

## 全局耦合网络的参量辨识与时空混沌同步\*

吕翎† 李钢 张檬 李雨珊 韦琳玲 于森

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2010 年 12 月 8 日收到; 2010 年 12 月 15 日收到修改稿)

研究了参量未知的离散型时空混沌系统构成全局耦合网络的参量辨识与同步问题. 首先将 Milosavljevic 所设计的控制律加以推广. 利用推广后的控制律进行了网络节点时空混沌系统中未知参量的有效辨识, 并完成了该网络的完全同步. 进一步以物理中具有时空混沌行为的一维对流方程的离散形式作为实例进行了仿真分析.

**关键词:** 同步, 参量辨识, 全局耦合网络, 时空混沌

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

## 1. 引言

近年来, 混沌系统在复杂网络上的同步行为引起了人们的广泛关注, 这主要源于自然界存在着大量的有着相互作用的复杂系统, 对于这样相关联的若干个系统均可以用复杂网络来描述和研究. 而且更重要的是这些复杂网络上的同步行为在许多实际应用中, 尤其是在通信网络、生物网络以及工程网络中起着重要的作用, 因此, 复杂网络的混沌同步已成为目前诸多科学领域研究的热点, 大量的文献报道了这方面的研究成果<sup>[1-10]</sup>. 如, Checco 等研究了随机网络的混沌同步问题<sup>[11]</sup>; Hung 等实现了无标度网络的广义混沌同步<sup>[12]</sup>; He 等完成了非线性耦合网络的自适应同步研究<sup>[13]</sup>; Ji 等推导出了具有时变和延迟效应的复杂动力学网络的同步准则<sup>[14]</sup>; Lü 等进行了节点结构互异的加权网络的混沌广义同步研究<sup>[15]</sup>.

在进行复杂网络的同步研究时, 值得关注的是由于实际网络结构的复杂性以及不可避免地受到外界因素的干扰, 导致网络节点状态方程中的参量变为不稳定或不能预先确定的情形. 因此, 有必要在进行复杂网络的混沌同步研究时对网络节点状态方程中的未知参量进行有效地辨识. 由于网络中各节点是相互关联的, 所以一般情况下, 设计的参量辨识器应该与网络所有节点状态方程中的状态

变量信号有关. 然而, 网络中的节点数目通常非常庞大, 这使得处理问题的方法和手段变得非常繁杂. 本文将 Milosavljevic 所设计的控制律加以推广, 利用推广后的控制律设计的参量辨识器只需要在网络连接前利用单个节点状态方程中的状态变量信号即可构造, 同时, 实现了该网络的时空混沌完全同步.

## 2. 定理的推广

为了进行不确定复杂网络的参量辨识与时空混沌同步, 首先将 Milosavljevic 用于控制单独一个离散型线性时间系统而设计的控制律加以推广. Milosavljevic 所设计的控制律可由下述引理所述.

**引理**<sup>[16]</sup> 在一个离散型线性时间系统中, 若构造一个变量  $\Psi_n$  ( $\Psi_n \in R^m$ ), 使与其增量之间满足

$$\Psi_n \Delta \Psi_n < -\frac{1}{2} [\Delta \Psi_n]^2 \quad (\Psi_n \neq 0), \quad (1)$$

那么将存在  $|\Psi_{n+1}| < |\Psi_n|$ . 即时间序列  $n \rightarrow \infty$  时, 变量  $\Psi_n$  渐近到零.

将上述引理推广到  $N$  个离散型时空混沌系统构成的复杂网络的参量辨识与混沌同步研究中. 为此, 针对  $N$  个离散型时空混沌系统作为节点所构成的复杂网络构造  $p$  个变量  $\Psi_n^{(k)}(i)$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ,  $i$  为空间序列), 继而将 Milosavljevic 所设计的控制

\* 辽宁省自然科学基金(批准号:20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划(批准号:2008T108)资助的课题.

† E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

律推广如下.

**推理** 在  $N$  个离散型时空混沌系统所构成的复杂网络中,若构造  $p$  个变量  $\Psi_n^{(k)}(i)$  ( $\Psi_n^{(k)}(i) \in \mathbf{R}^m$ ),使它与其相对应的增量之间满足

$$\begin{aligned} \Psi_n^{(k)}(i) \Delta \Psi_n^{(k)}(i) &< -\frac{1}{2} [\Delta \Psi_n^{(k)}(i)]^2, \\ (\Psi_n^{(k)}(i) &\neq 0), \end{aligned} \quad (2)$$

那么将存在  $|\Psi_{n+1}^{(k)}(i)| < |\Psi_n^{(k)}(i)|$ . 即时间序列  $n \rightarrow \infty$  时,变量  $\Psi_n^{(k)}(i)$  渐近到零.

