

基于分形多孔介质三维网络模型的非混溶 两相流驱替数值模拟*

赵明¹⁾ 郁伯铭^{2)†}

1) (长江大学物理科学与技术学院, 荆州 434023)

2) (华中科技大学物理学院, 武汉 430074)

(2010年5月17日收到; 2010年12月26日收到修改稿)

提出了一个描述多孔介质孔隙尺寸分布的三维分形网络模型, 利用该模型对多孔介质中的非混溶两相流驱替进行了数值模拟, 研究了孔隙尺寸分布分维 D_f 和两相流黏滞比 M 对驱替前沿指进型的影响, 结果表明指进型容量维数 D_h 随着孔隙尺寸分布分维 D_f 以及黏滞比 M 的增大而减少, 并通过曲线拟合得到了它们之间的定量关系.

关键词: 多孔介质, 三维网络, 黏滞指进, 非混溶两相流

PACS: 81.05.Rm, 05.45.Df, 47.20.Gv

1. 引言

多孔介质中两相流驱替过程的不稳定性受到人们的持续关注. 当低黏性流体进入多孔介质驱替高黏性流体时, 其两相流交界面是不稳定的, 将发育成高度复杂的指形结构, 这种现象称为黏滞指进 (viscous fingering). 在油藏开发的二次采油过程中通常采用水驱油技术, 由于黏滞指进现象会导致水驱控制难度增大以及原油采收率的下降, 影响到油田开发成本和原油产量, 因而研究多孔介质中的黏滞指进问题对于石油开采具有特别重要的意义.

人们研究多孔介质中的两相流驱替过程主要有以下三种方法: 1) 实验室及现场模拟; 2) 理论分析; 3) 计算机模拟. 过去多采用 Hele-Shaw 装置来模拟黏滞指进^[1], 但该装置无法模拟多孔介质复杂的孔隙结构, 所得结论取决于具体装置. 有些学者^[2]从求解流体动力学方程入手, 解析地分析黏滞指进产生原因及发展过程, 但是碍于动力学方程及其边界条件过于复杂, 仅能得出少量的若干简单结论. 近年来随着高速计算机的发展和普及, 越来越多的学者^[3-7]采用蒙特卡罗方法来模拟多孔介质中的两相流驱替过程, 并采用分形理论加以描述, 以揭示黏滞指进的内在规律.

早期的一些学者多采用有限扩散凝聚模型^[3] (DLA) 和谢尔宾斯基地毯中的决定论算法^[4] 来研究指进型的分形性质. 近年来一些学者采用虚拟连续介质模型^[5] 以及孔-喉模型^[6] 研究了多孔介质中混溶两相流驱替, 并采用格子波尔兹曼方法 (LBM) 进行了数值模拟^[7,8]. 在以往的研究中, 研究者主要关注黏滞指进本身的空间分形和时间分形性质, 而对多孔介质本身的复杂性和分形性质则关注较少, 所采用的也多是二维模型. 事实上多孔介质中微观尺度渗流性质与多孔介质的孔隙结构密切相关, 因此近年来一些学者研究了能够反映真实孔隙结构的多孔介质重构方法^[9]. 本文基于多孔介质孔隙大小满足分形分布的事实, 提出了一个描述多孔介质孔隙尺寸分形分布的三维网络模型, 并建立了该模型下的两相流驱替过程的动力学方程组, 通过求解该方程组从而实现了两相流驱替过程的计算机模拟, 并借此讨论了多孔介质参数孔隙尺寸分布分维和流体参数黏滞比对黏滞指进型的影响.

2. 分形多孔介质三维网络模型

2.1. 多孔介质孔隙结构的分形理论

1985 年 Katz 和 Thompson 首次用显微图像数据

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932010) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: yubomimg2003@yahoo.com.cn

成像分析技术确定了砂岩孔隙结构的分形性质^[10]. 他们的实验结果表明:绝大多数多孔砂岩样品都具有分形孔隙空间,其自相似结构的标度区间达到3—4个数量级,其尺度为1 nm到 10^4 nm,其孔隙结构的分维值为2.55—2.85. 此后,Wong^[11]用小角X射线衍射方法所得到的结果与上述结果基本相符.

基于多孔介质的孔隙具有自相似结构的事实,Yu等^[12,13]认为在自相似结构的区间 $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ 内,多孔介质的孔隙尺寸应满足分形幂律分布,其尺寸在 $(\lambda, \lambda_{\max})$ 范围内孔隙累积数目为

$$N(L \geq \lambda) = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda} \right)^{D_f}, \quad (1)$$

式中 D_f 为孔隙大小的分维, $\lambda_{\max}$ 为多孔介质的最大孔隙尺寸. 显然多孔介质样品的孔隙总数目为

$$N_{\text{total}} = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{D_f}, \quad (2)$$

式中 $\lambda_{\min}$ 为多孔介质的最小孔隙尺寸.

