

强迫耗散与 β 效应地形效应作用下的 非线性 Rossby 波包*

宋 健 杨联贵 刘全生†

1) (内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

2) (内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

(2010 年 12 月 10 日收到; 2010 年 12 月 20 日收到修改稿)

正压流体中, 从有外源的准地转位涡方程出发采用摄动方法和时空伸长变换推导了具有 β 效应、地形效应和外源的强迫 Rossby 孤立波包方程, 得到孤立 Rossby 波振幅的演变满足带有地形与外源强迫的非齐次非线性 Schrödinger 方程的结论. 通过分析孤立 Rossby 波包振幅的演变, 指出了 β 效应、地形效应以及外源都是诱导 Rossby 孤立波产生的重要因素, 说明了在地形强迫效应和非线性作用相平衡的假定下, Rossby 孤立波包振幅的演变满足非齐次非线性 Schrödinger 方程, 给出在切变基本气流下地形和正压流体中 Rossby 波的相互作用.

关键词: Rossby 波包, β 效应, 地形, Schrödinger 方程

PACS: 47.35.Fq, 92.10.Ei, 92.70.Cp

1. 引言

大气环流持续性的异常常常会造成大范围的灾害性天气, 而大气阻塞形势的出现是造成环流持续异常的重要原因之一, 因此对于阻塞的研究有助于了解灾害性天气产生的成因. 自从阻塞现象被发现以来, 阻塞问题一直是大气动力学研究的核心问题, 对于阻塞大振幅的系统, 用线性理论加以研究是有局限性的^[1], 非线性科学的发展, 阻塞动力学的研究得到了迅速发展, 提出了阻塞的局地理论, 如 McWilliams^[2] 提出的 modons 理论, Redekopp^[3], Malguzzi 和 Malanotte-Rizzoli^[4] 提出的 KdV 型 Rossby 孤立波理论, 现在几乎所有的理论研究都是以 modons 理论和 KdV (mKdV) 型 Rossby 孤立波理论为动力学依据. 而对 KdV 型 Rossby 孤立波, 由于它要满足长波近似, 即纬向波数 $k \rightarrow 0$ 或 $\frac{Ly}{Lx} \ll 1$ 的情况, 在实际中, 大振幅 Rossby 波, 长波近似严格来讲并不成立. 谭本植、伍荣生^[5,6] 利用多重尺度法给出了强迫耗散作用下的 Rossby 孤立波包, 罗德海、纪立人^[7] 提出了偶极子阻塞形成的新理论, 他们虽然

给出了 Rossby 孤立波包的研究, 但他们没有考虑 β 平面近似中 β 参数是纬度变量 y 的非线性函数. Charney 和 Straus^[8] 基于准地转位涡度方程构造了一个 β 平面通道中考虑地形、非绝热加热和摩擦的正压大气模式, 这项工作开创了大气多平衡态非线性动力学的研究. 封国林^[9-13] 建立了南方涛动与厄尔尼诺循环统一的海-气振荡子的随机动力学模型. 孤立波解在非线性问题中占有重要地位, 给出了许多求孤立波解的方法, 如 Hirota's 双线性方法、椭圆函数展开法以及数值方法^[14,15] 等被广泛应用. 本文在强迫耗散与 β 效应地形效应的基础上得到大振幅 Rossby 波包满足非线性 Schrödinger 方程.

2. 方程的推导

2.1. 控制方程与边界条件

Rossby 波为大尺度大气运动, 它满足准地转正压涡度方程的无量纲形式^[16-18]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times (\nabla^2 \psi + \beta(y)y + h(x, y)) = -K \nabla^2 \psi, \quad (1)$$

* 内蒙古自然科学基金 (批准号: 2009ZD01) 和内蒙古教育厅基金 (批准号: NJZY08005) 资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: zhangqc@ustc.edu.cn

这里, ψ 是流函数, ∇^2 为二维 Laplace 算子, 定义为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2)$$

β 平面近似取为 $\beta(y)$, β 即是纬度变量 y 的函数, $h(x, y)$ 是地廓线, K 是耗散强度, 取正的常数.