### 3. 参量辨识器的设计

利用上述推理研究复杂网络的参量辨识问题. 设  $N$  个离散型时空混沌系统作为节点构成的复杂网络中,单个节点的状态方程具有下列形式:

$$\mathbf{x}_{n+1}(i) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i)), \quad (3)$$

其中  $n$  表示离散化时间,  $i$  为空间格点坐标 ( $i = 1, 2, \dots, L$ ),  $L$  为系统尺寸.  $\mathbf{x}_n(i) \in \mathbf{R}^m$  为系统的状态变量,  $\mathbf{F}: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ .

若这个时空混沌系统中含有未知参量,对  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i))$  进行适当的分离,将含有未知参量的函数项从  $\mathbf{F}$  中分离出来,即

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}(i) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i)) \\ &= \mathbf{a}\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(i)) + \mathbf{g}(\mathbf{x}_n(i)), \end{aligned} \quad (4)$$

这里  $\mathbf{a}$  是未知参量.

定义未知参量与其辨识量  $\mathbf{a}_n$  之间的误差

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{a}_n - \mathbf{a}, \quad (5)$$

设计辨识量  $\mathbf{a}_n$  的时间演化形式为

$$\Delta \mathbf{W} = \Phi(\mathbf{x}_n(i))(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}), \quad (6)$$

即

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{a}_n + \Phi(\mathbf{x}_n(i))(\mathbf{a}_n - \mathbf{a}), \quad (7)$$

其中  $\Phi(\mathbf{x}_n(i))$  为待定的调协函数.

将所定义的未知参量与其辨识量之间的误差  $\mathbf{W}_n$  取作推理中的构造变量  $\Psi_n^{(k)}(i)$ , 即

$$\mathbf{W}_n \equiv \Psi_n^{(k)}(i). \quad (8)$$

将(5)式和(7)式代入(2)式,可以得到待定的调协函数  $\Phi(\mathbf{x}_n(i))$  的选择约束  $|1 + \Phi(\mathbf{x}_n(i))| < 1$ , 即

$$-2 < \Phi(\mathbf{x}_n(i)) < 0, \quad (9)$$

那么,构造的调协函数  $\Phi(\mathbf{x}_n(i))$  只要满足(9)式的约束,当  $n \rightarrow \infty$  时,就存在  $\mathbf{W}_n \rightarrow 0$ , 即  $\mathbf{a}_n \rightarrow \mathbf{a}$ . 未知参量便可以得到辨识.

进一步确定参量辨识器的具体结构. 为此,将

(4)式代入(7)式,可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{n+1} &= [1 + \Phi(\mathbf{x}_n(i))] \mathbf{a}_n - \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(i))} [\mathbf{x}_{n+1}(i) \\ &\quad - \mathbf{g}(\mathbf{x}_n(i))]. \end{aligned} \quad (10)$$

由于(10)式中含有状态变量的输出  $\mathbf{x}_{n+1}(i)$ , 在实际中难以观测,故引入辅助变量  $\delta_n$  和  $\mathbf{Q}_n$ , 并假设下列关系存在:

$$\delta_n = \mathbf{a}_n + \mathbf{Q}_n, \quad (11)$$

则

$$\delta_{n+1} = \mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{Q}_{n+1}. \quad (12)$$

将(10)式代入(12)式中,可以得到如下关系:

$$\begin{aligned} \delta_{n+1} &= [1 + \Phi(\mathbf{x}_n(i))] \mathbf{a}_n - \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(i))} [\mathbf{x}_{n+1}(i) \\ &\quad - \mathbf{g}(\mathbf{x}_n(i))] + \mathbf{Q}_{n+1}. \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\mathbf{Q}_n = \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}(i))} \mathbf{x}_n(i), \quad (14)$$

则有

$$\mathbf{Q}_{n+1} = \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(i))} \mathbf{x}_{n+1}(i). \quad (15)$$

代入(13)式即可消去状态变量的输出  $\mathbf{x}_{n+1}(i)$ , 这样便得到参量辨识器的结构

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= \delta_n - \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}(i))} \mathbf{x}_n(i) \\ \delta_{n+1} &= [1 + \Phi(\mathbf{x}_n(i))] \mathbf{a}_n \\ &\quad + \frac{\Phi(\mathbf{x}_n(i))}{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(i))} \mathbf{g}(\mathbf{x}_n(i)). \end{aligned} \quad (16)$$

### 4. 网络的同步原理

网络节点时空混沌系统中的未知参量得到辨识后,进一步利用上述推理研究如同(3)式所描述的  $N$  个离散型时空混沌系统作为节点构成复杂网络的同步问题.