由(1),(2)两式容易得到孔隙尺寸分布的概率密度函数^[12]

$$f(\lambda) = D_f \lambda_{\min}^{D_f} \lambda^{-D_f-1}. \quad (3)$$

根据概率密度函数的归一化条件,有

$$\int_{\lambda_{\min}}^{\lambda_{\max}} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{D_f} = 1. \quad (4)$$

显然当满足下列条件时,(4)式成立:

$$\left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \right)^{D_f} = \frac{1}{N_{\text{total}}} \approx 0. \quad (5)$$

(5)式可以作为分形多孔介质的一个判据^[13],其意义在于:对于一个多孔介质样品,若其中最大孔隙尺寸比最小孔隙尺寸大得多,即 $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min}$,或者说样品中的孔隙总数目足够大($N_{\text{total}} \gg 1$),则该样品中存在一个具有标度不变性的区间 $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$,在该区间内孔隙结构是分形的,可以采用分形理论进行描述和研究;否则,就无法用分形理论进行描述和研究,或者会产生较大的误差. 由于实际多孔介质的最小孔隙尺寸具有一定的下限,要满足(5)式则需在多孔介质中找到足够大的最大孔隙尺寸,因而样品的尺寸应该足够大,其中的孔隙总数目应该足够多. 根据Katz等人的实验数据^[10],我们可以估算出具有分形特征的砂岩样品的孔隙总数目,取 $D_f = 2.5$, $\lambda_{\max}/\lambda_{\min} = 10^3$,则由(2)式得孔隙数目大致有 $N_{\text{total}} = 3.2 \times 10^7$,可见对于实际多孔介质,只要样品尺寸足够大,(5)式就能够近似成立,分形理论和方法就能够用来分析多孔介质的性质.

2.2. 分形多孔介质的三维网络模型

根据上述多孔介质孔隙结构的分形理论,我们提出一个描述多孔介质孔隙尺寸分形分布的三维网络模型:视多孔介质为一个三维正方网络,其网络大小为 L ,正方网络中每一个格点代表孔(pore),孔隙总数目为 $L \times L \times L = L^3$,网络主截面上的孔隙总数目为 L^2 ;两相邻格点之间用圆形直管道连接,称之为喉道(throat),其长度为 l 、直径为 λ ,其喉道总数目为 $3L^2(L-1)$,网络端面上的喉道截面数目为 L^2 . 视喉道直径 λ 按分形幂律随机分布,其分布概率密度函数满足分形幂率分布概率密度函数(3)式,则在区间 $(\lambda_{\min}, \lambda)$ 内的喉道直径分布函数为

$$F(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda} \right)^{D_f}. \quad (6)$$

由于我们采用 $F(\lambda)$ 描述喉道二维截面尺寸的分布情况,故将二维截面上的喉道数目 L^2 视为(2)式中的孔隙总数 N_{total} ,即 $N_{\text{total}} = L^2 = \left(\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \right)^{D_f}$,式中 D_f 的取值范围为 $0 < D_f < 2$.

令喉道直径比 $\gamma = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$,则有

$$\gamma = L^{2/D_f}. \quad (7)$$

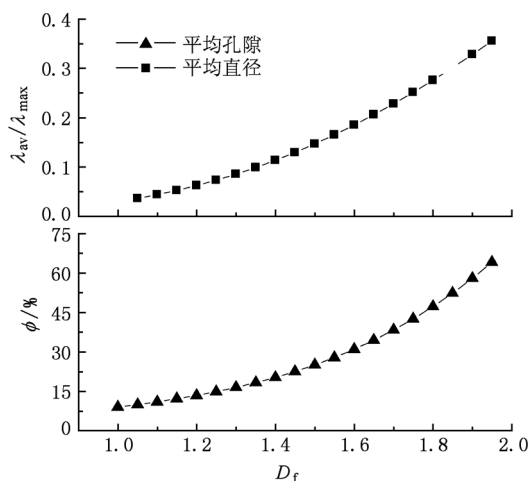


图1 λ_{av} 和 ϕ 随孔隙尺寸分布分维 D_f 的变化

采用连续分布随机变量的直接抽样方法,可以得到满足(6)式的随机喉道直径序列

$$\begin{aligned} \lambda_i &= \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \cdot \frac{\lambda_{\max}}{(1 - \xi_i)^{1/D_f}} \\ &= \frac{\lambda_{\max} L^{-2/D_f}}{(1 - \xi_i)^{1/D_f}}, \quad (\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}), \end{aligned} \quad (8)$$

式中 ξ_i 为在 $[0,1]$ 区间均匀分布的随机数序列. 方

程(8)的数学基础见附录,也可见文献[14,15].

由(3)式可以计算该模型孔隙结构的统计参数,如平均孔隙直径为

$$\lambda_{av} = \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \lambda f(\lambda) d\lambda = \frac{D_f}{D_f - 1} \lambda_{max} (L^{-2/D_f} - L^{-2}). \quad (9)$$

沿网络主截面的平均面孔隙度为

$$\begin{aligned} \phi_s &= \frac{A_s}{A} = \frac{\int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{4} \pi \lambda^2 N_{total} f(\lambda) d\lambda}{[(L-1)l]^2} \\ &= \frac{\pi}{4(L-1)^2} \left(\frac{\lambda_{max}}{l} \right)^2 \frac{D_f}{2-D_f} [1 - L^{(2-4/D_f)}], \end{aligned} \quad (10)$$

式中 $A = [(L-1)l]^2$ 为网络主截面面积, l 为喉道长度.

