

Nielsen 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量*

贾利群^{1)†} 孙现亭²⁾ 张美玲¹⁾ 王肖肖¹⁾ 解银丽¹⁾

1) (江南大学理学院, 无锡 214122)

2) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

(2010 年 10 月 30 日收到; 2011 年 2 月 11 日收到修改稿)

研究完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性导致的一种新型守恒量. 在群的无限小变换下, 由 Nielsen 方程 Mei 对称性的定义和判据, 得到完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性导致的新型结构方程和新型守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: Nielsen 方程, Mei 对称性, 新型结构方程, 新型守恒量

PACS: 45. 20. Jj, 02. 20. Sv

1. 引言

1918 年, 德国女科学家 Noether 揭示了力学系统对称性与守恒量间的潜在关系: 作用量的每一种连续对称性都有一个守恒量与之对应^[1]. 但是, 直到 20 世纪 70 年代, 分析力学界才充分认识到 Noether 理论的科学意义. 从此, 对称性与守恒量理论蓬勃发展. 2000 年, 梅凤翔^[2]提出了力学系统中的一种新的对称性, 人们称之为 Mei 对称性. 此后, Mei 对称性逐渐成为国内分析力学界的一个研究热点^[3–21]. 本文研究完整系统 Nielsen 方程 Mei 对称性直接导致的新型结构方程和新型守恒量, 由此可找到新的守恒量.

2. Nielsen 方程的 Mei 对称性及其判据

设 $L = L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为系统的 Lagrange 函数, $Q_s = Q_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 为非势广义力, 力学系统受到理想双面完整约束, 则系统的 Nielsen 方程为

$$N_s(L) = Q_s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

其中 N_s 称为 Mei 算子,

$$N_s = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} \frac{d}{dt} - 2 \frac{\partial}{\partial q_s}.$$

引入时间和广义坐标的无限小变换

$$\begin{aligned} t^* &= t + \varepsilon \xi_0(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}), \\ q_s^*(t^*) &= q_s(t) + \varepsilon \xi_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (2) \\ (s &= 1, 2, \dots, n), \end{aligned}$$

其中 ε 为无限小参数, ξ_0, ξ_s 为无限小变换生成元. 本文采用 Einstein 求和约定. 引进

$$X^{(1)} = \xi_0 \frac{\partial}{\partial t} + \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \left(\frac{d\xi_s}{dt} - \dot{q}_s \frac{d\xi_0}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}, \quad (3)$$

其中

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_s \frac{\partial}{\partial q_s} + \alpha_s \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.$$

设在无限小变换(2)式下, Lagrange 函数 $L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 变为

$$L^*(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = L\left(t^*, \mathbf{q}^*, \frac{d\mathbf{q}^*}{dt^*}\right),$$

非势广义力

$$Q_s = Q_s(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$$

变为

$$Q_s^* = Q_s\left(t^*, \mathbf{q}^*, \frac{d\mathbf{q}^*}{dt^*}\right).$$

定义 在无限小变换(2)式下, 如果系统运动方程(1)的形式保持不变, 即

$$N_s(L^*) = Q_s^* \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (4)$$

成立, 则这种不变性称为 Nielsen 方程的 Mei 对称性.

在 $(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ 处展开 L^* 和 Q_s^* , 有

* 中央高等学校基本科研基金(批准号: JUSRP31102)资助的课题.

† E-mail: jllq0000@163.com

$$L^* = L\left(t^*, q^*, \frac{dq^*}{dt^*}\right) \\ = L(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(L) + O(\varepsilon^2), \quad (5)$$

$$Q_s^* = Q_s\left(t^*, q^*, \frac{dq^*}{dt^*}\right) \\ = Q_s(t, q, \dot{q}) + \varepsilon X^{(1)}(Q_s) + O(\varepsilon^2) \\ (s = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

将(5)和(6)式代入方程(4), 忽略 ε^2 及更高阶项, 并利用方程(1), 得到

$$N_s[X^{(1)}(L)] = X^{(1)}(Q_s) \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

判据 对 Nielsen 方程(1), 如果变换(2)式的无限小生成元 ξ_0, ξ_s 满足方程(7), 则相应的不变性为 Nielsen 方程的 Mei 对称性.

称方程(7)为 Nielsen 方程 Mei 对称性的判据方程.

3. Nielsen 方程 Mei 对称性导致的新型结构方程和新型守恒量

命题 如果 Nielsen 方程(1)的 Mei 对称性的生成元 ξ_0, ξ_s 以及规范函数 $G_n = G_n(t, q, \dot{q})$ 满足如下新型结构方程:

$$\frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\ - \dot{q}_s X^{(1)}(Q_s) = 0, \quad (8)$$

则 Nielsen 方程(1)的 Mei 对称性导致的新型守恒量为

$$I_n = G_n + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} q_s = \text{const}. \quad (9)$$

证明 注意到 Mei 对称性的判据方程(7)和新型结构方程(8), 有

$$\begin{aligned} \frac{dI_n}{dt} &= \frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} \\ &\quad + \dot{q}_s \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\ &= \frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\ &\quad - \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} + \dot{q}_s \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} \\ &= \frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \dot{q}_s E_s[X^{(1)}(L)] \\ &= \frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\ &\quad - \dot{q}_s N_s[X^{(1)}(L)] \\ &= \frac{dG_n}{dt} + q_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial q_s} + \dot{q}_s \frac{d}{dt} \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial \dot{q}_s} \\ &\quad - \dot{q}_s X^{(1)}(Q_s) \\ &= 0. \end{aligned}$$

方程(8)和(9)式是 Nielsen 方程 Mei 对称性导致的一种新型结构方程和新型守恒量.

