frac{1}{2}(p\alpha_i r_i T^2 - 2\alpha_i T + 4), \frac{-4 + 4\alpha_i T - 2p\alpha_i r_i T^2 - \alpha_i^2 T^2 + p\alpha_i^2 r_i T^3 + (1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4}{2(\alpha_i T - 2)} \right\}. \quad (37)$$

情形VI 如果

$$\begin{aligned} 0 < p\alpha_i r_i T^2 < 2, \\ \alpha_i T = 2, \end{aligned}$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4 - 2p\alpha_i r_i T^2 + p\alpha_i^2 r_i T^3 - \alpha_i^2 T^2 + 3\alpha_i T - 2 \leq 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 \leq k < \frac{1}{2}(p\alpha_i r_i T^2 - 2\alpha_i T + 4). \quad (38)$$

情形VII 如果

$$0 < p\alpha_i r_i T^2 < 2,$$

且

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^4 + 2p\alpha_i r_i T^2 - p\alpha_i^2 r_i T^3 + \alpha_i^2 T^2 - 2\alpha_i T \leq 0,$$

那么反馈增益 k 可设置为

$$k = 1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2. \quad (39)$$

定理1 可以通过设置反馈增益 k 来抑制本文模型所描述的交通拥堵现象. 与 Konishi 等^[8]提出的控制方法相比, 此控制方法具有更简单的形式, 只需要设置一个反馈增益 k 并且 k 可以在一定的范围内取值, 选择范围得到扩大.

4. 数值模拟

在接近开放的边界条件下对本文的 CM 车辆跟

驰模型进行数值模拟, 模拟中参量的取值为^[8] $\eta = 25.0$ m, $\zeta = 23.3$ m, $v^{\max} = 33.6$ m/s, $\alpha = 2.0$ s⁻¹, $T = 0.1$ s, $v_0 = 20$ m/s, $y^{\min} = 7.02$ m, $r \approx 1.44$ s⁻¹, $N = 100$.

另外, 从实际交通出发, OV 函数中对 $y_i(n)$ 的依赖性比对 $y_{i-1}(n)$ 的依赖性更强, 所以, 我们认为 OV 函数中权重 p 应该大于 0.5, 在此取 $p = 0.8$. 假设所有的车辆具有相同的参数, 初始位置和速度设置如下:

$$\begin{aligned} x_i(0) &= \sum_{j=i+1}^N y_j^*, \\ y_j(0) &= y_j^*, \\ v_i(0) &= v_i^*, \end{aligned} \quad (40)$$

其中 $i = 1, 2, \dots, N$. 由于在稳定状态下所有的车辆都以恒速 v_0 运行, 所以 $y_1(n)$ 也为常数. 为简单起见, 我们取 $y_1(n)$ 的值为文献[8]中稳定状态下 y_i^* 的值, 从而得到

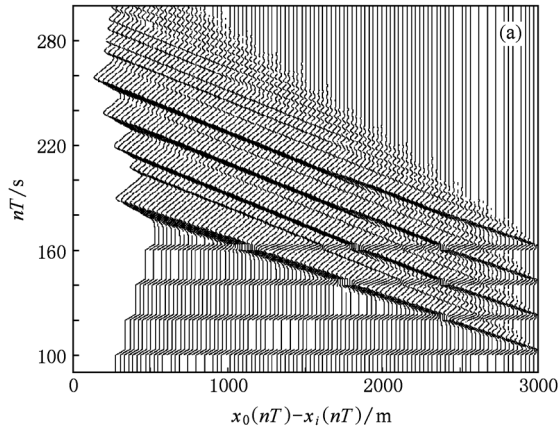
$$\begin{aligned} y_i^* &= \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{i-1} \left(y_1 - \frac{v_0}{r_i} + \frac{\zeta_i}{2} - \eta_i\right) \\ &\quad + \frac{v_0}{r_i} - \frac{\zeta_i}{2} + \eta_i \\ &= \frac{v_0}{r_i} - \frac{\zeta_i}{2} + \eta_i. \end{aligned}$$

此时与文献[8]中的稳定状态一致.

下面考虑在 $nT = 100-103$ s, $120-123$ s, $140-$

143 s, 160—163 s 时间段, 头车突然停止运动^[8] (即 $v_0(n) = 0$) 对交通系统产生的影响.