平均体积孔隙度为

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{V_p}{V} = \frac{3(L-1)L^2 \int_{\lambda_{min}}^{\lambda_{max}} \frac{1}{4} \pi \lambda^2 l f(\lambda) d\lambda}{[(L-1)l]^3} \\ &= \frac{3\pi}{4(L-1)^2} \left(\frac{\lambda_{max}}{l} \right)^2 \frac{D_f}{2-D_f} [1 - L^{(2-4/D_f)}]. \end{aligned} \quad (11)$$

图1为网络大小 $L=51$ 、喉道长度 $l=1.0$ 时,平均孔隙直径 λ_{av} 和平均孔隙率 ϕ 随孔隙尺寸分布分维 D_f 的变化,可以看出随着 D_f 的增大,平均孔隙直径 λ_{av} 和平均孔隙度 ϕ 都随之增大,这是因为对于一块具有一定大小的多孔介质样品,其孔隙总数目 N_{total} 和最大孔隙尺寸 λ_{max} 是一定的,根据(2)式,分布分维 D_f 的增大必然导致最小孔隙尺寸 λ_{min} 以及平均孔隙尺寸 λ_{av} 的增大,从而使得孔隙率 ϕ 也随之而增大.

3. 三维分形网络中的两相流模型

以孔隙网络模型为基础研究微观渗流问题一般遵循如下思路^[16,17]: 1) 建立孔隙网络模型. 2) 定义流动规则,如流体动力学方程、黏滞力及毛细力等. 3) 求解流体的压力场方程组. 4) 通过压力场分布求得流体的速度场及流量等.

考虑在上述分形多孔介质三维网络模型中的两相流驱替过程. 设驱替流体的黏滞系数为 μ_1 、被驱替流体的黏滞系数为 μ_2 , 如果两种流体都是不可压缩的,且为非混溶的,不计毛细力及重力作用,其在喉道中的流速有限,可以视为定常流动,满足

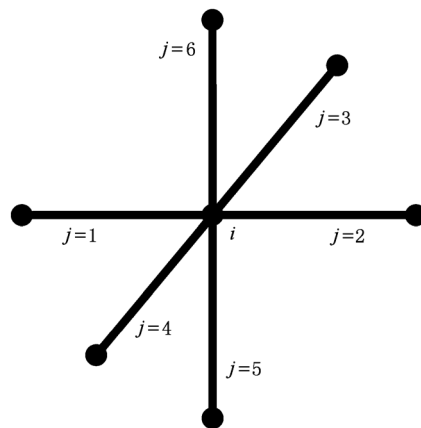


图2 格点 i 及其相邻喉道分布

Hagen-Poiseuille 方程^[17],

$$Q_{ij} = \frac{\pi \lambda_{ij}^4}{128 [\mu_1 x_{ij} + \mu_2 (l - x_{ij})]} \Delta p_{ij}, \quad (12)$$

式中 Q_{ij} 为相邻两格点 i, j 之间喉道中的流体流量, λ_{ij} 为喉道直径, Δp_{ij} 为喉道两端的压力差, x_{ij} 为某时刻驱替流体在喉道所占据的长度 ($0 \leq x_{ij} \leq l$).

对于网络中的格点 i , 存在连续性方程

$$\sum_{j=1}^6 Q_{ij} = 0. \quad (13)$$

如图2所示, (13) 式中 $\sum_{j=1}^6$ 为对与第 i 个格点相连接的所有喉道求和.

将(12)式代入(13)式,得

$$\sum_{j=1}^6 \frac{\pi \lambda_{ij}^4}{128 [\mu_1 x_{ij} + \mu_2 (l - x_{ij})]} (P_i - P_j) = 0. \quad (14)$$

定义喉道的导流率(flow conductance)为

$$g_{ij} = \frac{\pi \lambda_{ij}^4}{128 [\mu_1 x_{ij} + \mu_2 (l - x_{ij})]}. \quad (15)$$

显然导流率 g_{ij} 的倒数即为该喉道的流阻. 当 $x_{ij} = 0$ 时, 喉道中只存在被驱替流体, 其导流率为

$$g_{ij} = \frac{\pi \lambda_{ij}^4}{128 \mu_2 l}. \quad (16)$$

而当 $x_{ij} = l$ 时, 喉道中只存在驱替流体, 其导流率为

$$g_{ij} = \frac{\pi \lambda_{ij}^4}{128 \mu_1 l}. \quad (17)$$

将(15)式代入(14)式,得

$$\sum_{j=1}^6 g_{ij} (P_i - P_j) = 0, \quad (i = 1, 2, \dots), \quad (18)$$

式中 i 遍历网络中的所有格点. 上面的讨论中, 由于考虑到喉道直径通常比孔的直径小得多, 所以流

动阻力主要由喉道决定,故对于孔的流动阻力的影响没有考虑.

4. 网络压力场方程组的求解方法及两相流模拟算法

(18)式为三维网络中两相流体的压力场方程组,现在我们讨论求解该方程组的方法.

若网络中为单相流体,则 g_{ij} 满足(16)式或(17)式,此时(18)式为线性方程组,求解该方程组将得到网络压力场的一个稳态分布.但是对于两相流体,由于导流率 g_{ij} 是时间的函数,因而压力场是非稳态的,(18)式为非线性时间演化方程组(nonlinear time evolution equations).通常精确求解方程组(18)是困难的,目前多采用隐式时间推进算法(ITA)进行数值求解^[18],其隐式时间步长 Δt 有如下两种取法:

1) 固定时间步长法(fixed time step method)

将两相流驱替的时间演化过程划分为许多相等的时间间隔 $\Delta t_k (k=1, 2, \dots)$,若 Δt_k 足够小,则在 Δt_k 时间内可以认为压力场是似稳的,此时方程组(18)可以近似认为是线性的,因而容易求得压力场分布.然后根据压力场分布求得网络中流体的流速分布 v_{ij} ,再由时间间隔 Δt_k 可以得到两相流交界面在各喉道中的推进距离 $\Delta x_{ij} = v_{ij} \cdot \Delta t_k$,再根据 Δx_{ij} 值对各个孔喉的导流率 g_{ij} 进行修正,接着再求解下一个时间间隔的压力场分布,从而使得导流率继续得到修正,如此反复进行,即可将两相流驱替的整个时间演化过程求解出来.该方法的难度在于如何选取合适的时间间隔 Δt_k ,由于网络结构的高度复杂性(各孔喉导流率值相差可达 10^8 数量级),所以只能根据具体的网络参数来选取合适的模拟时间间隔 Δt_k .