侧边界条件为刚壁条件的无量纲形式, 取

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (3)$$

2.2. 带有强迫项的非线性 Schrödinger 方程

取流函数为

$$\psi = - \int^y (\bar{u}(s) - c_0) ds + \varepsilon \tilde{\psi}, \quad (4)$$

其中, c_0 是常数, 它是切变气流中线性长波的相速度, $\varepsilon \ll 1$ 它是无量纲 Rossby 数, 表征非线性的强弱, $\tilde{\psi}$ 是扰动流函数.

将(4)式代入方程(1)与边界条件(3)同时略去扰动流函数的弯号, 得到扰动流函数的方程与边界条件

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon \nabla^2 \psi + h) \\ + \varepsilon ((\beta(y)y)' - \bar{u}'') \frac{\partial \psi}{\partial x} + \varepsilon J[\psi, h] \\ + \varepsilon^2 J[\psi, \nabla^2 \psi] = -\varepsilon K \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (6)$$

这里 $(\beta(y)y)'$ 是 $\beta(y)y$ 对纬度变量 y 的一阶导数,

$\bar{u}''$ 是 $\bar{u}(y)$ 对 y 的二阶导数, $J[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} -$

$\frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ 是二维 Jacobi 算子.

为了使地形强迫、耗散和非线性之间达到平衡设

$$\begin{aligned} h(x, y) = \varepsilon^3 \Omega(x, y), \\ K = \varepsilon^2 \lambda, \quad \lambda > 0, \end{aligned} \quad (7)$$

由于地球大气运动多时空尺度的为此除了快变量 x, t 外, 可以引进如下慢时空变量^[2]:

$$T_1 = \varepsilon t, \quad T_2 = \varepsilon^2 t; \quad X_1 = \varepsilon x, \quad X_2 = \varepsilon^2 x. \quad (8)$$

可作如下变换:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial X_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial X_2}. \end{aligned} \quad (9)$$

将(7), (9)式代入方程(5)得

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi + P(y) \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ &+ \varepsilon \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_1} \nabla^2 \psi \right. \\ &+ (\bar{u} - c_0) \left(\frac{\partial}{\partial X_1} \nabla^2 \psi + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} \right. \\ &+ P(y) \frac{\partial \psi}{\partial X_1} \left. \right) + J[\psi, \nabla^2 \psi] \left. \right\} \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ 2 \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial}{\partial T_2} \nabla^2 \psi + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} \right. \right. \\ &+ 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_2} \left. \right) + (\bar{u} - c_0) \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_1^2} + 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_2} \right) \right. \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial X_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_2} \nabla^2 \psi + P(y) \frac{\partial \psi}{\partial X_2} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \left. \right) \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial X_1} \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial X_1} \nabla^2 \psi + 2 \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} \\ &- 2 \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial X_1} \left. \right\} + \varepsilon^3 J[\psi, \Omega] \\ &= -\varepsilon^2 \lambda \nabla^2 \psi, \end{aligned} \quad (10)$$

其中 $P(y) = (\beta(y)y)'' - \bar{u}''$.

扰动流函数 ψ 按 WKB 方法展开^[19]

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \cdots, \quad (11)$$

将(11)式代入方程(10)与边界条件(6)得到各阶扰动问题的方程和边界条件.

对于 $O(\varepsilon^0)$ 阶, 有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x} \right) \nabla^2 \psi_0 + P(y) \frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (13)$$

假设 ψ_0 有如下形式的解:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= A(X_1, X_2; T_1, T_2) e^{i(kx - \omega t)} \\ &\times \Phi_0(y) + c. c., \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $c. c.$ 表示它前项的共轭, A 为复振幅, k 为纬向波数, ω 为波频率.