图 1(a) 和图 2(a) 分别显示了在不同 OV 函数下 CM 跟驰模型描述的车辆时空斑图. 比较图 1(a)



和图 2(a) 可以看出, 在本文的模型中, 交通拥堵的严重程度相对较小, 由外部引起的扰动向后传播, 并且交通系统能够在较短的时间内恢复到无拥堵状态.

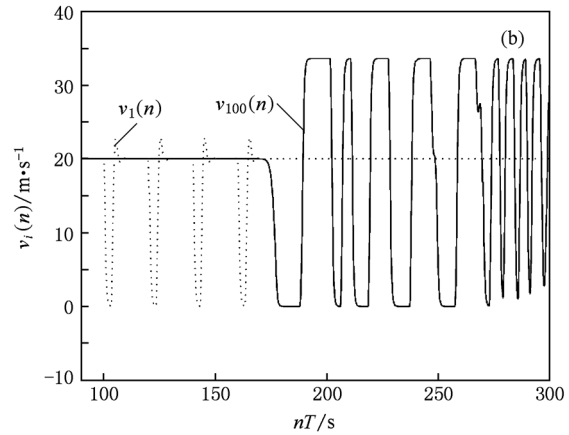


图 1 头车在 $nT = 100—103$ s, $120—123$ s, $140—143$ s, $160—163$ s 四个时间段停止运行, 文献[8]提出的 CM 无控制交通模型的数值模拟结果 (a) 时空斑图, (b) 第 1 辆车和第 100 辆车的瞬时速度

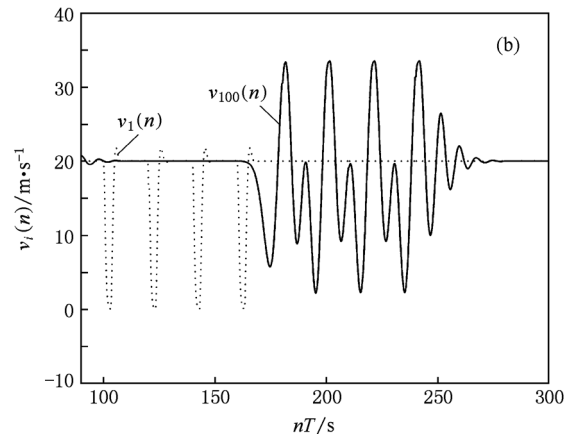
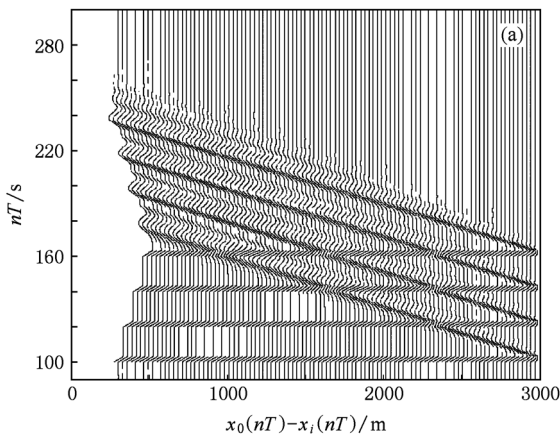


图 2 头车在 $nT = 100—103$ s, $120—123$ s, $140—143$ s, $160—163$ s 四个时间段停止运行, 本文的 CM 无控制交通模型的数值模拟结果 (a) 时空斑图, (b) 第 1 辆车和第 100 辆车的瞬时速度

图 1(b) 和图 2(b) 分别显示了在不同 OV 函数下 CM 跟驰模型描述的第 1 辆车和第 100 辆车的瞬时速度. 从图 1(b) 与图 2(b) 可以看出: 在本文模型中, 第 100 辆车没有发生停滞情形, 而在原模型中, 第 100 辆车发生了时走时停的状况.

下面给出模型中反馈增益 k 的取值范围. 通过计算可知, 上述模拟中的参量取值 (除 $N = 100$ 外) 能满足情形 I、情形 VI 和情形 VII. 把这些参量值代入 (33) 式, 得到 $0.0267 < k < 0.8230$; 把这些参量值代入 (38) 式, 得到 $0.8230 \leq k < 0.9127$; 把这些参量值代入 (39) 式, 得到 $k = 0.8230$. 当 $p = 0.8$ 时, 反馈增益 k 的取值范围为 $0.0267 < k < 0.9127$.

