

热声网络的辛对称特征^{*}

杨志春¹⁾²⁾ 吴 锋^{1)2)†} 郭方中³⁾ 张春萍³⁾

1) (海军工程大学研究生院, 武汉 430033)

2) (武汉工程大学理学院, 武汉 430073)

3) (华中科技大学能源与动力工程学院, 武汉 430074)

(2010 年 9 月 27 日收到; 2011 年 3 月 15 日收到修改稿)

将辛数学引入热声系统网络模型的处理, 通过对热声系统网络传输矩阵的分析, 证明系统中等温流体管道内工质运动的传输矩阵为辛矩阵. 存在温度梯度的热声回热器中气体工质微团的传输矩阵不是辛矩阵, 但是可以通过变量代换将传输矩阵转换为辛矩阵, 使整个热声系统网络传输都可用辛矩阵传输来表示. 辛对称的形式有助于热声系统网络模型的分析与计算.

关键词: 辛, 热声, 网络模型, 传输矩阵

PACS: 43. 35. Ud, 43. 20. + g, 44. 30. + v

1. 引言

热声热机是基于热声效应工作的新型热力机械, 其最突出的优点是无运动部件或运动部件很少以及具有环境友好的特性. 自热声现象被发现以来, 许多研究者对热声理论进行了深入研究^[1-10]. 但是, 理论的发展相对于热声系统实际装置的发展还显得远远不够. 20 世纪 80 年代末, 郭方中等^[11-14]将热声理论与流体网络理论^[15]相结合, 建立起适合工程应用的热声网络理论, 提出了用系统论方法探求在热力学分析中引入时间变量的思路^[16, 17].

Weyl^[18]在 1939 年研究分析力学正则方程时提出了辛对称的概念, 此后冯康等^[19]基于 Hamilton 力学基本原理, 提出了 Hamilton 方程的辛格式和算法. 钟万勰等^[20-23]为普及辛数学做了大量的工作, 将辛体系从应用力学拓展到了电磁学^[24-26], 杨红卫等在此基础上通过正则变换给出辛结构中力学、热力学和电磁学公式的相似性^[27], 并推导出电容电路的辛传递矩阵解法^[28]. 梁昌洪^[29]将辛对称与电路、网络结合在一起. 侯国林等^[30]基于辛体系对电磁材料进行了分析. 曹禹等^[31]在进行数值模拟时使用 Hamilton 系统方法来描述声波和弹性波的传播. 罗

香怡等^[32]采用辛算法数值求解一维立方非线性 Schrödinger 方程, 推动了非线性动力学行为的研究. 张春丽等^[33, 34]将辛算法应用于双色激光场的分析求解. 王洪吉^[35, 36]则将辛几何方法应用于矩阵光学之中.

工质在热声热机回热器孔隙中的纵向流动, 由于具有横向热交换的调制, 形成了流放大作用, 因而可作为有源系统, 热声热机其他部分则可看作等温流体管路. 热声网络模型是参照电路、弹性体网络和流体网络而建立的^[11]. 采用辛对称特性的相关理论, 本文对热声网络传输矩阵的辛对称特性进行了分析推导, 为复杂热声网络的分析计算探索了新思路.

2. 热声系统网络模型

最简单的热声系统如图 1 所示. 图 1 中的回热器是热声系统的核心部件, 当系统为热声发动机时, 热端换热器输入热量, 冷端换热器通过换热保持室温, 即可在回热器两端形成温差, 通过热声效应在系统内激起声振, 这是一个热能转换成机械能的过程; 当系统为热声制冷机时, 热端换热器保持室温, 激振源在谐振管中产生声波, 通过热声效应将冷端的热量泵到热端, 使得冷端温度降低, 对外

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 50676068) 和湖北省教育厅科研计划重点项目 (批准号: D200615002) 资助的课题.

[†] 通讯联系人. E-mail: ajlsyx0201@126.com

界制冷.