将(14)式代入(12), (13)式得

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 + \frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \right) \Phi_0 = 0, \quad (15)$$

这里 $c = \frac{\omega}{k}$,

$$\Phi_0(0) = \Phi_0(1) = 0. \quad (16)$$

方程(15)中, Kuo^[20]指出, 当 β 是常数, 基本气流满足条件

$$P(y) = \beta - \bar{u}'' = 0, \quad (17)$$

其中 $y \in (0, 1)$, 时, 大气扰动不稳定, 这时 c 为复

数. 在本文中,假定在区域(0,1) 内条件(17) 式不成立,这时 c 为实数. 在大气中,大尺度 Rossby 波有 $\bar{u} - c_0 - c > 0$,对于阻塞系统有 $\bar{u} - c_0 > c$,因此 $\bar{u} - c_0 - c \neq 0$.

对于 $O(\varepsilon^1)$ 阶,有

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi_1 + P(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \equiv F_1, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (19)$$

这里

$$F_1 = \frac{P(y) \Phi_0}{\bar{u} - c_0 - c} \left(\frac{\partial A}{\partial T_1} + c_1 \frac{\partial A}{\partial X_1} \right) e^{i(kx - \omega t)} + ik \left(\frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \right)_y A^2 \Phi_0^2 e^{2i(kx - \omega t)} + c. c.,$$

其中 $c_1 = c + \frac{2k^2(\bar{u} - c_0 - c)^2}{P(y)}$, $\left(\frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c}\right)_y$ 表示对变量 y 的一阶导数.

$$\begin{aligned} & \text{利用消去长期项 } \int_0^1 \frac{\Phi_0}{\bar{u} - c_0 - c} F_1 dy = 0 \text{ 得} \\ & \int_0^1 \frac{P(y) \Phi_0^2}{(\bar{u} - c_0 - c)^2} dy \frac{\partial A}{\partial T_1} \\ & + \int_0^1 c \frac{P(y) \Phi_0^2}{(\bar{u} - c_0 - c)^2} dy \frac{\partial A}{\partial X_1} \\ & + \int_0^1 2k^2 \Phi_0 dy \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

令 $I = \int_0^1 \frac{P(y) \Phi_0^2}{(\bar{u} - c_0 - c)^2} dy$, $I_1 = \int_0^1 2k^2 \Phi_0 dy$, 方程(19) 简化为

$$\frac{\partial A}{\partial T_1} + c_g \frac{\partial A}{\partial X_1} = 0, \quad (21)$$

其中 $c_g = c + \frac{I_1}{I}$, 在 $O(\varepsilon^1)$ 阶问题中波振幅 $A(X_1, X_2; T_1, T_2)$ 以 c_g 速度传播,从物理意义上讲 c_g 是波的群速度. 此时方程(18) 化为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi_1 + P(y) \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \\ & = ikA^2 Q(y) e^{2i(kx - \omega t)} + c. c., \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $Q(y) = \left(\frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c}\right)_y \Phi_0^2$.

设 ψ_1 有如下形式的解:

$$\psi_1 = B(X_1, X_2; T_1, T_2) e^{2i(kx - \omega t)} \Phi_1(y) + c. c., \quad (23)$$

将(23)式代入方程(19)与(22)得

$$\begin{aligned} & B \left(\frac{d^2}{dy^2} - 4k^2 + \frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \right) \Phi_1 \\ & = A^2 \frac{Q(y)}{2(\bar{u} - c_0 - c)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0. \quad (25)$$

在方程(24)中, A, B 是两个相互联系的变量,由于 A 和 B 都是慢变量 X_1, X_2, T_1, T_2 的函数,并且 B 与 A^2 成比例. 不妨设 $B = A^2$, 则

$\psi_1 = A^2(X_1, X_2; T_1, T_2) e^{2i(kx - \omega t)} \Phi_1(y) + c. c.$, 对于 $O(\varepsilon^2)$ 阶,有

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\bar{u} - c_0) \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi_2 \\ & + P(y) \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \equiv F_2, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} F_2 = & \frac{P(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \Phi_0 \left(\frac{\partial A}{\partial T_2} + c_1 \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) e^{i(kx - \omega t)} \\ & + ik(2c_g + c + 3c_0 - 3\bar{u}) \Phi_0 \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} e^{i(kx - \omega t)} \\ & + ik|A|^2 A \left\{ \frac{Q(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \frac{d\Phi_0}{dy} + \Phi_0 \Phi_1 Q(y) \right. \\ & + \left. \frac{\Phi_0}{2} \left(\frac{Q(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \right)_y \right\} e^{i(kx - \omega t)} \\ & - \left\{ (\bar{u} - c_0) \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \lambda \frac{P(y)}{\bar{u} - c_0} \Phi_0 A \right\} e^{i(kx - \omega t)} \\ & + c. c. + \square, \end{aligned}$$

$\square$ 表示与 $e^{\pm 2i(kx - \omega t)}$ 和 $e^{\pm 3i(kx - \omega t)}$ 有关的其他项.