为了简单起见, 模拟时取 $k = 0.86$, 这与 TVD 跟驰模型^[5] 中参量的取值相同.

图 2—图 4 分别描述了本文模型在没有考虑控制项的 CM 模型、Konishi 等^[8] 加入了控制项的 CM 模型和本文中加控制项的 CM 模型三种不同情形下交通流的时空斑图以及第 1 辆和第 100 辆的瞬时速度. 通过比较发现: 反馈控制项有明显缓解交通拥堵的效应. 对于突发情形, 新的 OV 函数所描述的交通流更加平缓.

接下来, 当头车在 $nT = 100—102$ s 时间段内停止运行, 观察第 1 辆、第 25 辆和第 50 辆车的行为.

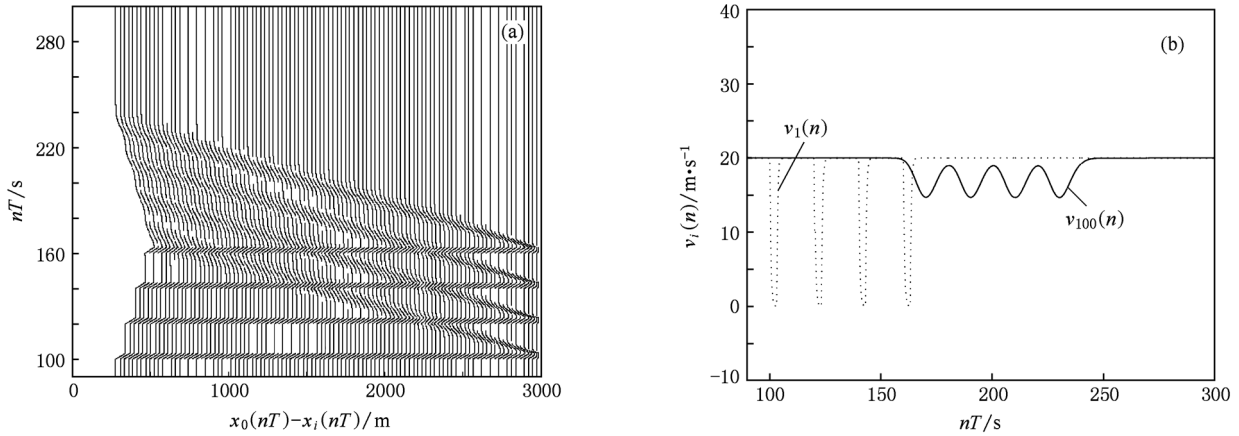


图3 头车在 $nT = 100-103$ s, $120-123$ s, $140-143$ s, $160-163$ s 四个时间段停止运行,文献[8]提出的加控制项 CM 交通模型的数值模拟结果 (a)时空斑图,(b)第1辆车和第100辆车的瞬时速度

