

耦合 KdV 方程的约化及求解*

程雪苹^{1)2)†} 李金玉¹⁾ 薛江蓉¹⁾

1) (浙江海洋学院数理与信息学院物理系, 舟山 316004)

2) (上海交通大学物理系, 上海 200240)

(2011 年 4 月 1 日收到; 2011 年 5 月 13 日收到修改稿)

利用 Clarkson 和 Kruskal (CK) 直接方法, 对耦合 KdV 方程进行相似约化, 同时从李群出发对该约化方程作了群论解释. 进一步地, 借助 Ablowitz-Ramani-Segur (ARS) 算法对耦合方程展开 Painlevé 测试, 找到了 3 个 Painlevé 可积模型. 最后通过形变映射法, 求得耦合 KdV 方程的准确解析解.

关键词: 耦合 KdV 方程, CK 直接法, Painlevé 分析法, 准确解析解

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik

1. 引言

KdV 方程

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (1)$$

是一个非常典型的描述浅水波的方程, 当然它也是描述其他许多领域中孤波现象的模型: 如在长波小振幅近似下, 可描写等离子体的磁流体波的运动; 等离子体离子声波; 非谐振晶格的振动; 弹性杆中纵向色散波; 液、气两种混合态的压力波; 管底部部流体的转动等. 到目前为止, 单组份 KdV 方程的各种性质, 包括无穷多对称, 无穷多守恒量, 反散射变换, Painlevé 性质, Bäcklund 变换, Darboux 变换^[1,2]等已被人们所熟知. 不过除了单组份的 KdV 方程, 研究者们近年来还在实际的物理和数学领域发现了一系列不同形式的耦合 KdV 系统, 它们常被用来描述分层流体内部波之间的近共振相互作用, 星际间波的近共振相互作用等等. 而如何利用已知的孤立子理论来探究这些耦合非线性系统的各种性质 (如可积性, 守恒量, Darboux 变换等) 以及它们的孤立子解, 也就逐渐成为研究者们关注的课题之一. 我们知道, 1981 年第一个耦合 KdV 方程^[3]提出的同时, Hirota 和 Satsuma 就求得了该耦合方程的孤立子解和 3 个基本的守恒量; 2006 年, Lou 和他的同事们从两层流体系统出发, 也导出了一耦合 KdV 方

程^[4], 他们还就该耦合 KdV 方程的 Painlevé 可积性和孤立子解进行了详细的分析; 在文献[5]中, 作者利用 Darboux 变换第一次求得了一个耦合 KdV 模型的非奇异复解. 类似的工作还可参阅文献[6—8].

本文我们考虑如下耦合 KdV 方程:

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \epsilon_1 vv_x \\ + \epsilon_2 (uv)_x + \epsilon_3 v_{xxx} = 0, \\ v_t - 6\beta vv_x + \beta v_{xxx} - V_0 v_x \\ + \alpha [\epsilon_1 (uv)_x + \epsilon_2 uu_x + \epsilon_3 u_{xxx}] = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \alpha, \beta, V_0$ 均为任意常数. 在流体力学中, 该方程常用以描述浅层流体中的内引力波运动的两共振相互作用的简正模^[9]. 另外, 方程(2)也可由两层流体模型推导得到, 用以描述很多大气和海洋中的现象, 包括大气阻塞, 海-气相互作用, 大洋环流等^[10].

2. CK 直接法约化耦合 KdV 方程(2)

CK 直接方法是寻求给定非线性方程的相似约化的有效方法之一, 它可以导出各种非线性系统的所有可能的相似约化^[11,12]. 以下我们就利用这种方法来约化耦合 KdV 方程(2).

根据 CK 直接法, 假设

$$\begin{aligned} u &= A_1(x, t) + B_1(x, t)P(\xi(x, t)), \\ v &= A_2(x, t) + B_2(x, t)Q(\xi(x, t)). \end{aligned} \quad (3)$$

* 浙江省自然科学基金 (批准号: Y1100088)、国家自然科学基金 (批准号: 11047155) 和浙江海洋学院校级专项基金资助的课题.

† E-mail: chengxp2005@126.com

式中 A_1, B_1, A_2, B_2 和 ξ 均为关于 x, t 的待定函数. 其实如(3)式的特殊假设完全等价于一般假设

$$\begin{aligned} u &= U(x, t, P(\xi(x, t))), \\ v &= V(x, t, Q(\xi(x, t))). \end{aligned} \quad (4)$$

关于此结论的证明在很多文献中都可以找到^[13], 这里不再累述.