利用消去长期项 $\int_0^1 \frac{\Phi_0}{\bar{u} - c_0 - c} F_2 dy = 0$ 得

$$\begin{aligned} & i \left(\frac{\partial A}{\partial T_2} + c_1 \frac{\partial A}{\partial X_2} \right) + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial X_1^2} + \delta |A|^2 A \\ & + i\gamma \lambda A = i \frac{\partial G}{\partial x}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\alpha = -\frac{I_2}{I}$, $\delta = -\frac{I_3}{I}$, $\gamma = \frac{I_4}{I}$,

$$I_2 = k \int_0^1 \frac{2c_g + c + 3c_0 - 3\bar{u}}{\bar{u} - c_0 - c} \Phi_0^2 dy,$$

$$\begin{aligned} I_3 = & k \int_0^1 \left\{ \frac{\Phi_0 Q(y)}{(\bar{u} - c_0 - c)^2} \frac{d\Phi_0}{dy} + \frac{\Phi_0 \Phi_1 Q(y)}{(\bar{u} - c_0 - c)^2} \right. \\ & + \left. \frac{\Phi_0^2}{2(\bar{u} - c_0 - c)^2} \left(\frac{Q(y)}{\bar{u} - c_0 - c} \right)_y \right\} dy, \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{P(y) \Phi_0^2}{(\bar{u} - c_0)(\bar{u} - c_0 - c)} dy,$$

$$G = \frac{\Omega}{I} \int_0^1 \frac{\bar{u} - c_0}{\bar{u} - c_0 - c} \Phi_0 dy.$$

方程(28)中的系数 α, δ 分别是频散系数和 Landau 系数,它们与 $\beta(y), \bar{u}(y)$ 有关.

方程(28)就是描述了强迫耗散与 β 效应地形效应下 Rossby 波包振幅演变的非齐次非线性 Schrödinger 方程,它反映了 Rossby 波的特性. 作坐标变换^[19]

$$T = T_2, X = \frac{1}{\varepsilon}(X_2 - c_g T_2) = X_1 - c_g T_1, \quad (29)$$

则(28)化为标准的非线性 Schrödinger 方程

$$i \frac{\partial A}{\partial T} + \alpha \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \delta |A|^2 A + i\gamma \lambda A = i \frac{\partial G}{\partial X}. \quad (30)$$

若基本气流不存在切变($\bar{u} = \text{常数}$)时,当 β 是纬度变量 y 的函数, $Q(y) \neq 0$,这时 $\delta \neq 0$,方程(30)仍是非线性 Schrödinger 方程,这说明即使没有基本气流水平切变,只要 β 效应存在, Rossby 波振幅演变也满足非线性 Schrödinger 方程. 只有当基本流无切变, β 是常数时,方程(30)中的非线性项消失. 孤立波的

存在还必须有 $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(y) \Phi_0^2}{(\bar{u} - c)^2} dy \neq 0$,这表示不能产生正压不稳定. 事实上,一旦产生正压不稳定,就不可能保持恒定波型了.

3. 结 论

在正压流体中,应用多重尺度法,从描写 Rossby 波位涡度方程推导出在切变基本纬向流中 β 是纬度变量 y 的函数,地形效应和耗散作用下 Rossby 波包演变满足非齐次非线性 Schrödinger 方程. 这说明大气中 Rossby 波与切变基本气流、 β 效应和地形效应耗散作用,可以使大气中形成 Rossby 包络孤立子,而且这种孤立波是不需要长波近似条件的频散波,它可以解释大气中西移 Modons 最后通过能量频散而崩溃消失. 并进一步说明即使没有基本气流切变,仍由 β 效应诱导非线性出 Rossby 孤立波. 基本气流切变、非线性 β 效应和地形效应显然都是 Rossby 孤立波产生的重要因子.