利用(3)式  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n(i))$  中的非线性部分作为耦合连接形成复杂网络. 网络中第  $k$  个节点所满足的状态方程为

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{n+1}^{(k)}(i) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_n^{(k)}(i) + \mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(k)}(i)) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^N \mathbf{G}_{kl} \mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(l)}(i)), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $\mathbf{A}$  为第  $k$  个节点状态方程中经过适当分离配置的线性项的系数矩阵,而  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(k)}(i)) = \mathbf{F}(\mathbf{x}_n^{(k)}(i)) - \mathbf{A}\mathbf{x}_n^{(k)}(i)$ .  $\varepsilon$  是耦合强度,  $\mathbf{G}_{kl}$  是耦合矩阵  $\mathbf{G}$  的矩阵元,表示网络的拓扑结构. 例如,在全局耦合下,

耦合矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -N+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & -N+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & -N+1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -N+1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

定义网络同步误差变量

$$\mathbf{e}_n^{(k)}(i) = \mathbf{x}_n^{(k)}(i) - \mathbf{x}_n^{(k+1)}(i), \quad (k = 1, 2, \cdots, N-1), \quad (19)$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n+1}^{(k)}(i) &= \mathbf{x}_{n+1}^{(k)}(i) - \mathbf{x}_{n+1}^{(k+1)}(i) \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}_n^{(k)}(i) + (1 - N\varepsilon)[\mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(k)}(i)) \\ &\quad - \mathbf{H}(\mathbf{x}_n^{(k+1)}(i))]. \end{aligned} \quad (20)$$

当  $\varepsilon = \frac{1}{N}$  时, (20) 式变为

$$\mathbf{e}_{n+1}^{(k)}(i) = \mathbf{A}\mathbf{e}_n^{(k)}(i). \quad (21)$$

那么,

$$\Delta \mathbf{e}_n^{(k)}(i) = (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{e}_n^{(k)}(i). \quad (22)$$

我们将所定义的  $N-1$  个网络同步误差变量  $\mathbf{e}_n^{(k)}(i)$  取作推理中的构造变量  $\Psi_n^{(k)}(i)$ , 即

$$\mathbf{e}_n^{(k)}(i) \equiv \Psi_n^{(k)}(i), \quad (23)$$

$$\Delta \mathbf{e}_n^{(k)}(i) = \Delta \Psi_n^{(k)}(i). \quad (24)$$

将 (22) — (24) 式代入 (2) 式中, 可知当下式成立时,

$$-1 < \mathbf{A} < 1, \quad (25)$$

$|\mathbf{e}_{n+1}^{(k)}(i)| < |\mathbf{e}_n^{(k)}(i)|$  得到满足. 显然, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\mathbf{e}_n^{(k)}(i) \rightarrow 0$ , 整个网络将达到完全同步.

## 5. 仿真分析

以物理中具有时空混沌行为的一维对流方程的离散形式作为仿真实例, 以此来验证上述设计的参量辨识器以及网络同步原理的有效性.

一维对流方程的离散形式可以表示为<sup>[17]</sup>

$$\begin{aligned} x_{n+1}(i) &= 1 - \omega x_n(i+1) \\ &\quad - \mu[(1 + \omega)x_n(i)]^2, \end{aligned} \quad (26)$$

其中  $n$  表示离散化的时间,  $i$  为空间格点坐标 ( $i = 1, 2, \cdots, L$ ),  $L$  为系统尺寸.  $\omega, \mu$  为系统参量. 我们在仿真模拟中采用周期性边界条件, 初始值取  $x_0(i) = 0.1$ , 系统尺寸取  $L = 100$ , 作出离散型时空混沌系统 (26) 的最大 Lyapunov 指数随参量  $\omega$  以及  $\mu$  的演化关系如图 1 所示. 图 1 显示, 最大 Lyapunov

指数存在大于零的区域, 表明参量在该区域内时空混沌系统 (26) 处于时空混沌状态. 进一步固定参量  $\omega = -0.05$ , 作出系统的最大 Lyapunov 指数随单一参量  $\mu$  的演化关系如图 2 所示. 我们在最大 Lyapunov 指数大于零的区域取参量  $\mu = 1.75$ , 对应的系统状态变量的时空演化以及具有特定形状的相图如图 3 和图 4 所示.