将假设(3)代入耦合 KdV 方程(2), 有

$$\begin{aligned} & B_1 \xi_x^3 P''' + 3\xi_x (\xi_x B_{1x} + B_1 \xi_{xx}) P'' \\ & - 6B_1^2 \xi_x P P' + \epsilon_2 B_1 B_2 \xi_x Q P' \\ & + (\epsilon_2 B_1 A_2 \xi_x + 3B_{1x} \xi_{xx} \\ & + B_1 \xi_t - 6A_1 B_1 \xi_x + B_1 \xi_{xxx} + 3B_{1xx} \xi_x) P' \\ & - 6B_1 B_{1x} P^2 + (B_{1t} + B_{1xxx} - 6B_1 A_{1x} \\ & - 6A_1 B_{1x} + \epsilon_2 B_1 A_{2x} \\ & + \epsilon_2 B_{1x} A_2) P + \epsilon_2 B_1 B_2 \xi_x Q' P \\ & + \epsilon_2 (B_{1x} B_2 + B_{2x} B_1) Q P \\ & + 3\xi_x \epsilon_3 (\xi_x B_{2x} + \xi_{xx} B_2) Q'' + \epsilon_1 B_2^2 \xi_x Q Q' \\ & + (3\epsilon_3 B_{2xx} \xi_x + \epsilon_2 A_1 B_2 \xi_x + \epsilon_1 A_2 B_2 \xi_x \\ & + \epsilon_3 B_2 \xi_{xxx} + 3\epsilon_3 B_{2x} \xi_{xx}) Q' + \epsilon_1 B_2 B_{2x} Q^2 \\ & + (\epsilon_1 B_2 A_{2x} + \epsilon_1 A_2 B_{2x} + \epsilon_2 A_{1x} B_2 \\ & + \epsilon_2 A_1 B_{2x} + \epsilon_3 B_{2xxx}) Q \\ & + \epsilon_3 B_2 \xi_x^3 Q''' + \epsilon_3 A_{2xxx} + A_{1t} + \epsilon_2 A_1 A_{2x} \\ & + \epsilon_2 A_{1x} A_2 + A_{1xxx} + \epsilon_1 A_2 A_{2x} - 6A_1 A_{1x} = 0, \quad (5) \\ & \beta \xi_x^3 B_2 Q''' + 3\beta \xi_x (\xi_x B_{2x} + \xi_{xx} B_2) Q'' \\ & - 6\beta B_2^2 \xi_x Q Q' + \alpha \epsilon_1 B_1 B_2 \xi_x P Q' + (\beta B_2 \xi_{xxx} \\ & + B_2 \xi_t + \alpha \epsilon_1 A_1 B_2 \xi_x - 6\beta A_2 B_2 \xi_x \\ & + 3\beta B_{2xx} \xi_x + 3\beta B_{2x} \xi_{xx} - V_0 B_2 \xi_x) Q' \\ & - 6\beta B_2 B_{2x} Q^2 + \alpha \epsilon_1 B_1 B_2 \xi_x Q P' \\ & + \alpha \epsilon_1 (B_{1x} B_2 + B_{2x} B_1) P Q \\ & + (\epsilon_1 \alpha (B_{2x} A_1 + A_{1x} B_2) + B_{2t} + \beta B_{2xxx} \\ & - 6\beta B_2 A_{2x} - 6\beta A_2 B_{2x} - V_0 B_{2x}) Q \\ & + 3\xi_x \alpha \epsilon_3 (\xi_x B_{1x} + B_1 \xi_{xx}) P'' \\ & + \alpha \epsilon_2 B_1^2 \xi_x P P' \alpha (\epsilon_2 A_1 B_1 \xi_x + 3\epsilon_3 B_{1x} \xi_{xx} \\ & + \epsilon_1 B_1 A_2 \xi_x + \epsilon_3 B_1 \xi_{xxx} + 3\epsilon_3 B_{1xx} \xi_x) P' \\ & + \alpha \epsilon_2 B_1 B_{1x} P^2 + \alpha (\epsilon_3 B_{1xxx} \\ & + \epsilon_1 A_2 B_{1x} + \epsilon_1 A_{2x} B_1 + \epsilon_2 A_{1x} B_1 \\ & + \epsilon_2 B_{1x} A_1) P + \alpha \epsilon_3 B_1 \xi_x^3 P''' + A_{2t} \\ & + \alpha (\epsilon_1 A_{1x} A_2 + \epsilon_1 A_1 A_{2x} + \epsilon_2 A_1 A_{1x} + \epsilon_3 A_{1xxx}) \\ & - 6\beta A_2 A_{2x} + \beta A_{2xxx} - V_0 A_{2x} = 0. \quad (6) \end{aligned}$$

其中上标'表示该函数对 ξ 求导(下同). 由于 P, Q 都只是 ξ 的函数, 不显含 x, t , 所以(5)和(6)式的相容条件是所有 P, Q 的不同阶的导数和幂次的系数