2) 自适应时间步长法(adaptive time step method)

为提高计算效率,Chen 等^[17]提出一种时间步长的选取方法.该方法并不设定一个固定的模拟时间步长,而是反复计算网络各喉道中两相流交界面到达下一个格点所需的最短时间 $\Delta t_{\min}$,以 $\Delta t_{\min}$ 作为模拟的时间步长,并按照 $\Delta x_{ij} = v_{ij} \cdot \Delta t_{\min}$ 对其余各孔喉的导流率值进行修正,从而得到新的压力场分布,如此循环,直到驱替流体到达网络的边界.显然,和固定时间步长法比较,本方法采用的模拟时间步长

不是事先确定的,而是根据不同时刻两相流交界面在喉道中位置和流速而定,从而通过每一次求解压力场,都能保证至少一个喉道中的两相流交界面到达下一个格点,并相应将整个驱替前沿向前做一定的推移,因此 $\Delta t_{\min}$ 又称作自适应时间步长(adaptive time step).自适应时间步长法减少了求解压力场方程组的次数,从而大大地提高了模拟计算的速度.

我们采用自适应时间步长法进行模拟,并对压力场方程组(18)采用 Gauss-Seidel 方法求解,并采用逐次超松弛技术^[19](Successive Over-Relaxation Algorithm)以加快迭代收敛速度,其迭代关系式为

$$P_i^{(k+1)} = (1 - \beta)P_i^{(k)} + \frac{\beta \sum_j g_{ij} P_j^{(k)}}{\sum_j g_{ij}}, \quad (19)$$

式中 β 为超松弛参数.本模拟中 $\beta = 1.6$.

综上所述,可以得到采用自适应时间步长方法模拟两相流驱替过程的计算机算法如下:

1) 设稳定性边界条件为:网络中心注入点压力为 $P_0 = 1$,网络边界压力为 0,如图 3 所示.通过(19)式求解被驱替流体在网络中的压力场分布.

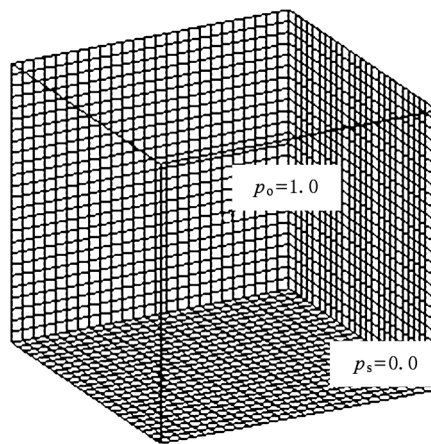


图3 网络及其压力边界条件

2) 以恒定压力 P_0 将驱替流体从网络中心点注入,计算驱替流体到达下一个格点所需的最短时间.

3) 根据最短时间对驱替前沿的各导流率值进行修正.

4) 根据修正后的导流率重新由(19)式计算压力场分布.

5) 由新的压力场分布计算驱替前沿到达下一个格点所需要的时间.

6) 重复步骤 3), 4), 5), 直到驱替前沿到达网络边界,模拟结束.

5. 模拟结果与讨论

5.1. 网络中的压力场分布

模拟采用 $51 \times 51 \times 51$ 规格的三维正方网格,其格点数目为 132651,其喉道数目为 390150. 压力场迭代精度取 1.0×10^{-4} ,自适应时间步长计算精度取 1.0×10^{-5} ,最大喉道直径为 $\lambda_{\max} = 1.0$,孔喉长度 $l = 1.0$,最小喉道直径则与网络模型参数分维值有关,由(7)式可知 $\lambda_{\min} = \lambda_{\max} \cdot L^{-2/D_f}$,此即为(8)式所得喉道直径随机序列的下限.

将驱替流体从网络中心(26,26,26)处以恒定压力 $P_0 = 1.0$ 注入,由(19)式可以求得网络中的压力场分布. 图4为当驱替流体到达网络边界时,经过网络中心的主截面 $z = 26$ 处压力场及其等压线分布.