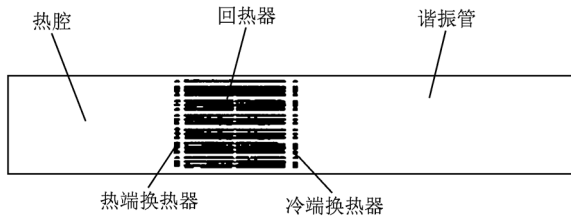


图1 热声系统结构示意图

在线性平面波前提下,热声系统非等温可压缩流体 Euler 坐标系下线性化流体运动的基本方程如下^[11]:动量方程为

$$i\omega\rho_m u = -\frac{dP}{dx} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \quad (1)$$

能量方程为

$$\begin{aligned} \rho_m c_p \left(i\omega T + u \frac{dT_m}{dx} \right) - i\omega P \\ = \kappa \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

连续性方程为

$$i\omega\langle\rho\rangle + \frac{d}{dx}(\rho_m\langle u\rangle) = 0, \quad (3)$$

其中

$$\langle\rho\rangle = -\frac{\rho_m}{T_m}\langle T\rangle + \frac{\rho_m}{P_m}P. \quad (4)$$

系统边界条件为在固体表面上速度为零,即

$$u(y=0, z=0) = 0. \quad (5)$$

这里 P, T, u 和 ρ 分别是一阶振荡时流体压力、温度、速度和密度; ω, μ, c_p 和 κ 分别是角频率、动力黏性系数、比定压热容和导热系数;下标 m 表示系统平均, $\langle\cdot\rangle$ 表示截面平均.

由(1)–(5)式可得流体的网络传输方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -ZJ, \\ \frac{\partial J}{\partial x} &= -YP + \alpha J. \end{aligned} \quad (6)$$

这里 J 是流体工质体积流率; Z 是流体单位长度的串联阻抗,

$$Z = \frac{i\omega\rho_m}{A_f(1-f_v)};$$

Y 是单位长度的并联导纳,

$$Y = \frac{i\omega A_f}{\gamma P_m} [1 + (\gamma - 1)f_\kappa];$$

α 是流控源参数,

$$\alpha = \frac{(f_\kappa - f_v)}{(1 - f_v)(1 - \sigma)} \frac{1}{T_m} \frac{dT_m}{dx},$$

其中 f_v 和 f_κ 分别是取决于热声系统填料结构和流体介质热物理性质的截面平均黏性分布函数和截面平均导热分布函数.

3. 热声系统网络模型的传输矩阵分析

(6)式是对热声效应分析的最基本公式,可广泛应用于各种热声系统,用图2所示的“ Π ”型四端网络可描述长度为 δx 的热声系统.

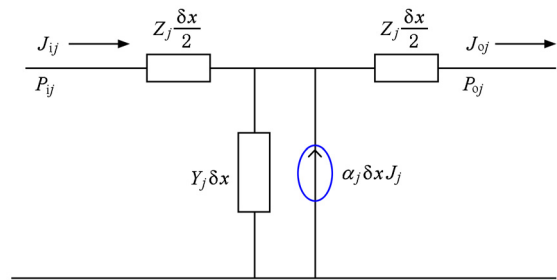


图2 热声系统的有源网络

热声系统的有源网络对应的传输网络方程可用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} P_{ij} \\ J_{ij} \end{bmatrix} = A_j \begin{bmatrix} P_{oj} \\ J_{oj} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

式中 P_{ij} 和 P_{oj} 为第 j 个位置流体的入口和出口压力, J_{ij} 和 J_{oj} 为第 j 个位置流体的入口和出口体积流率.

根据图2及(6)式可知

$$\begin{aligned} P_{ij} &= \frac{Z}{2} J_{ij} + \frac{(1 + \alpha) J_{ij} - J_{oj}}{Y}, \\ P_{oj} &= P_{ij} - \frac{Z}{2} J_{ij} - \frac{Z}{2} J_{oj}. \end{aligned} \quad (8)$$

由(8)式可知,(7)式中的传输矩阵 A_j 可表示为

$$A_j = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY\delta x^2}{2(1 + \alpha\delta x)} & \frac{Z\delta x(4 + 2\alpha\delta x + ZY\delta x^2)}{4(1 + \alpha\delta x)} \\ \frac{Y\delta x}{1 + \alpha\delta x} & \frac{2 + ZY\delta x^2}{2(1 + \alpha\delta x)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