互成比例. 比例系数仅仅是 ξ 的函数. 如(5)式以 P''' 的系数, 即 $B_1 \xi_x^3$ 为调整系数, 那么

$$\epsilon_1 B_2 B_{2x} = \Gamma_1 B_1 \xi_x^3, \quad (7)$$

$$\epsilon_1 B_2^2 \xi_x = \Gamma_2 B_1 \xi_x^3, \quad (8)$$

$$\epsilon_3 B_2 \xi_x^3 = \Gamma_3 B_1 \xi_x^3, \quad (9)$$

$$\epsilon_2 B_1 B_2 \xi_x = \Gamma_4 B_1 \xi_x^3, \quad (10)$$

$$-6B_1 B_{1x} = \Gamma_5 B_1 \xi_x^3, \quad (11)$$

$$-6B_1^2 \xi_x = \Gamma_6 B_1 \xi_x^3, \quad (12)$$

$$\epsilon_2 B_1 B_{2x} + \epsilon_2 B_{1x} B_2 = \Gamma_7 B_1 \xi_x^3, \quad (13)$$

$$3\epsilon_3 B_{2x} \xi_x^2 + 3\epsilon_3 B_2 \xi_{xx} \xi_x = \Gamma_8 B_1 \xi_x^3, \quad (14)$$

$$3B_{1x} \xi_x^2 + 3B_1 \xi_{xx} \xi_x = \Gamma_9 B_1 \xi_x^3, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 A_2 B_{2x} + \epsilon_1 B_2 A_{2x} + \epsilon_2 A_{1x} B_2 \\ & + \epsilon_3 B_{2xxx} + \epsilon_2 A_1 B_{2x} = \Gamma_{10} B_1 \xi_x^3, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \epsilon_1 A_2 B_2 \xi_x + 3\epsilon_3 B_{2xx} \xi_x + \epsilon_3 B_2 \xi_{xxx} = \Gamma_{11} B_1 \xi_x^3, \\ & -6B_1 A_{1x} + \epsilon_2 B_1 A_{2x} + B_{1xxx} + \epsilon_2 A_2 B_{1x} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & + B_{1t} - 6A_1 B_{1x} = \Gamma_{12} B_1 \xi_x^3, \\ & -6A_1 B_1 \xi_x + 3B_{1xx} \xi_x + B_1 \xi_{xxx} + \epsilon_2 A_2 B_1 \xi_x \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & + B_1 \xi_t + 3B_{1x} \xi_{xx} = \Gamma_{13} B_1 \xi_x^3, \\ & \epsilon_3 A_{2xxx} - 6A_1 A_{1x} + \epsilon_1 A_2 A_{2x} + \epsilon_2 A_2 A_{1x} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & + \epsilon_2 A_1 A_{2x} + A_{1t} + A_{1xxx} = \Gamma_{14} B_1 \xi_x^3. \end{aligned} \quad (20)$$

以上 $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{14}$ 均为待定的关于 ξ 的函数. 同样, (6)式以 Q''' 的系数, 即 $B_2 \xi_x^3$ 为调整系数, 则

$$\alpha \epsilon_2 B_1 B_{1x} = \Phi_1 B_2 \xi_x^3, \quad (21)$$

$$\alpha \epsilon_2 B_1^2 \xi_x = \Phi_2 B_2 \xi_x^3, \quad (22)$$

$$\alpha \epsilon_3 B_1 \xi_x^3 = \Phi_3 B_2 \xi_x^3, \quad (23)$$

$$\alpha \epsilon_1 B_1 B_2 \xi_x^3 = \Phi_4 B_2 \xi_x^3, \quad (24)$$

$$-6\beta B_2 B_{2x} = \Phi_5 B_2 \xi_x^3, \quad (25)$$

$$-6\beta B_2^2 \xi_x = \Phi_6 B_2 \xi_x^3, \quad (26)$$

$$3\beta \xi_x (B_{2x} \xi_x + B_2 \xi_{xx}) = \Phi_7 B_2 \xi_x^3, \quad (27)$$

$$\alpha \epsilon_1 (B_1 B_{2x} + B_2 B_{1x}) = \Phi_8 B_2 \xi_x^3, \quad (28)$$

$$3\alpha \epsilon_3 \xi_x (B_1 \xi_{xx} + B_{1x} \xi_x) = \Phi_9 B_2 \xi_x^3, \quad (29)$$

$$\begin{aligned} & \alpha (\epsilon_1 B_{1x} A_2 + \epsilon_3 B_{1xxx} + \epsilon_1 B_1 A_{2x} \\ & + \epsilon_2 B_1 A_{1x} + \epsilon_2 B_{1x} A_1) = \Phi_{10} B_2 \xi_x^3, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \alpha (\epsilon_1 B_1 A_2 \xi_x + \epsilon_2 A_1 B_1 \xi_x + 3\epsilon_3 B_{1xx} \xi_x \\ & + 3\epsilon_3 B_{1xx} \xi_x + \epsilon_3 B_1 \xi_{xxx}) = \Phi_{11} B_2 \xi_x^3, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} & \alpha \epsilon_1 (A_1 B_{2x} + A_{1x} B_2) + \beta B_{2xxx} \\ & - 6\beta (A_2 B_{2x} + B_2 A_{2x}) - V_0 B_{2x} \end{aligned}$$

$$+ B_{2t} = \Phi_{12} B_2 \xi_x^3, \quad (32)$$

$$\alpha \epsilon_1 A_1 B_2 \xi_x + B_2 \xi_t + \beta (B_2 \xi_{xxx} - 6A_2 B_2 \xi_x + 3B_{2xx} \xi_x + 3B_{2x} \xi_{xx}) - V_0 B_2 \xi_x = \Phi_{13} B_2 \xi_x^3, \quad (33)$$

$$- V_0 A_{2x} + \alpha (\epsilon_3 A_{1xxx} + \epsilon_1 A_{1x} A_2 + \epsilon_1 A_1 A_{2x} + \epsilon_2 A_1 A_{1x}) + \beta (A_{2xxx} - 6A_2 A_{2x}) + A_{2t} = \Phi_{14} B_2 \xi_x^3. \quad (34)$$