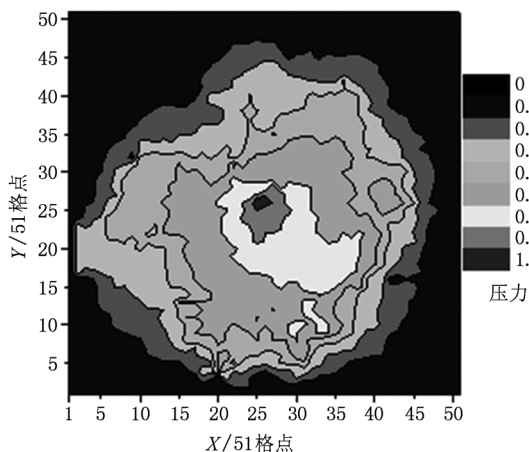


图4 当驱替流体到达网络边界时的等压线分布 ($M = 1000.0$, $D_f = 1.6$, $\gamma = 136.3$)

5.2. 不同孔隙分维参数下的黏滞指进型

参数 D_f 的取值对网络的孔隙结构具有较大影响. 当 D_f 较大时,由(2)式可知孔隙尺寸分布函数 $f(\lambda)$ 所在的区间 $(\lambda_{\min}, \lambda_{\max})$ 较窄,因此各喉道直径相差不大. 而当 D_f 较小时,各喉道直径有较大差异. Katz 和 Thompson 测得孔隙尺寸的分布维数为 2.55—2.85^[10],若为各向同性介质,则沿该介质某一横切面的孔隙截面尺寸分布维数为 1.55—1.85.

图5为3个不同孔隙分维条件下的两相流驱替过程模拟结果,图中驱替流体注入口位于网络的中心,黑色区域为模拟结束时驱替流体所占据的空间,网络中的其余部分则占据着被驱替流体(图中未用颜色标出). 图5(a)孔隙分维参数为 $D_f = 3.0$,此时两相流的驱替前沿明显呈十字星生长,驱替流体沿从网络中心出发的、分别垂直于网络端面的三个主轴方向的流速较快,而沿其他非主轴方向的流速则较慢. 对于这种生长特性可以做如下解释:由于此时的孔隙分维参数较大,因此各喉道的导流率 g_{ij} 差别不大,由(12)式可知此时各孔喉的流体流量及流速大小主要取决于压力梯度 $\Delta p/L$,由于本模型边界条件为网络中心和网络边界之间的压力差恒定,因此压力梯度沿主轴方向最大,故驱替流体沿主轴方向的流速最大. 图5(b)所示的驱替过程则在十字星结构的四周生长出很多小的分支,这是因为在孔隙分维 $D_f = 1.7$ 的条件下,各孔喉导流率的值差异较大,决定流速差异的已不再仅仅是压力梯度,导流率值分布的差异和起伏也起到很关键的作用,由于网络孔喉大小的随机分布,故其分支的生长也呈现随机性. 图5(c)则显示当孔隙分维值更小时的情形,此时分支结构更多更密,驱替前沿呈现出高度复杂的指形结构.

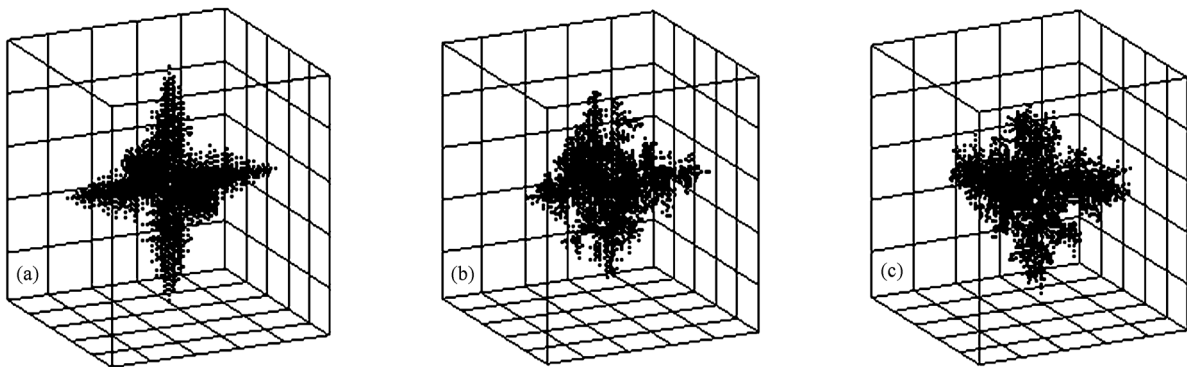


图5 不同孔隙分维条件下黏滞指进型的比较 ($L = 51$, $\lambda_{\max} = 1.0$, $M = 1000.0$) (a) $D_f = 3.0$, $\gamma = 13.7$; (b) $D_f = 1.7$, $\gamma = 102.1$; (c) $D_f = 1.5$, $\gamma = 189.2$

我们采用 Sandbox 方法计算了不同孔隙分维 D_f 情况下指进型的容量维数 D_h . 容量维数的定义为

$$D_h = \frac{\log[N(r)]}{\log r}, \quad (20)$$

式中 r 为区域尺寸, $N(r)$ 为该区域内驱替流体所占据的格点数.

以网络中心 O 点为立方体中心, 以 $2r$ ($r=1, 2, 3, \dots$) 为立方体边长, 数出各立方体内被驱替流体所占据的格点数目 $N(r)$, 作出关于 $\log(N)$ - $\log(r)$ 的双对数坐标图 (如图 6 所示), 并对数据进行线性拟合.