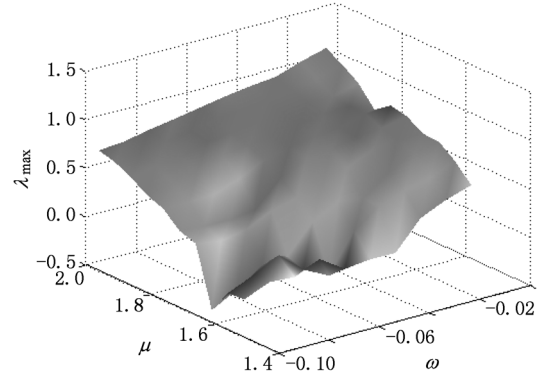


图 1 最大 Lyapunov 指数随参量  $\omega$  和  $\mu$  的演化

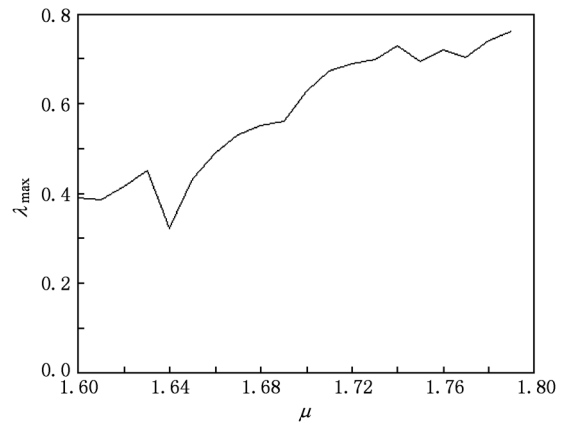


图 2 最大 Lyapunov 指数随参量  $\omega$  的演化

假定时空混沌系统 (26) 中的参量  $\mu$  未知, 依据 (16) 式, 此时参量辨识器中的函数  $f(x_n(i)) = -[(1 + \omega)x_n(i)]^2$ ,  $g(x_n(i)) = 1 - \omega x_n(i+1)$ . 调协函数  $\Phi(x_n(i))$  的选取要满足 (9) 式的约束. 由图 2 可以看出, 时空混沌系统 (26) 的状态变量的演化区间为  $(-0.8, 1.1)$ , 显然,  $f(x_n(i)) \in (-2, 0)$ , 因此, 不妨设调协函数  $\Phi(x_n(i)) = f(x_n(i))$ . 仿真迭代从时间序列 100 步开始, 除参量  $\mu$  以外, 其他参量和模拟数据保持不变. 辨识量  $\mu_n$  在空间 100 个格点上的时间演化如图 5 所示. 图中显示, 对于空间所有格点, 辨识量  $\mu_n$  均能迅速地渐近到  $\mu$  的实际值