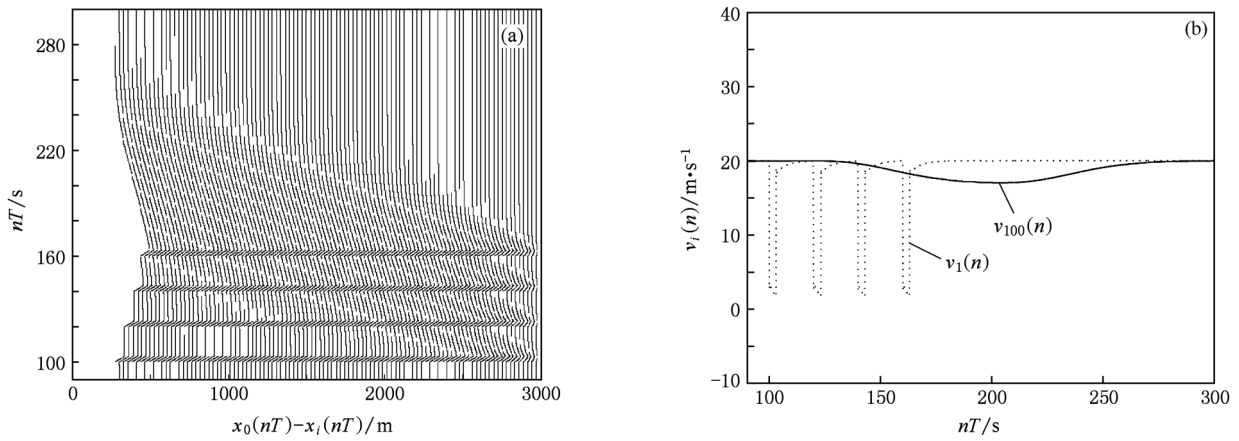


图4 头车在 $nT = 100-103$ s, $120-123$ s, $140-143$ s, $160-163$ s 四个时间段停止运行,本文的加控制项 CM 交通模型的数值模拟结果 (a)时空斑图,(b)第1辆车和第100辆车的瞬时速度

图5(a)和图6(a)分别显示了在不同 OV 函数下模型模拟得到的时空斑图. 图5(b)和图6(b)显示了相应于图5(a)和图6(a)的3辆车的瞬时速度.

度. 比较图5和图6可以看出,在本文模型中,车辆能够在较短的时间段内重新达到平稳运动状态,并且车辆的瞬时速度的扰动幅度也较小.

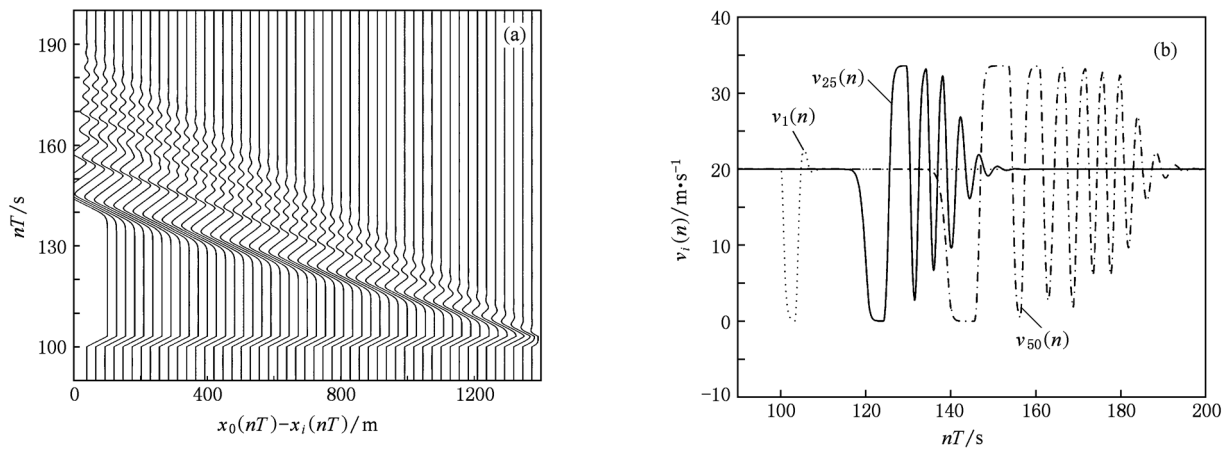


图5 头车在 $nT = 100-102$ s 时间段停止运行,文献[8]提出的 CM 无控制交通模型的数值模拟结果 (a)时空斑图,(b)第1辆车、第25辆车和第50辆车的瞬时速度