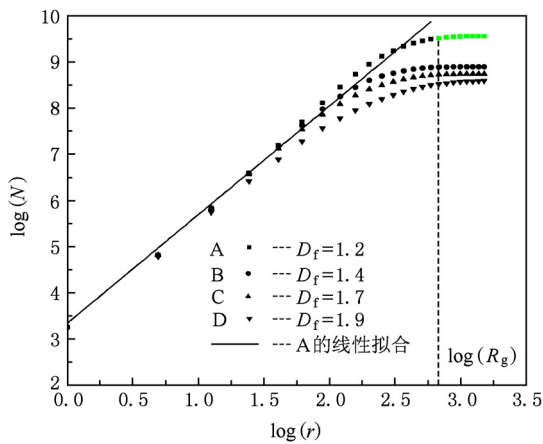


图 6 计算各指进型的容量维数(A 型 $D_f=1.2$, B 型 $D_f=1.4$, C 型 $D_f=1.7$, D 型 $D_f=1.9$)

由于驱替前沿到达网络边界模拟结束, 因此在接近网络边界时, $N(r)$ 即趋于饱和, 故作线性拟合时这部分数据可以剔除, 其方法是, 定义一个回转半径 R_g , $R_g^2 = \sum_{i=1}^N r_i^2 / N$, 则拟合对 $1 \leq r \leq R_g$ 范围内的数据进行, 所得到拟合直线的斜率即为指进型的容量分维值 D_h . 我们得到这 4 种指进型的容量分维值 D_h 随孔隙分布分维值 D_f 的变化关系如图 7 所示.

由图 7 可以看出, 随着网络孔隙尺寸分维值 D_f 的增大, 两相流前沿驱替指进的分维值 D_h 逐渐减小. 这是因为小 D_f 值的网络孔隙尺寸分布更加的无序, 所得到的指进型分支更多, 也更加复杂, 因而其容量分维值也更大. 通过曲线拟合, 我们得到指进型容量分维 D_h 和网络孔隙分布分维 D_f 的定量关系为

$$D_h = 2.56 D_f^{-0.47}. \quad (21)$$

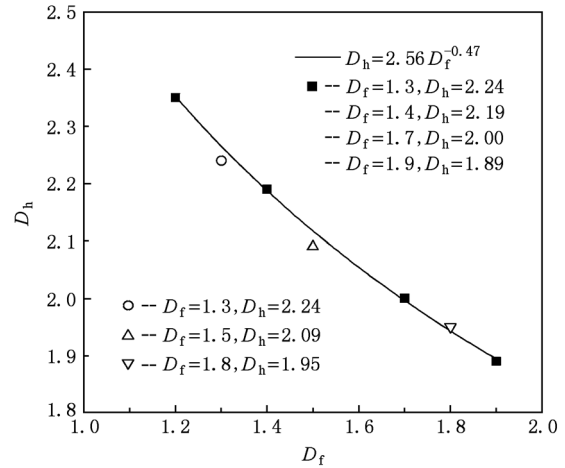


图 7 指进型容量维数 D_h 随分布分维 D_f 的变化

为了验证 (21) 式, 我们通过模拟得到了分布分维 D_f 分别为 1.3, 1.5, 1.8 时的另外 3 个指进型容量分维值, 分别为 2.24, 2.09, 1.95, 在图 7 中用空心点表示, 可以看出图 7 中的数值模拟结果和公式 (21) 较符合.

5.3. 不同黏滞比参数下的黏滞指进型

被驱替流体和驱替流体的黏滞系数之比称为黏滞比 M , 它反映两相流体的性质. 模拟结果显示, 黏滞比 M 对两相流驱替的行为和驱替前沿的形状产生很大的影响.

图 8(a) 为 $M=1.0$ 时两相流驱替模拟结果, 此时两相流驱替前沿表面相对光滑, 基本呈球形, 驱替是稳定的, 没有黏滞指进现象产生, 这与 Muskat 渗流模型^[2]所得结论是一致的. 图 8(b) 为当 M 值增大到 10.0 时的驱替前沿, 其表面不再光滑, 而是逐渐生长出一些分支, 呈现出指进生长的趋势. 当 M 值为 100.0 时, 驱替前沿的形状更加复杂, 分支更多更密 (如图 8(c) 所示), 而当黏滞比 M 继续增加到 1000.0 时 (图 8(d)), 其指进型和图 8(c) 类似. 由此可见, 当黏滞比 $M \leq 1.0$ 时, 即驱替流体黏滞系数不小于被驱替流体黏滞系数时, 驱替前沿为相对光滑曲面, 属于稳定驱替; 当 $1.0 < M \leq 10.0$ 时, 则是从稳定驱替到非稳定驱替的过渡区, 驱替前沿介于光滑和粗糙之间; 当 $10.0 < M \leq 100.0$ 时, 则是黏滞指进发生和发展阶段, 驱替前沿呈现复杂的分支结构; 而当 $M > 100.0$ 时, 其指进型的分支结构已得到充分发育, 驱替前沿与 DLA 生长所得到的图形很相似.

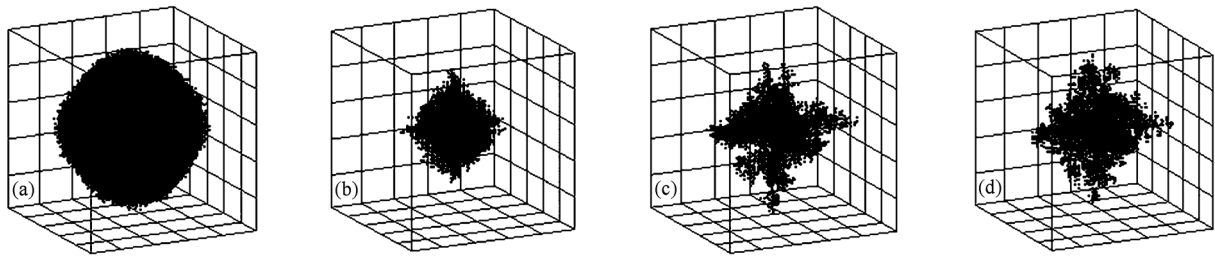


图8 不同黏滞比黏滞指进型的比较($L=51, D_f=1.8, \lambda_{\max}=1.0$) (a) $M=1.0$; (b) $M=10.0$; (c) $M=100.0$; (d) $M=1000.0$