其中 $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{14}$ 也均是待定的关于 ξ 的函数.

另外,要利用(3)式决定函数 A_1, B_1, A_2, B_2 和 ξ 时可利用以下不失一般性的运算规则

规则 1 若 $B_1 = B_{10}(x, t) \Gamma(\xi)$, 则可取 $\Gamma(\xi)$ 为任意确定的非零函数 $\Gamma_0(\xi)$, 通常取 $\Gamma_0(\xi)$ 为常数.

规则 2 若 $B_2 = B_{20}(x, t) \Phi(\xi)$, 则可取 $\Phi(\xi)$ 为任意确定的非零函数 $\Phi_0(\xi)$, 通常取 $\Phi_0(\xi)$ 为常数.

规则 3 若 $A_1 = A_{10}(x, t) + B_1 \Gamma(\xi)$, 则可取 $\Gamma(\xi)$ 为任意确定的函数 $\Gamma_0(\xi)$.

规则 4 若 $A_2 = A_{20}(x, t) + B_2 \Phi(\xi)$, 则可取 $\Phi(\xi)$ 为任意确定的函数 $\Phi_0(\xi)$.

规则 5 若 $\xi = \xi(\xi_0(x, t))$, 则可取 $\xi = \xi_0$.

从方程(7)——(34)我们不难发现, 当 $\xi_x = 0$, $P(\xi(x, t)), Q(\xi(x, t))$ 只是 t 的函数, 方程将约化为 ODE. 所以这里我们只讨论 $\xi_x \neq 0$ 的情况.

对于 $\xi_x \neq 0$, 根据(10), (12), (24)和(26)式, 利用规则 1 和 2, 容易得到

$$\Gamma_4 = \epsilon_2, \Gamma_6 = -6, \Phi_4 = \alpha \epsilon_1, \Phi_6 = -6\beta, B_1 = B_2 = \xi_x^2. \quad (35)$$

将(35)式代入(8), (9), (22)和(23)式即得

$$\Gamma_2 = \epsilon_1, \Gamma_3 = \epsilon_3, \Phi_2 = \alpha \epsilon_2, \Phi_3 = \alpha \epsilon_3. \quad (36)$$

由于方程(7), 我们有

$$2\epsilon_1 \xi_{xx} = \Gamma_1 \xi_x^2. \quad (37)$$

再利用规则 5, 于是得到

$$\xi = f_1 x + f_2. \quad (38)$$

式中 f_1, f_2 都只是关于时间 t 的任意函数. 另根据(7), (11), (13), (14), (15), (21), (25), (27), (28)和(29)式, 可得

$$\Gamma_1 = \Gamma_5 = \Gamma_7 = \Gamma_8 = \Gamma_9 = \Phi_1 = \Phi_5 = \Phi_7 = \Phi_8 = \Phi_9 = 0. \quad (39)$$

从(17)式, 容易知 A_1 满足

$$A_1 = \frac{\Gamma_{11} \xi_x^2 - A_2 \epsilon_1}{\epsilon_2}. \quad (40)$$

结果代入(19)式并利用规则 4, 使

$$\Gamma_{11} = 0, \Gamma_{13} = -C_1 \xi, A_1 = \frac{\epsilon_1 (f_1 x + f_2 + C_1 \xi f_1^3)}{f_1 (6\epsilon_1 + \epsilon_2^2)}. \quad (41)$$

这里 C_1 为任意常数, 再结合(16)和(40)式可得

$$\Gamma_{10} = 0. \quad (42)$$

同理,

$$\Phi_{10} = \Phi_{11} = 0, \Phi_{13} = -C_1 \xi, A_1 = \frac{\epsilon_1 (V_0 f_1 - f_1 x - f_2 - C_1 \xi f_1^3)}{f_1 (\epsilon_1^2 \alpha + 6\epsilon_2 \beta)}. \quad (43)$$

结合(38), (41)和(43)式, 则

$$f_1 = (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}}, f_2 = \frac{V_0 t (6\epsilon_1 + \epsilon_2^2) (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}}}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + C_3 (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}}. \quad (44)$$

其中 C_2, C_3 均为任意常数. 再从(40)和(41)式我们有

$$A_1 = \frac{V_0 \epsilon_1}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1}, A_2 = -\frac{\epsilon_2 V_0}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1}. \quad (45)$$