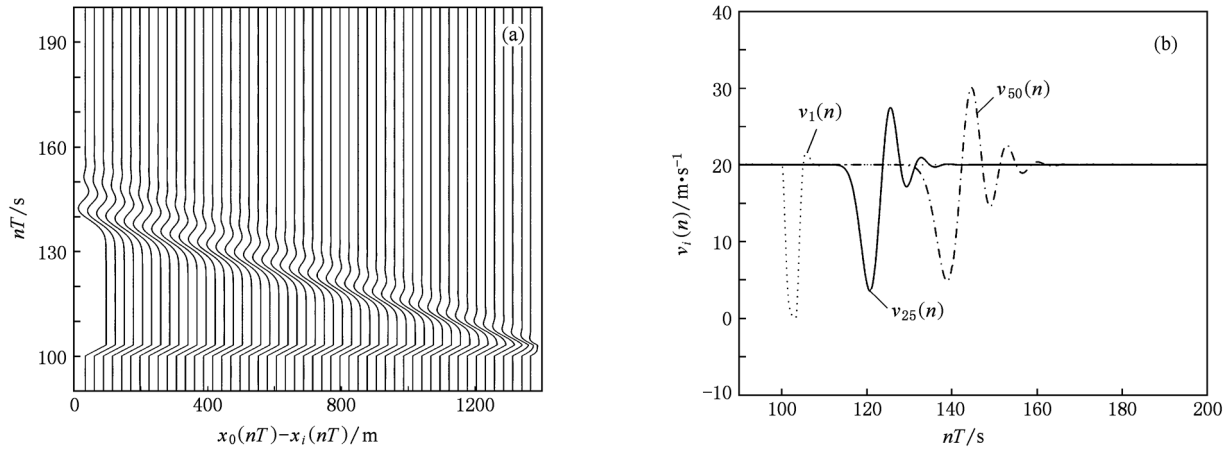


图6 头车在 $nT = 100—102$ s 时间段停止运行, 本文的 CM 无控制交通模型的数值模拟结果 (a) 时空斑图, (b) 第 1 辆车、第 25 辆车和第 50 辆车的瞬时速度

图 7 和图 8 是相应于图 5 和图 6 在加入控制项后的模拟结果。

从图 1—图 8 的比较分析可知, 本文提出的模型所描述的交通拥堵状况得到了有效抑制。

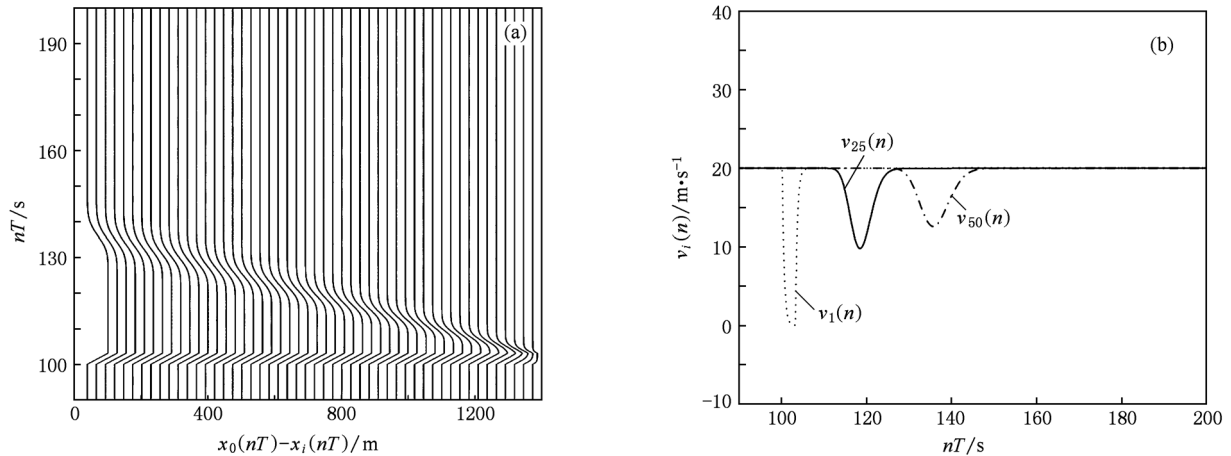


图7 头车在 $nT = 100—102$ s 时间段停止运行, 文献[8]提出的加控制项 CM 交通模型的数值模拟结果 (a) 时空斑图, (b) 第 1 辆车、第 25 辆车和第 50 辆车的瞬时速度