根据模拟数据,我们计算了图8中4种黏滞指进型的相关参数,如表1所示. 计算结果表明,当 $M=1.0$ 时驱替流体的回转半径与网格半宽比值为0.64,而一个均匀球体的回转半径与其半径比值为 $R_g/R=3/5=0.60$,这两者十分接近,这说明当黏滞比 $M=1.0$ 时,其球形驱替前沿是均匀密实的;而其他三种指进型 R_g/R 值则要小得多,这说明距离网络中心较远处的驱替流体不是均匀密实的,具有复杂的分支结构. 从图9可以看出: $\log(N)-\log(r)$

表1 图8指进型参数及计算结果

M	网络半宽 R	占据格 点数 N	回转半径 R_g	R_g/R	$\log(R_g)$	D_h
1.0	25	36529	16.15	0.64	2.78	2.62
10.0	25	4048	8.32	0.33	2.11	2.29
100.0	25	3687	10.97	0.44	2.40	2.07
1000.0	25	3517	11.39	0.46	2.43	1.93

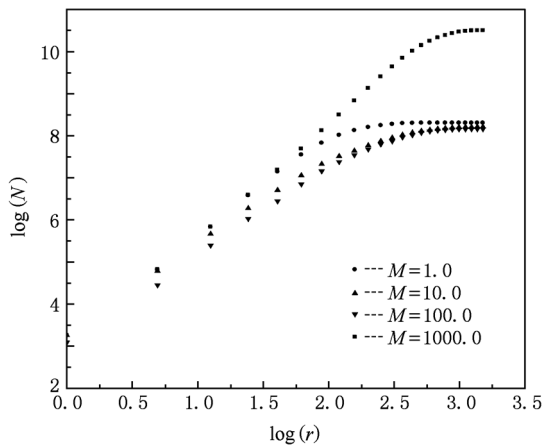


图9 计算不同黏滞比指进型容量维数 D_h

双对数图均以 $\log(R_g)$ 为转折点,其左边的数据点线性度较好,其右边基本上是平直的,可以近似认为所有被驱替流体占据的格点均在回转半径 R_g 的范围之内,故在 $1 \leq r \leq R_g$ 这段线性度较好的范围

内,有

$$D_h = \frac{\log(N/N_1)}{\log R_g}, \quad (22)$$

式中 N_1 为 $r=1$ 处被驱替流体所占据的格点数目. 由(22)式我们得到图8中4种指进型的容量分维值分别为2.61, 2.39, 2.06, 2.02. 表1中容量分维值 D_h 是对图9中数据进行线性拟合的结果,可以看出这两种计算容积分维的方法其结果很接近.

计算结果表明,指进型的容量分维值 D_h 随着黏滞比 M 的增大而减小,如图10所示,在 $1.0 < M < 100.0$ 范围这种下降很明显,而在 $100.0 < M < 1000.0$ 范围其下降趋势逐渐变缓,这与我们对图8中指进型进行分析所得到的结果是完全一致的. 对图10中数据点进行曲线拟合,得到指进型容量分维 D_h 和黏滞比 M 之间的关系为

$$D_h = 2.58M^{-0.045}. \quad (23)$$

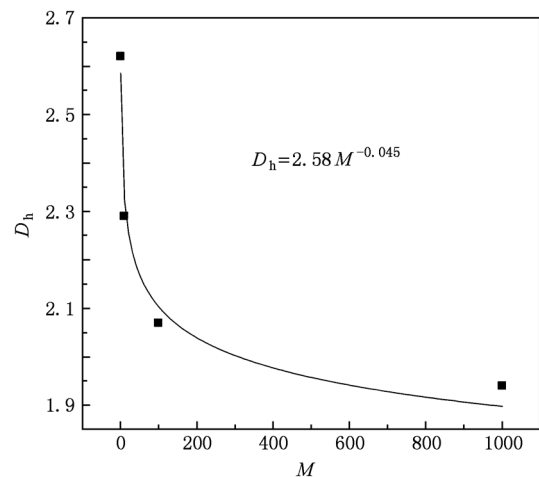


图10 指进型容量维数 D_h 随黏滞比 M 的变化

6. 结 论

本文基于多孔介质孔隙尺寸满足分形分布的

事实,提出了一个描述多孔介质孔隙尺寸满足分形分布的三维网络模型,并在此基础上得到了网络两相流驱替模型,通过对网络压力场方程组的求解,实现了网络中两相流驱替过程的计算机模拟,研究了网络参数分布分维 D_f 和两相流参数黏滞比 M 对两相流驱替过程稳定性的影响,发现指进型容量维数 D_h 随着孔隙分布分维 D_f 以及黏滞比 M 的增大而减小,并通过实验数据拟合得到了 D_h 和 D_f 以及 M 之间的定量关系(21)式和(23)式.