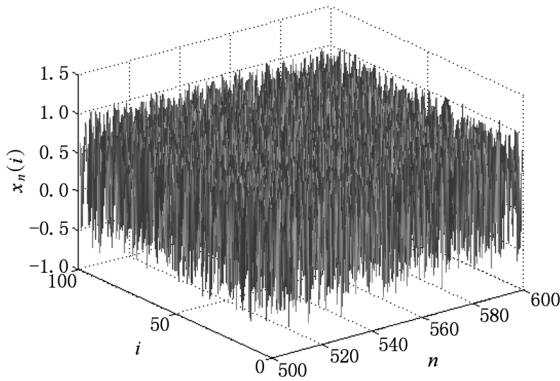


图3 时空混沌模型(26)的时空演化

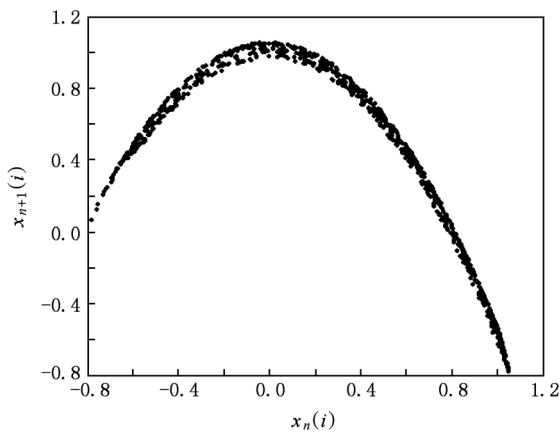


图4 时空混沌模型(26)的相图

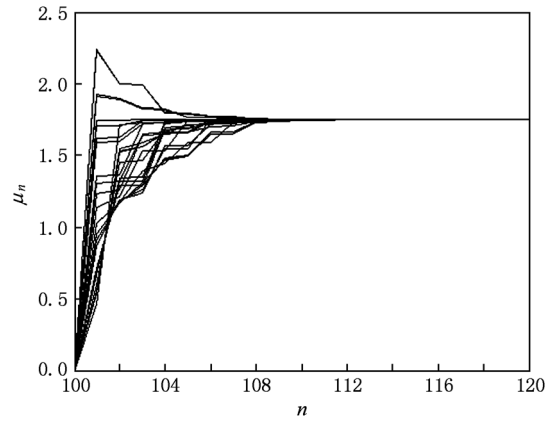
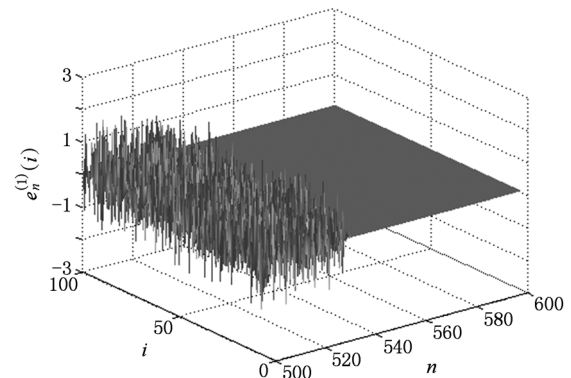
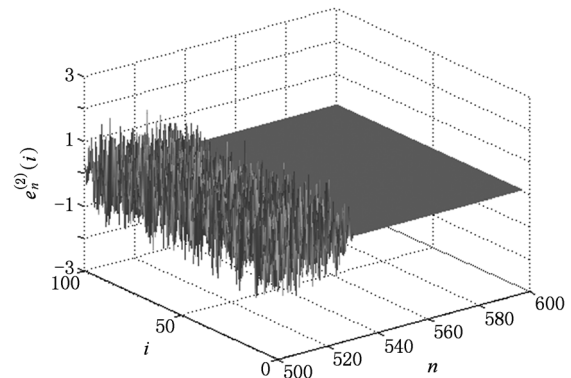
1.75, 未知参量得以确定.

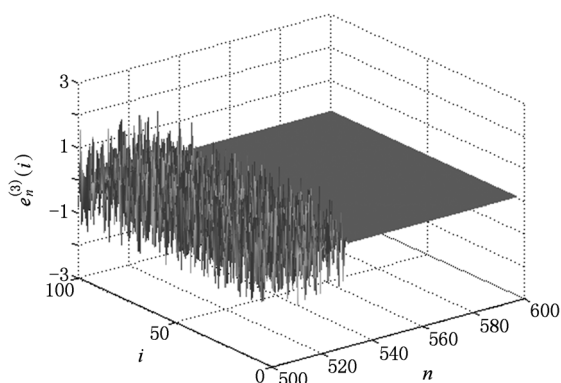
仿真网络同步时, 取离散型时空混沌系统(26)作为网络的节点, 按照(18)式的连接构成全局耦合网络. 以网络节点数  $N = 4$  为例, 四个节点处时空混沌系统的状态变量分别为  $x_n^1(i)$ ,  $x_n^2(i)$ ,  $x_n^3(i)$ ,  $x_n^4(i)$ . 网络耦合矩阵为

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

网络节点线性项的系数矩阵  $\mathbf{A}$  在满足(25)式的条件下任取值  $-0.5$ , 耦合强度因子  $\varepsilon = 1/4$ , 状态变量的初始值  $x_0^{(1)}(i) = 0.1$ ,  $x_0^{(2)}(i) = 0.2$ ,  $x_0^{(3)}(i) = 0.3$ ,  $x_0^{(4)}(i) = 0.4$ , 任取时间序列为 520 s 时进行网络的耦合连接, 仿真模拟网络误差变量随时空的演化规律如图 6—8 所示. 图 6—8 显示, 由于网络中最初各节点状态变量所取的初始值不同, 因此, 网络误差  $e_n^k(i) = x_n^k(i) - x_n^{k+1}(i)$  ( $k = 1, 2$ ,

3) 随时空的演化不为零. 但网络在第 520 s 耦合连接后, 经过短暂的时间序列过渡, 四个节点时空混沌系统的状态变量随时空的演化均趋于一致, 其误差变量始终稳定在零值, 整个网络达到了完全同步状态.