用向量表示为

$$\mathbf{v}_{ij} = A_j \mathbf{v}_{oj}, \quad (10)$$

式中

$$\mathbf{v}_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ij} \\ J_{ij} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_{oj} = \begin{bmatrix} P_{oj} \\ J_{oj} \end{bmatrix}.$$

对于等温管路, 有 $dT_m/dx = 0$, 故 $\alpha = 0$. 此时网络由“ Π ”型变为“ T ”型, (6) 式变为下列对偶方程组:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -ZJ, \\ \frac{\partial J}{\partial x} &= -YP. \end{aligned} \quad (11)$$

同时, 传输矩阵(9)式成为

$$\mathbf{A}_j^0 = \begin{bmatrix} 1 + \frac{ZY\delta x^2}{2} & \frac{4Z\delta x + Z^2Y\delta x^3}{4} \\ Y\delta x & 1 + \frac{ZY\delta x^2}{2} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

因而

$$\mathbf{A}_j^{0T} \mathbf{J} \mathbf{A}_j^0 = \mathbf{J}, \quad (13)$$

其中 $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 称为 $\mathbf{J}$ 矩阵^[18–22], 所以 $\mathbf{A}_j^0$ 是辛

矩阵, 即 $\mathbf{A}_j^0$ 保辛. 由此可知, 等温流体网络的传输矩阵对应正则变换. 在热声系统中, 谐振管、冷热端换热器和谐振腔都属于等温流体网络, 因此其传输矩阵属于辛群.

热声系统中, 回热器的管段为非等温部件, 由于源 $\alpha \neq 0$, $\mathbf{A}_j^T \mathbf{J} \mathbf{A}_j \neq \mathbf{J}$, $\mathbf{A}_j$ 不保辛. 为使传输矩阵保辛, 可令

$$\begin{aligned} P'_{oj} &= \frac{P_{oj}}{\sqrt{1 + \alpha\delta x}}, \\ J'_{oj} &= \frac{J_{oj}}{\sqrt{1 + \alpha\delta x}}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\mathbf{A}'_j = \begin{bmatrix} \frac{2(1 + \alpha\delta x) + ZY\delta x^2}{2\sqrt{1 + \alpha\delta x}} & \frac{Z\delta x(4 + 2\alpha\delta x + ZY\delta x^2)}{4\sqrt{1 + \alpha\delta x}} \\ \frac{Y\delta x}{\sqrt{1 + \alpha\delta x}} & \frac{2 + ZY\delta x^2}{2\sqrt{1 + \alpha\delta x}} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

则(7)式可以改写为

$$\begin{bmatrix} P_{ij} \\ J_{ij} \end{bmatrix} = \mathbf{A}'_j \begin{bmatrix} P'_{oj} \\ J'_{oj} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

或参照(10)式写为

$$\mathbf{v}_{ij} = \mathbf{A}'_j \mathbf{v}'_{oj}, \quad (17)$$

式中

$$\mathbf{v}'_{oj} = \begin{bmatrix} P'_{oj} \\ J'_{oj} \end{bmatrix}.$$

可以证明, $\mathbf{A}'_j{}^T \mathbf{J} \mathbf{A}'_j = \mathbf{J}$, 故 $\mathbf{A}'_j$ 是辛矩阵, 满足互易条

件 $\det \mathbf{A}'_j = 1$, 因此(15)式具有辛对称结构^[29]. 由于辛内积是辛群元素变换下的不变量, 故热声系统中态向量的辛内积在辛矩阵作用下保持不变. 例如, 辛内积 $\mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{J} \mathbf{v}'_{oj}$ 是不变量.

将图 2 所示热声系统的有源网络类比成电路, 根据 Lorenz 互易定理^[29], 有

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{J} \mathbf{v}'_{oj} &= \begin{bmatrix} P_{ij} & J_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P'_{oj} \\ J'_{oj} \end{bmatrix} \\ &= P_{ij} J'_{oj} - P'_{oj} J_{ij} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (18)$$

将(14)式代入(18)式可得

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{ij}^T \mathbf{J} \mathbf{v}_{oj} &= \begin{bmatrix} P_{ij} & J_{ij} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{oj} \\ J_{oj} \end{bmatrix} \\ &= P_{ij} J_{oj} - P_{oj} J_{ij} \\ &= \sqrt{1 + \alpha\delta x} P_{ij} J'_{oj} - \sqrt{1 + \alpha\delta x} P'_{oj} J_{ij} \\ &= \sqrt{1 + \alpha\delta x} (P_{ij} J'_{oj} - P'_{oj} J_{ij}) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

由于热声系统的功流可以写为

$$\dot{W} = \frac{1}{2} \text{Re}(PJ), \quad (20)$$

因此(18)和(19)式表明热声系统具有功的相互性.