附录

由方程(4)可以得到孔隙尺寸分布在 $\lambda_{\min}$ — λ 之间的分布函数 $F(\lambda)$ 为

$$F(\lambda) = \int_{\lambda_{\min}}^{\lambda} f(\lambda) d\lambda = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda} \right)^{D_f}, \quad (\text{A1})$$

方程(A1)表明:当 $\lambda = \lambda_{\max}$ 时, $F(\lambda) \cong 1$, 这是因为通常情

况下 $\lambda_{\max} \gg \lambda_{\min}$; 当 $\lambda = \lambda_{\min}$ 时, $F(\lambda) = 0$. 所以, $F(\lambda)$ 的数值在 0—1 之间. 由于在多孔介质里, 孔隙大小满足分形分布, 并且孔隙随机存在于介质中. 所以, 我们可以把 $F(\lambda)$ 看作是一个在 0—1 之间的随机数系列. 设 ξ 为在 $[0, 1]$ 区间均匀分布的随机变量系列, 令 $\xi = F(\lambda) = 1 - \left(\frac{\lambda_{\min}}{\lambda} \right)^{D_f}$, 解得^[20]

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{\min}}{(1 - \xi_i)^{1/D_f}}, \quad (\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}), \quad (\text{A2})$$

方程(A2)为孔隙以及大小的概率模型, 该模型已被用来对于多孔介质渗透率的蒙特卡罗模拟^[21]和分形粗糙表面的模拟^[20]以及纳米流体热导率的蒙特卡罗模拟^[22].

由于本模型采用最大孔隙尺寸 $\lambda_{\max}$ 和网络大小 L 作为模型参数, 故方程(A2)可以改写为

$$\lambda_i = \frac{\lambda_{\min}}{\lambda_{\max}} \cdot \frac{\lambda_{\max}}{(1 - \xi_i)^{1/D_f}} = \frac{\lambda_{\max} L^{-2/D_f}}{(1 - \xi_i)^{1/D_f}}, \quad (\lambda_{\min} \leq \lambda_i \leq \lambda_{\max}), \quad (\text{A3})$$

方程(A3)即为方程(8), 其中利用了方程(7).

- [1] Bensimon D, Kadanoff L P, Liang S 1996 *Rev. Mod. Phys.* **58** 977
- [2] Scheidegger A E 1974 *The Physics of Flow through Porous Media* (Toronto: Univ. of Toronto Press) p236
- [3] King P R 1987 *Phys. A: Math. Gen.* **20** 529
- [4] Tian J P, Yao K L 2001 *Chin. Phys.* **10** 128
- [5] Luo Y Y, Zhan J M, Li M X. 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2306 (in Chinese) [罗莹莹、詹杰民、李毓湘 2008 物理学报 **57** 2306]
- [6] Ferer M, Bromhal G S, Simth D H 2009 *Phys. Rev. E* **80** 011602
- [7] Xu Y S 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 626 (in Chinese) [许友生 2003 物理学报 **52** 626]
- [8] Huang G-X, Liu Y, Wu B-Z, Xu Y-S 2005 *Chin. Phys.* **14** 2046
- [9] Zhang T, Li D L, Lu D T 2009 *Sci. China G* **39** 1348 (in Chinese) [张挺、李道伦、卢德唐 2009 中国科学 **G 39** 1348]
- [10] Katz A J, Thompson A H 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 1325

- [11] Wong P Z 1988 *Physics Today* **41** 24
- [12] Yu B M, Li J H 2001 *Fractals* **9** 365
- [13] Yu B M, Chen P 2002 *Int. J. Heat Mass Transfer* **45** 2983
- [14] Yu B M 2008 *Appl. Mech. Rev.* **61** 050801
- [15] Yu B M 2009 *Chinese Mechanics Digest.* **23** 1 (in Chinese) [郁伯铭 2009 中国力学文摘 **23** 1]
- [16] Valvatne P, Piri M, Lopez X 2005 *Transport in Porous Media* **58** 23
- [17] Chen J D, Wilkinson D 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 1892
- [18] Peyret R 1996 *Handbook of computational fluid mechanics* (New York: Academic Press Limited) p198
- [19] Xu S L 1995 *Common Algorithms for Computers* (Beijing: Tsinghua Press) p95 (in Chinese) [徐士良 1995 计算机常用算法 (北京: 清华大学出版社) 第 95 页]
- [20] Yu B M, Zou M Q, Feng Y J 2005 *International Journal of Heat and Mass Transfer* **48** 2787
- [21] Zou M Q, Yu B M, Feng Y J, Xu P 2007 *Physica A* **386** 176
- [22] Feng Y J, Yu B M, Xu P, Zou M Q, 2008 *J. Nanoparticle Research* **10** 1319

Numerical simulations of immiscible two-phase flow displacement based on 3D network model for fractal porous media *

Zhao Ming¹⁾ Yu Boming^{2)†}

1) (School of Physics Science and Technology, Yangtze University, Jingzhou 434023, China)

2) (School of Physics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

(Received 17 May 2010; revised manuscript received 26 December 2010)

Abstract

In order to describe the pore scale fractal distribution, we present a 3D network model for fractal porous medium in this paper. According to the proposed model we simulate the immiscible two-phase flow displacement in a medium and study the viscous fingering pattern of displacement front influenced by the fractal dimension D_f for pore size distribution and viscosity ratio M . The simulation results show that the capacity dimension D_h of the viscous fingering pattern decreases with D_f and M increasing, and their quantitative relationship is derived by fitting the obtained data.

Keywords: porous media, 3D network, viscous fingering, immiscible two-phase flow displacement

PACS: 81.05. Rm, 05.45. Df, 47.20. Gv

* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 10932010).

† Corresponding author. E-mail: yuboming2003@yahoo.com.cn