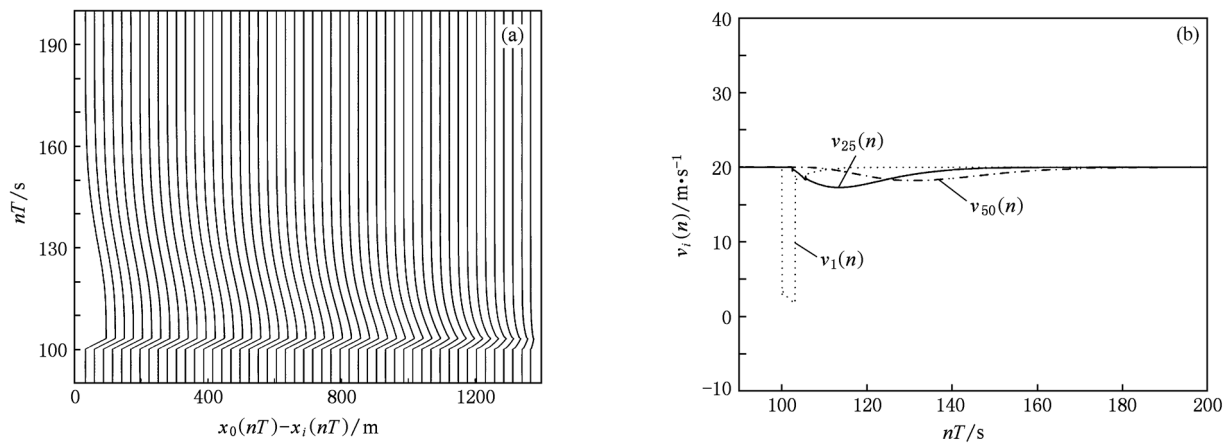


图8 头车在 $nT = 100—102$ s 时间段停止运行, 本文的加控制项 CM 交通模型的数值模拟结果 (a) 时空斑图, (b) 第 1 辆车、第 25 辆车和第 50 辆车的瞬时速度

5. 结 论

本文对传统的 CM 跟驰模型进行了修正,给出了一个新的非线性 OV 函数,考虑了当前车及前方两辆近邻车相互之间的车头间距. 对修正的模型进行了反馈控制分析,研究新模型下的交通流演化状况,并与文献[8]给出的模型进行了比较.

理论分析和数值模拟结果表明:本文修正的 CM 跟驰模型描述的交通流稳定性比原有模型要好,车辆运行时更加平稳;通过适当选取权重 p 的值和设置反馈增益 k 的值,可更好地抑制交通拥堵现象的发生. 数值模拟结果和理论分析结果相一致.

附录 A 引理 1 的证明

根据控制理论,引理 1 的条件——系数矩阵的特征方程 $P_i(z) = 0$ 的所有根都在单位圆内等价于 $|b_i| < 1, |a_i| < 1 + b_i$, 由此可得 $0 < r_i < 1/(pT), \alpha_i < 4/(2T - pr_i T^2)$.

转移函数

$$\begin{aligned} | \tilde{G}_i(z) | &= \sqrt{\tilde{G}_i(z) \tilde{G}_i(\bar{z})} \\ &= \sqrt{\frac{(1-p)^2(z-1)\alpha_i^2 r_i^2 T^2 (\bar{z}-1)}{P_i(z)P_i(\bar{z})}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^2 (2-2\cos\theta)}{4b_i \cos^2\theta + 2a_i(1+b_i)\cos\theta + a_i^2 + (b_i-1)^2}}. \end{aligned}$$

令

$$\frac{\partial | \tilde{G}_i(z) |}{\partial \theta} = 0,$$

得 $\theta = 0, \pi, 2\pi$, 只需满足 $\tilde{G}_i(1) \leq 1 (\theta = 0, 2\pi), \tilde{G}_i(-1) \leq 1 (\theta = \pi)$, 即可得条件(16), (17)式.

附录 B 无拥堵条件下模型中参数 r_i 取值范围的证明

使 $\max_{|z|=1} |G_i(z)| \leq 1$, 得

$$(1 - \cos\theta) [2(1 - \cos\theta) - 2(1 - \cos\theta)\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - 2\cos\theta \cdot p\alpha_i r_i T^2 - 2p\alpha_i^2 r_i T^3 - (1-p)^2 \alpha_i^2 r^2 T^2] \geq 0.$$

因为 $\forall \theta \in [0, 2\pi], 1 - \cos\theta \geq 0$ 成立. 因此, 上述不等式等价于

$$(-2 + 2\alpha_i T - 2p\alpha_i r_i T^2) \cos\theta + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - 2p\alpha_i^2 r_i T^3 - (1-p)^2 \alpha_i^2 r^2 T^2 \geq 0.$$

令

$$\begin{aligned} g_i(\theta) &= (-2 + 2\alpha_i T - 2p\alpha_i r_i T^2) \cos\theta + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 \\ &\quad - 2p\alpha_i^2 r_i T^3 - (1-p)^2 \alpha_i^2 r^2 T^2. \end{aligned}$$