 图5 参量  $\mu$  的辨识过程

 图6 误差  $e_n^{(1)}(i)$  的时空演化

 图7 误差  $e_n^{(2)}(i)$  的时空演化

图8 误差  $e_n^{(3)}(i)$  的时空演化

## 6. 结 论

研究了参量未知的离散型时空混沌系统构成全局耦合网络的参量辨识与同步问题. 首先将 Milosavljevic 所设计的控制律加以推广. 利用推广后的控制律进行了网络节点时空混沌系统中未知参量的有效辨识, 并完成了该网络的完全同步. 进一步以物理中具有时空混沌行为的一维对流方程的离散形式作为实例进行了仿真分析. 我们发现, 在所取的 100 个空间格点上, 网络节点时空混沌系统中的未知参量  $\mu$  均趋于实际值 1.75. 网络连接后, 所有节点时空混沌系统的状态变量随时空的演化达到了完全一致.

- [1] Yu W W, Chen G R, Lü J H 2009 *Automatica* **45** 429
- [2] Shang Y, Chen M Y, Kurths J 2009 *Phys. Rev. E* **80** 27201
- [3] Kouvaris N, Provata A, Kugiumtzis D 2010 *Phys. Lett. A* **374** 507
- [4] Agnes E J, Erichsen Jr R, Brunnet L G 2010 *Physica A* **389** 651
- [5] Li K, Lai C H 2008 *Phys. Lett. A* **372** 1601
- [6] Chen L, Qiu C, Huang H B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 45101
- [7] Lu J, Zhang R, Xu Z Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5949 (in Chinese) [卢 静、张 荣、徐振源 2010 物理学报 **59** 5949]
- [8] Dai C L, Liu S E, Tian L, Shi D N 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4800 (in Chinese) [戴存礼、刘曙娥、田 亮、施大宁 2008 物理学报 **57** 4800]
- [9] Li D, Leyva I, Almendral J A, Sendiña-Nadal I, Buldú J M, Havlin S, Boccaletti S 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 168701
- [10] Lü L, Li G, Shang J Y, Shen N, Zhang X, Liu S, Zhu J B 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5966 (in Chinese) [吕 翎、李 钢、商锦玉、沈 娜、张 新、柳 爽、朱佳博 2010 物理学报 **59** 5966]
- [11] Checco P, Biey M, Kocarev L 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **35** 562
- [12] Hung Y C, Huang Y T, Ho M C, Hu C K 2008 *Phys. Rev. E* **77** 16202
- [13] He G M, Yang J Y 2008 *Chaos, Solitons and Fractals* **38** 1254
- [14] Ji D H, Park J H, Yoo W J, Won S C, Lee S M 2010 *Phys. Lett. A* **374** 1218
- [15] Lü L, Li G, Guo L, Meng L, Zou J R, Yang M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080507
- [16] Milosavljevic D 1985 *Automation and Remote Control* **46** 307
- [17] Chen G R, Liu S T 2003 *J. Bifurcation Chaos* **13** 935

# Parameter identification and synchronization of spatiotemporal chaos in globally coupled network<sup>\*</sup>

Lü Ling<sup>†</sup> Li Gang Zhang Meng Li Yu-Shan Wei Lin-Ling Yu Miao

(College of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 8 December 2010; revised manuscript received 15 December 2010)

## Abstract

Synchronization and parameter identification of globally coupled network constructed by discrete spatiotemporal chaos systems with unknown parameters are studied. The control law designed by Milosavljevic is extended, and applied to the identification of unknown parameters in spatiotemporal chaos systems at the nodes of the network and the study of global synchronization of the network. The one-dimensional convective equation with spatiotemporal chaos behaviour in physics is further taken for example to imitate analysis.

**Keywords:** synchronization, parameter identification, globally coupled network, spatiotemporal chaos

**PACS:** 05.45.Xt, 05.45.-a, 05.45.Pq

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province, China (Grant No. 20082147) and the Innovative Team Program of Liaoning Educational Committee, China (Grant No. 2008T108).

<sup>†</sup> E-mail: luling1960@yahoo.com.cn