将以上解代入(18), (20), (32), (34)和(38)式即得

$$\Gamma_{12} = \Phi_{12} = -2C_1, \Gamma_{14} = \Phi_{14} = 0. \quad (46)$$

$$\xi = (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}} x + \frac{V_0 t (6\epsilon_1 + \epsilon_2^2) (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}}}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + C_3 (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}}. \quad (47)$$

这样我们就根据假设(3)式得到耦合 KdV 方程(2)的解

$$u = \frac{V_0 \epsilon_1}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}} P(\xi), v = -\frac{\epsilon_2 V_0}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + (3C_1 t + C_2)^{-\frac{1}{3}} Q(\xi). \quad (48)$$

而 $P(\xi), Q(\xi)$ 满足约化方程

$$P''' - 6PP' + \epsilon_1 QQ' + \epsilon_2 (QP)' + \epsilon_3 Q''' - C_1 \xi P' - 2C_1 P = 0, \beta Q''' - 6\beta QQ' + \alpha [\epsilon_1 (QP)' + \epsilon_2 PP' + \epsilon_3 P'''] - C_1 \xi Q' - 2C_1 Q = 0. \quad (49)$$

ξ 满足(47)式. 特别地, 当 $C_1 = 0$, 则

$$f_1 = c_1, f_2 = \frac{V_0 c_1 (6\epsilon_1 + \epsilon_2^2) t}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + c_2. \quad (50)$$

c_1, c_2 均为任意常数. 此时耦合 KdV 方程(2)的解为

$$u = \frac{V_0 \epsilon_1}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + c_1^2 P(\xi),$$

$$v = -\frac{\epsilon_2 V_0}{6\epsilon_2 \beta + \epsilon_1^2 \alpha + \epsilon_2^2 + 6\epsilon_1} + c_1^2 Q(\xi). \quad (51)$$

约化耦合方程(49)写为

$$P''' - 6PP' + \epsilon_1 QQ' + \epsilon_2 (QP)' + \epsilon_3 Q''' = 0,$$

$$\beta Q''' - 6\beta QQ' + \alpha[\epsilon_1 (QP)' + \epsilon_2 PP' + \epsilon_3 P'''] = 0. \quad (52)$$

3. 约化结果的群论解释

我们知道, CK 直接法的最大优势就是该方法不需要借助任何群论知识, 但它却可以得到包含经典李群方法得到的结果. 这一节, 我们就试图从李群出发给出约化耦合方程(49)的群论解释^[14].

根据李群方法, 如果耦合 KdV 方程(2)在无穷小变换

$$x \rightarrow x + \epsilon X(x, t, u, v),$$

$$t \rightarrow t + \epsilon T(x, t, u, v),$$

$$u \rightarrow u + \epsilon U(x, t, u, v),$$

$$v \rightarrow v + \epsilon V(x, t, u, v) \quad (53)$$

下保持不变, 那么它的群不变量 $\xi, P(\xi), Q(\xi)$ 可以通过求特征方程

$$\frac{dx}{X(x, t, u, v)} = \frac{dt}{T(x, t, u, v)} = \frac{du}{U(x, t, u, v)}$$

$$= \frac{dv}{V(x, t, u, v)} \quad (54)$$

得到. 在经典李对称理论中, 变换(53)式等价于以下变换:

$$u \rightarrow u + \epsilon[U(x, t, u, v) - X(x, t, u, v)u_x -$$

$$T(x, t, u, v)u_t] \equiv u + \epsilon s,$$

$$v \rightarrow v + \epsilon[V(x, t, u, v) - X(x, t, u, v)v_x -$$

$$T(x, t, u, v)v_t] \equiv v + \epsilon r, \quad (55)$$

其中 s, r 分别标记为 u, v 的对称, 这也就是说, s, r 应

该为耦合 KdV 方程(2)的线性化方程

$$s_t - 6us_x - 6su_x + s_{xxx} + \epsilon_1(vr_x + rv_x) +$$

$$\epsilon_2(u_x r + ur_x + s_x v + sv_x) + \epsilon_3 r_{xxx} = 0,$$

$$r_t - 6\beta(vr_x + rv_x) + \beta r_{xxx} - V_0 r_x +$$

$$\alpha[\epsilon_1(u_x r + ur_x + vs_x + sv_x) +$$

$$\epsilon_2(us_x + su_x) + \epsilon_3 s_{xxx}] = 0 \quad (56)$$

的解. 根据(38)式不难得到

$$\frac{dx}{dt} = \frac{X(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = \frac{f_{1t}x + f_{2t}}{f_1}, \quad (57)$$

即

$$X(x, t, u, v) = \frac{f_{1t}x + f_{2t}}{f_1} T(x, t, u, v). \quad (58)$$

另外从

$$u = A_1 + f_1^2 P(\xi), \quad v = A_2 + f_1^2 Q(\xi), \quad (59)$$

可以得到

$$\frac{du}{dt} = \frac{U(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = \frac{2f_{1t}(u - A_1)}{f_1},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{V(x, t, u, v)}{T(x, t, u, v)} = \frac{2f_{1t}(u - A_2)}{f_1}, \quad (60)$$