当 $1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 > 0$ 时, $g_i(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 或者 $\theta = 2\pi$ 时取得最小值. 因此, 要使 $g_i(\theta) \geq 0$ 对 $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ 成立, 只需 $g_i(0) = g_i(2\pi) \geq 0$, 即

$$\begin{aligned} &-2(1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2) + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - 2p\alpha_i^2 r_i T^3 \\ &- (1-p)^2 \alpha_i^2 r^2 T^2 \geq 0. \end{aligned}$$

化简后得

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 T^2 r_i^2 + 2p\alpha_i T^2 (1 + \alpha_i T) r_i - \alpha_i^2 T^2 \leq 0.$$

当 $1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2 < 0$ 时, $g_i(\theta)$ 在 $\theta = \pi$ 时取得最小值. 因此, 要使 $g_i(\theta) \geq 0$ 对 $\forall \theta \in [0, 2\pi]$ 成立, 只需 $g_i(\pi) \geq 0$, 即

$$\begin{aligned} &2(1 - \alpha_i T + p\alpha_i r_i T^2) + 2 - 2\alpha_i T + \alpha_i^2 T^2 - 2p\alpha_i^2 r_i T^3 \\ &- (1-p)^2 \alpha_i^2 r_i^2 T^2 \geq 0. \end{aligned}$$

化简后得

$$(1-p)^2 \alpha_i^2 T^2 r_i^2 + 2p\alpha_i T^2 (\alpha_i T - 1) r_i - 4 + 4\alpha_i T - \alpha_i^2 T^2 \leq 0.$$

综上可得文中给出的参数 r_i 范围.

- | | |
|--|---|
| [1] Newell G F 1961 <i>Oper. Res.</i> 9 209 | <i>Soc. Jpn.</i> 67 2270 |
| [2] Bando M, Hasebe K, Nakayama A, Shibata A, Sugiyama Y 1995 <i>Phys. Rev. E</i> 51 1035 | [8] Konishi K, Kokame H, Hirata K 1999 <i>Phys. Rev. E</i> 60 4000 |
| [3] Tang T Q, Huang H J, Shang H Y 2010 <i>Chin. Phys. B</i> 19 050517 | [9] Zhao X M, Gao Z Y 2006 <i>Physica A</i> 366 513 |
| [4] Peng G H 2010 <i>Chin. Phys. B</i> 19 056401 | [10] Han X L, Jiang C Y, Ge H X, Dai S Q 2007 <i>Acta Phys. Sin.</i> 56 4383 (in Chinese) [韩祥临、姜长元、葛红霞、戴世强 2007 物理学报 56 4383] |
| [5] Ge H X, Cheng R J, Li Z P 2008 <i>Physica A</i> 387 5239 | [11] Shen F Y, Ge H X, Zhang H, Yu H M, Lei L 2009 <i>Chin. Phys. B</i> 18 4208 |
| [6] Yukawa S, Kikuchi M 1995 <i>J. Phys. Soc. Jpn.</i> 64 35 | |
| [7] Tadaki S, Kikuchi M, Sugiyama Y, Yukawa S 1998 <i>J. Phys.</i> | |

Considering two-velocity difference effect for coupled map car-following model^{*}

Ge Hong-Xia¹⁾ Cheng Rong-Jun²⁾ Li Zhi-Peng^{3)†}

1) (Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

2) (Department of Fundamental Course, Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China)

3) (College of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China)

(Received 23 June 2010; revised manuscript received 14 February 2011)

Abstract

Based on the pioneer work of Konishi et al, a new coupled map car-following model is presented by considering the headway distance of two successive vehicles in front. The feedback control method presented by Zhao-Gao is utilized to suppress the traffic congestion in the coupled map car-following model. According to the control theory, the condition under which the traffic jam can be suppressed is analyzed. The results are compared with that presented by Konishi et al. The simulation results show that the new model with the feedback control method presented by Zhao-Gao could suppress the traffic jam effectively.

Keywords: traffic flow, coupled map car-following model, optimal velocity function, delayed feedback control

PACS: 05.50.+q

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11072117, 10802042, 60904068), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6100023), the Natural Science Foundation of Ningbo, China (Grant No. 2009B21003) and the K. C. Wong Magna Foundation of Ningbo University, China.

[†] Corresponding author. E-mail: lizhipeng@tongji.edu.cn