- [1] Matsuno T 1966 *J. Meteor. Soc. Japan* **44** 25
- [2] McWilliams J 1980 *Dyn. Atmos. Oceans* **5** 43
- [3] Redekopp L G 1977 *J. Fluid Mech.* **82** 725
- [4] Malguzi P, Malanotte Rizzoli 1984 *J. Atmos. Sci.* **41** 2620
- [5] Tan B K, Wu R S 1993 *Sci. in China B* **23** 437 (in Chinese) [谭本植、伍荣生 1993 中国科学 B 辑 **23** 437]
- [6] Tan B K, Wu R S 1995 *Sci. Atmos. Sin.* **19** 299 (in Chinese) [谭本植、伍荣生 1995 大气科学 **19** 299]
- [7] Luo D H, Ji L R 1989 *Sci. in China B* **1** 103 (in Chinese) [罗德海、纪立人 1989 中国科学 B 辑 **1** 103]
- [8] Chaney J G, Straus D M 1980 *J. Atmos. Sci.* **37** 1157
- [9] Feng G L, Dai X G, Wang A H, Chou J F 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 606 (in Chinese) [封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606]
- [10] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林、董文杰、贾晓静、曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
- [11] Feng G L, Gao X Q, Dong W J, Li J P 2008 *Chaos Solitons and Fractals* **37** 487
- [12] Feng G L, Gong Z Q, Zhi R, Zhang D Q 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2745
- [13] Feng G L, Wang Q G, Hou W, Gong Z Q, Zhi R 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2853 (in Chinese) [封国林、王启光、侯威、龚志强、支蓉 2009 物理学报 **58** 2853]
- [14] He W P, Feng G L, Dong W J, Li J P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3258 (in Chinese) [何文平、封国林、董文杰、李建平 2004 物理学报 **53** 3258]
- [15] He W P, Feng G L, Wu Q, Wan S Q, Chou J F 2008 *Non. Pro. Geophys.* **15** 601
- [16] Meng Lu, Lu K L 2000 *Chin. J. Comput. Phys.* **17** 259
- [17] Patrone A, Warn T 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1018
- [18] Warn T, Brasnett B 1982 *J. Atmos. Sci.* **40** 28
- [19] Jeffrey A, Kawahara T 1982 *Asymptotic Methods in Nonlinear Waves Theory* (Melbourne: Pitman Publishing Inc.) p256—266
- [20] Kuo X 1949 *J. Meteor.* **6** 105

Nonlinear Rossby envelope waves under the influence of forcing dissipation and β effect topographic effect^{*}

Song Jian¹⁾ Yang Lian-Gui²⁾ Liu Quan-Sheng^{2)†}

1) (College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

2) (School of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

(Received 10 December 2010; revised manuscript received 20 December 2010)

Abstract

In barotropic fluids, based on the quasi-geostrophic potential vorticity equation, an inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation including topographic forcing and an external source is derived by employing the perturbation method and stretching transforms of time and space. With the inspection of the evolution of the amplitude of Rossby envelope solitary waves, it is found that β effect, topography effect and an external source are the important factors, the solitary Rossby wave is induced though the basic stream function has a shear flow. On the assumption that nonlinear and topographic effects are balanced, an inhomogeneous equation is derived, and the results show that the topography and Rossby waves interact in the barotropic flow. The inhomogeneous nonlinear Schrödinger equation describing the evolution of the amplitude of solitary Rossby envelope solitary waves as the change of Rossby parameter $\beta(y)$ with latitude y , topographic forcing and the external source is obtained.

Keywords: Rossby envelope waves, β effect, topographic, Schrödinger equation

PACS: 47.35.Fq, 92.10.Ei, 92.70.Cp

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2009ZD01), and the Educational Committee of Inner Mongolia, China (Grant No. NJZY08005).

[†] Corresponding author. E-mail: smlqs@imu.edu.cn