即

$$U(x, t, u, v) = \frac{2f_{1t}(u - A_1)}{f_1} T(x, t, u, v),$$

$$V(x, t, u, v) = \frac{2f_{1t}(u - A_2)}{f_1} T(x, t, u, v). \quad (61)$$

于是对称

$$\begin{pmatrix} s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} - X \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix} - T \begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix}$$

$$= \frac{T}{f_1} \begin{pmatrix} 2f_{1t}(u - A_1) - f_{1t}u_x - f_{2t}u_x - f_{1t}u_t \\ 2f_{1t}(v - A_1) - f_{1t}v_x - f_{2t}v_x - f_{1t}v_t \end{pmatrix}. \quad (62)$$

通过直接代入不难证明如取 $T = f_1^{-3} (C_1 \neq 0)$ 和 $T = 1 (C_1 = 0)$, 对称 s, r 即为耦合方程(56)的解.

4. 耦合 KdV 方程的 Painlevé 测试

Painlevé 分析法是研究非线性系统的一个非常强有力的工具之一. 这一节中, 我们就利用此方法^[4]对约化耦合方程(49)进行 Painlevé 测试, 试图找出 P 可积模型.

先考虑 $P(\xi), Q(\xi)$ 在 ξ_0 领域中的主要形态. 设

$$P(\xi) \sim \frac{P_0}{(\xi - \xi_0)^a},$$

$$Q(\xi) \sim \frac{Q_0}{(\xi - \xi_0)^b}, \quad (\xi \sim \xi_0). \quad (63)$$

经领头项分析得到

$$a = b = 2, \quad (64)$$

$$P(\xi) \sim \frac{P_0}{(\xi - \xi_0)^2}, \quad Q(\xi) \sim \frac{Q_0}{(\xi - \xi_0)^2},$$

$$(\xi \sim \xi_0). \quad (65)$$

同时 P_0, Q_0 满足方程

$$12P_0 + 12\epsilon_3 Q_0 + 2\epsilon_2 Q_0 P_0 - 6P_0^2 + \epsilon_1 Q_0^2 = 0,$$

$$\alpha \epsilon_2 P_0^2 + 2\alpha \epsilon_1 Q_0 P_0 - 6\beta Q_0^2 + 12\alpha \epsilon_3 P_0 + 12Q_0 = 0. \quad (66)$$

考虑次主项的平衡,得到 j 的一个 6 次代数方程,它的根对应于可能的共振点,结果为

$$j = -1, 4, 4, 6, j_1, j_2 = 5 - j_1,$$

其中 j_1, j_2 满足以下方程

$$\begin{aligned} P_0^2 Q_0^2 (\alpha \epsilon_3^2 - \beta) (j - 5) j + 2P_0^2 (-2\epsilon_3 Q_0 P_0 - 2P_0^2 + 2\epsilon_3 Q_0 P_0^2 + \epsilon_3^2 Q_0^2 + P_0^3) \alpha^2 \\ + 2\beta P_0 Q_0^2 (-2\epsilon_3 Q_0 - P_0 + 2\epsilon_3 Q_0^2 + P_0 Q_0 + P_0^2) \alpha + 2\beta^2 Q_0^4 (Q_0 - 2) = 0. \end{aligned} \quad (67)$$

接下来我们就 j_1, j_2 的不同取值依次进行 P 测试. 最后找到

P 可积模型 1

$$\begin{aligned} P''' - 6PP' - 6\epsilon_3^2 QQ' - 6\epsilon_3^2 (QP)' \\ + \epsilon_3 Q''' - C_1 \xi P' - 2C_1 P = 0, \\ \beta Q''' - 6\beta QQ' + \alpha [-6\epsilon_3^2 (QP)' - 6\epsilon_3 PP' \\ + \epsilon_3 P'''] - C_1 \xi Q' - 2C_1 Q = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

对应的共振点 $j = -1, 2, 3, 4, 4, 6$, 耦合 KdV 方程为

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} - 6\epsilon_3^2 v_x - 6\epsilon_3 (uv)_x + \epsilon_3 v_{xxx} = 0, \\ v_t - 6\beta vv_x + \beta v_{xxx} - V_0 v_x + \alpha [-6\epsilon_3^2 (uv)_x \\ - 6\epsilon_3 uu_x + \epsilon_3 u_{xxx}] = 0. \end{aligned} \quad (69)$$

P 可积模型 2

$$\begin{aligned} P''' - 6PP' + \epsilon_1 QQ' + \epsilon_2 (QP)' \\ + \epsilon_3 Q''' - C_1 \xi P' - 2C_1 P = 0, \\ \beta Q''' - 6\beta QQ' - C_1 \xi Q' - 2C_1 Q = 0. \end{aligned} \quad (70)$$