4. 算 例

完整力学系统的 Lagrange 函数和广义力分别为

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - q_1 q_2 + t, \quad (10)$$

$$Q_1 = Q_2 = 0, \quad (11)$$

试研究 Nielsen 方程的 Mei 对称性及其导致的新型守恒量.

首先, 研究 Nielsen 方程的 Mei 对称性. 将(10)式代入方程(1)得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + q_2 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + q_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

通过运算可得

$$\begin{aligned} X^{(1)}(L) &= (\dot{\xi}_1 - \dot{q}_1 \xi_0) \dot{q}_1 + (\dot{\xi}_2 - \dot{q}_2 \xi_0) \dot{q}_2 \\ &\quad - \xi_1 q_2 - \xi_2 q_1 + \xi_0. \end{aligned} \quad (13)$$

取生成元 $\xi_0 = 0, \xi_1 = q_2, \xi_2 = q_1$, 则有

$$X^{(1)}(L) = 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2. \quad (14)$$

于是有

$$N_s[X^{(1)}(L)] = 0 \quad (s = 1, 2). \quad (15)$$

因此, 系统具有 Mei 对称性.

下面研究 Nielsen 方程 Mei 对称性直接导致的新型守恒量. 将(14)式代入新型结构方程(8), 可得

$$G_n = q_1^2 + q_2^2 - 2\dot{q}_1 \dot{q}_2, \quad (16)$$

故由(9)式可得

$$I_n = -2\dot{q}_1 \dot{q}_2 - q_1^2 - q_2^2 = \text{const}. \quad (17)$$

5. 结 论

本文给出了 Nielsen 方程 Mei 对称性导致的新

型结构方程和新型守恒量. 它们的形式简单、运算简便. 此外, 本文的结果还可推广到非完整约束力学系统等领域.

-
- [1] Noether A E 1918 *Math. Phys.* **KI**, II 235
- [2] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120
- [3] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
- [4] Luo S K, Zhang Y F 2008 *Advances in the Study of Dynamics of Constrained Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [罗绍凯、张永发 2008 约束系统动力学研究进展 (北京: 科学出版社)]
- [5] Jia L Q, Xie J F, Zheng S W 2008 *Chin. Phys. B* **17** 17
- [6] Ding N, Fang J H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1550
- [7] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1560
- [8] Zhang M J, Fang J H, Zhang X N, Lu K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1957
- [9] Fang J H, Liu Y K, Zhang X N 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1962
- [10] Huang X H, Zhang X B, Shi S Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6056 (in Chinese) [黄晓虹、张晓波、施沈阳 2008 物理学报 **57** 6056]
- [11] Ge W K 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6714 (in Chinese) [葛伟宽 2008 物理学报 **57** 6714]
- [12] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]
- [13] Wang P, Fang J H, Wang X M 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1312
- [14] Cui J C, Zhang Y Y, Jia L Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1731
- [15] Cui J C, Jia L Q, Yang X F 2009 *J. Henan Normal Univ. (Nat. Sci.)* **37**(2) 70 (in Chinese) [崔金超、贾利群、杨新芳 2009 河南师范大学学报 **37**(2) 70]
- [16] Jia L Q, Zhang Y Y, Yang X F, Cui J C, Xie Y L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2939 (in Chinese) [贾利群、张耀宇、杨新芳、崔金超、解银丽 2010 物理学报 **59** 2939]
- [17] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成、夏丽莉、王小明、刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]
- [18] Zheng S W, Xie J F, Chen X W, Du X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5209 (in Chinese) [郑世旺、解加芳、陈向炜、杜雪莲 2010 物理学报 **59** 5209]
- [19] Cui J C, Zhang Y Y, Yang X F, Jia L Q 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030304
- [20] Yang X F, Jia L Q, Cui J C, Luo S K 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030305
- [21] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Yang X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110301

A type of new conserved quantity of Mei symmetry for Nielsen equations^{*}

Jia Li-Qun^{1)†} Sun Xian-Ting²⁾ Zhang Mei-Ling¹⁾ Wang Xiao-Xiao¹⁾ Xie Yin-Li¹⁾

1) (School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China)

2) (College of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan 467002, China)

(Received 30 October 2010; revised manuscript received 11 February 2011)

Abstract

A type of new conserved quantity of Mei symmetry of Nielsen equations for a holonomic system is studied. Under the infinitesimal transformation of groups, new structural equation and new conserved quantity of Mei symmetry of Nielsen equations for a holonomic system are obtained from the definition and the criterion of Mei symmetry of Nielsen equations. Finally, an example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Nielsen equation, Mei symmetry, new structural equation, new conserved quantity

PACS: 45.20.Jj, 02.20.Sv

^{*} Project supported by the Fundamental Scientific Research Foundation for the Central Universities of China (Grant No. JUSRP31102).

[†] E-mail: jllq0000@163.com