对于长度为 l 的热声系统, 其整体网络应由 n 个类似于图 2 的网络串联而成, 可表示为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P_i \\ J_i \end{bmatrix} &= \mathbf{A}' \begin{bmatrix} P'_o \\ J'_o \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A} \begin{bmatrix} P_o \\ J_o \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

式中

$$\mathbf{A}' = \prod_{j=1}^n \mathbf{A}'_j, \quad (22)$$

$$\mathbf{A} = \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j \delta x)^{-j/2} \mathbf{A}', \quad (23)$$

$$P'_o = \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j \delta x)^{-j/2} P_o, \quad (24)$$

$$J'_o = \prod_{j=1}^n (1 + \alpha_j \delta x)^{-j/2} J_o. \quad (25)$$

因为辛矩阵的乘法保辛, 故 $\mathbf{A}'$ 是辛矩阵. 由(21)和(23)式可知, 热声热机系统的传输矩阵可以描述为辛矩阵的传输.

4. 结 论

本文将辛矩阵引入热声系统网络模型的分析计算

之中.结果表明:对于以工质压力 P 和体积流率 J 组成的二维向量,其传输矩阵在回热器以外的等温流体管路中都属于辛矩阵;对于非等温回热器含源部件,可以

通过变量代换将传输矩阵转换为辛矩阵.辛数学的引入可加深对热声网络模型物理意义的理解,并将对复杂热声网络的计算起到促进作用.