此时共振点为 $j = -1, 2, 3, 4, 4, 6$, 耦合 KdV 方程变为

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} + \epsilon_1 vv_x + \epsilon_2 (uv)_x + \epsilon_3 v_{xxx} = 0, \\ v_t - 6\beta vv_x + \beta v_{xxx} - V_0 v_x = 0. \end{aligned} \quad (71)$$

P 可积模型 3

特殊地,如果(71)式中 $\epsilon_1 = -\frac{3\nu^2}{2} - 6\epsilon_3, \epsilon_2 = -$

$3 + 3\nu$. 可积模型变为

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} - \left(\frac{3\nu^2}{2} + 6\epsilon_3\right) vv_x \\ + (3\nu - 3)(uv)_x + \epsilon_3 v_{xxx} = 0, \\ v_t - 6\beta vv_x + \beta v_{xxx} - V_0 v_x = 0. \end{aligned} \quad (72)$$

(72)式中 ν 为任意常数. 此时共振点为 $-1, 0, 4, 4, 5, 6$.

5. 形变映射法求耦合方程的解

我们知道,各类非线性系统的一些特殊形式的

准确解可以借助与其他已知非线性系统的解之间建立变换关系给出,此即形变映射法^[15]. 本节我们就试图将耦合 KdV 方程(2)与非线性 Klein-Gordon 方程的解建立联系,从而得到它的解析解.

行波化耦合 KdV 方程(2),使

$$u \equiv u(\xi) \equiv u(kx - kCt), v \equiv v(\xi), \quad (73)$$

则

$$\begin{aligned} -Cu_\xi - 6uu_\xi + k^2 u_{\xi\xi\xi} + \epsilon_1 vv_\xi + \epsilon_2 (vu)_\xi \\ + k^2 \epsilon_3 v_{\xi\xi\xi} = 0, \\ -Cv_\xi - 6\beta vv_\xi + k^2 \beta v_{\xi\xi\xi} - V_0 v_\xi + \alpha \epsilon_1 (vu)_\xi \\ + \epsilon_2 uu_\xi + k^2 \epsilon_3 u_{\xi\xi\xi} = 0. \end{aligned} \quad (74)$$

将 u, v 与非线性 Klein-Gordon 方程的解建立简单的多项式关系

$$\begin{aligned} u &= a_0 + a_1 \phi(\xi) + a_2 \phi(\xi)^2, \\ v &= b_0 + b_1 \phi(\xi) + b_2 \phi(\xi)^2. \end{aligned} \quad (75)$$

其中 $\phi(\xi)$ 为非线性 Klein-Gordon 方程

$$\phi_\xi^2 = \mu \phi^2 + \frac{1}{2} \lambda \phi^4 + \phi_0 \quad (76)$$

的解. 将(75)和(76)式代入行波化方程(74)可得

$$\begin{aligned} a_1 &= -\epsilon_3 b_1, a_2 = -\epsilon_3 b_2, \\ \beta &= \alpha \epsilon_3^2, \epsilon_1 = -2\epsilon_3^2 - 4\epsilon_3, \epsilon_2 = -4\epsilon_3 - 2, \\ C &= -\frac{2(a_0 \epsilon_3 + b_0 \epsilon_3^2 - \epsilon_3 b_0 - a_0)}{\epsilon_3}, \\ V_0 &= \frac{2(\epsilon_3 - 1)(\epsilon_3 b_0 + a_0)(\alpha \epsilon_3^2 + 1)}{\epsilon_3}. \end{aligned} \quad (77)$$

于是

$$\begin{aligned} u &= a_0 - \epsilon_3 b_1 \phi - b_2 \epsilon_3 \phi^2, \\ v &= b_0 + b_1 \phi + b_2 \phi^2 \end{aligned} \quad (78)$$

是满足

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} - 2\epsilon_3(2 + \epsilon_3)vv_x \\ - (4\epsilon_3 + 2)(uv)_x + \epsilon_3 v_{xxx} = 0, \\ v_t - 6\alpha \epsilon_3^2 vv_x + \alpha \epsilon_3^2 v_{xxx} - V_0 v_x \\ - \alpha [2\epsilon_3(\epsilon_3 + 2)(uv)_x \\ + (4\epsilon_3 + 2)uu_x - \epsilon_3 u_{xxx}] = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

的解,其中 $a_0, b_0, b_1, b_2, \epsilon_3$ 为任意常数. 只要我们给定非线性 Klein-Gordon 方程的众多解中的任意一个,就可以得到耦合 KdV 方程的一个对应的准确解析解. 如取非线性 Klein-Gordon 方程的椭圆周期波解

$$\begin{aligned} \phi &= cn(\xi, m), \\ (\text{当满足 } \mu &= 2m^2 - 1, \lambda = -2m^2, \phi_0 = 1 - m^2), \end{aligned} \quad (80)$$

则

$$\begin{aligned} u &= a_0 - \epsilon_3 b_1 cn(\xi, m) - b_2 \epsilon_3 cn(\xi, m)^2, \\ v &= b_0 + b_1 cn(\xi, m) + b_2 cn(\xi, m)^2. \end{aligned} \quad (81)$$

图 1 给出了两个解 u 和 v 的演化情况.