- [1] Putnam A A 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 246
- [2] Rott N 1973 *Z. Angew. Math. Phys.* **24** 54
- [3] Rott N 1975 *Z. Angew. Math. Phys.* **26** 43
- [4] Ceperley P H 1979 *J. Acoust. Soc. Am.* **66** 1508
- [5] Ceperley P H 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **77** 1239
- [6] Swift G W 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **84** 1145
- [7] Tominaga A 1995 *Cryogenics* **35** 427
- [8] Xiao J H 1995 *Cryogenics* **35** 15
- [9] Xiao J H 1995 *Cryogenics* **35** 21
- [10] Xiao J H 1995 *Cryogenics* **35** 27
- [11] Guo F Z 1985 *On the Theory of Cyclic Flow Cryogenic Regenerator* (Calcutta: International Conference on Cryogenics) p227
- [12] Guo F Z, Chou Y M, Lee S Z 1987 *Cryogenics* **27** 152
- [13] Guo F Z, Li Q 2007 *Heat Dynamics* (Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press) p165 (in Chinese) [郭方中、李青 2007 热动力学 (武汉: 华中科技大学出版社) 第165页]
- [14] Deng X H, Hu X, Guo F Z 1996 *Cryogenics* **90** 6 (in Chinese) [邓晓辉、胡晓、郭方中 1996 低温工程 **90** 6]
- [15] Luo Z C 1988 *Fluid Network Theory* (Beijing: China Machine Press) p122 (in Chinese) [罗志昌 1988 流体网络理论 (北京: 机械工业出版社) 第122页]
- [16] Swift G W 2001 *Thermoacoustics: A Unifying Perspective for Some Engines and Refrigerators* (New York: Acoustical Society of America) p90
- [17] Wu F, Guo F Z, Li D Y 2001 *J. Appl. Sci.* **19** 362 (in Chinese) [吴锋、郭方中、李端勇 2001 应用科学学报 **19** 362]
- [18] Weyl H 1939 *The Classical Groups, Their Invariants and Representations* (Princeton: Princeton University Press) p1
- [19] Feng K, Qin M Z 2003 *Symplectic Method in Hamilton System* (Hangzhou: Zhejiang Science and Technology Press) p3 (in Chinese) [冯康、秦孟兆 2003 哈密顿系统的辛几何算法 (杭州: 浙江科学技术出版社) 第3页]
- [20] Zhong W X 2002 *Dual System in Applied Mechanics* (Beijing: Science Press) p28 (in Chinese) [钟万勰 2002 应用力学对偶体系 (北京: 科学出版社) 第28页]
- [21] Zhong W X 2010 *Force, Work, Energy and Symplectic Mathematics* (Dalian: Dalian University of Technology Press) p1 (in Chinese) [钟万勰 2010 力、功、能量与辛数学 (大连: 大连理工大学出版社) 第1页]
- [22] Zhong W X 2006 *Symplectic Solution Methodology in Applied Mechanics* (Beijing: Higher Education Press) p12 (in Chinese) [钟万勰 2006 应用力学的辛数学方法 (北京: 高等教育出版社) 第12页]
- [23] Zhong W X 1993 *J. Dalian Univ. Techn.* **33** 110 (in Chinese) [钟万勰 1993 大连理工大学学报 **33** 110]
- [24] Zhong W X 2001 *J. Dalian Univ. Techn.* **41** 379 (in Chinese) [钟万勰 2001 大连理工大学学报 **41** 379]
- [25] Chen J F, Zhu B, Zhong W X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1091 (in Chinese) [陈杰夫、朱宝、钟万勰 2009 物理学报 **58** 1091]
- [26] Zhong W X 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 401 (in Chinese) [钟万勰 2003 力学学报 **35** 401]
- [27] Yang H W, Zhong W X, Hou B H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4437 (in Chinese) [杨红卫、钟万勰、侯碧辉 2010 物理学报 **59** 4437]
- [28] Yang H W 2009 *J. EEE* **31** 37 (in Chinese) [杨红卫 2009 电气电子教学学报 **31** 37]
- [29] Liang C H 2010 *Saying Symmetry* (Beijing: Science Press) p58 (in Chinese) [梁昌洪 2010 话说对称 (北京: 科学出版社) 第58页]
- [30] Hou G L, Alatanang 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2754
- [31] Cao Y, Yang K Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1984 (in Chinese) [曹禹、杨孔庆 2003 物理学报 **52** 1984]
- [32] Luo X Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 604 (in Chinese) [罗香怡、刘学深、丁培柱 2007 物理学报 **56** 604]
- [33] Zhang C L, Qi Y Y, Liu X S, Ding P Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3078 (in Chinese) [张春丽、祁月盈、刘学深、丁培柱 2009 物理学报 **58** 3078]
- [34] Zhang C L, Qi Y Y, Liu X S, Ding P Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 774 (in Chinese) [张春丽、祁月盈、刘学深、丁培柱 2007 物理学报 **56** 774]
- [35] Wang H J 1991 *Chin. J. Quantum Electron.* **8** 304 (in Chinese) [王洪吉 1991 量子电子学 **8** 304]
- [36] Wang H J 1993 *J. Optoelectron. Laser* **4** 107 (in Chinese) [王洪吉 1993 光电子·激光 **4** 107]

Symplectic symmetry feature of thermoacoustic network^{*}

Yang Zhi-Chun¹⁾²⁾ Wu Feng^{1)2)†} Guo Fang-Zhong³⁾ Zhang Chun-Ping³⁾

1) (*Graduate School, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China*)

2) (*School of Science, Wuhan Institute of Technology, Wuhan 430073, China*)

3) (*School of Energy and Power Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

(Received 27 September 2010; revised manuscript received 15 March 2011)

Abstract

Symplectic mathematics is introduced into the thermoacoustic network model. The transferring matrix of thermoacoustic system is analyzed, and the transferring matrix of working gas in isothermal fluid pipe of thermoacoustic system is a symplectic matrix. The transferring matrix of working gas in regenerator of thermoacoustic system is not a symplectic matrix, but it can be converted into a symplectic matrix by variable transformation. With variable transformation, the whole transferring matrix of thermoacoustic system can be represented by a symplectic matrix. The form of symplectic matrix is conducive to analyzing and calculating the thermoacoustic network model.

Keywords: symplectic, thermoacoustic, network model, transferring matrix

PACS: 43.35.Ud, 43.20.+g, 44.30.+v

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50676068) and the Key Program of the Scientific Research of the Education Bureau of Hubei Province, China (Grant No. D200615002).

[†] Corresponding author. E-mail: ajlsyx0201@126.com