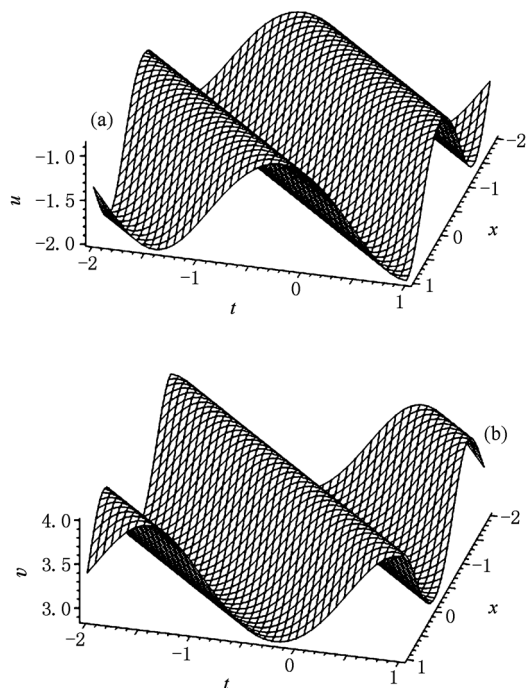


图1 解(81)的演化情况,其中参数 $a_0 = b_0 = b_1 = C = \epsilon_3 = 1$, $b_2 = 2$, $m = 1.5$ (a) u ; (b) v

6. 结 论

通过 CK 直接约化法,得到了耦合 KdV 方程的相似约化方程,特别地当待定函数 ξ 中的常数 $C_1 = 0$,约化方程退化为简单的行波化方程.另外从给出的群论解释,我们不难知道同样的约化方程也可以利用经典李群方法得到.为测试耦合 KdV 方程的可积性,在文章的第四部分我们利用 ARS 算法对其约化方程(49)进行了 Painlevé 分析并最终找到了 3 个 P 可积模型.从这些模型中我们发现,两层流体中两个波具有不尽相同的色散关系,这与文献[8]中得到的结论相同.但与文献[8]中不同的是,这里两波的色散关系不存在任何联系,而是相互独立的.文章最后依赖形变映射法,将耦合 KdV 方程与非线性 Klein-Gordon 方程的解建立联系,求得了它的准确解析解.只要取定非线性 Klein-Gordon 方程的任意一个解,就可以得到一个与之对应的耦合 KdV 方程的解.所以,除了椭圆周期波解(81),我们还可以参考文献[15]中非线性 Klein-Gordon 方程的解给定耦合 KdV 方程的包括孤立子解等的更多解析解.至于能否利用类似的方法在其他的耦合非线性系统中(包括耦合 KdV 方程,耦合非线性薛定谔方程等)找到更多的可积模型,或者能否找到更多的具有不同色散关系的可积模型都还值得进一步研究.

- [1] Li Z B, Pan S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌、潘素起 2001 物理学报 **50** 402]
- [2] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健、杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]
- [3] Hirota R, Satsuma J 1981 *Phys. Lett. A* **85** 407
- [4] Lou S Y, Tong B, Hu H C, Tang X Y 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 513
- [5] Hu H C, Tong B, Lou S Y 2006 *Phys. Lett. A* **351** 403
- [6] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020401 (in Chinese) [石玉仁、张娟、杨红娟、段文山 2011 物理学报 **60** 020401]
- [7] Tong B, Jia M, Lou S Y 2006 *Commun. Theor. Phys.* **45** 965
- [8] Jia M 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 275
- [9] Gear J A, Grimshaw R 1984 *Stud. Appl. Math.* **70** 235
- [10] Tang X Y, Huang F, Lou S Y 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 887
- [11] Liu X Z 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080202
- [12] Liu D B, Chu K Q 2001 *Chin. Phys.* **10** 683
- [13] Lou S Y, Tang X Y 2006 *Nonlinear Mathematical Physics Method* (Beijing: Science Press) p314 (in Chinese) [楼森岳、唐晓艳 2006 非线性数学物理方法. (北京:科学出版社)第 314 页]
- [14] Ruan H Y, Li H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 996 (in Chinese) [阮航宇、李慧军 2005 物理学报 **54** 996]
- [15] Lou S Y, Ni G J 1989 *J. Math. Phys.* **30** 1614

Coupled KdV equation: similarity reduction and analytical solution^{*}

Cheng Xue-Ping^{1)2)†} Li Jin-Yu¹⁾ Xue Jiang-Rong¹⁾

1) (*Physics, Mathematics and Information College of Zhejiang Ocean University, Zhoushan 316004, China*)

2) (*Department of Physics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China*)

(Received 1 April 2011; revised manuscript received 13 May 2011)

Abstract

Using the CK direct method, we obtain the similarity reduction of coupled KdV equation, which is then explained in detail by group theory. To check the Painlevé integrability of coupled KdV equation, the reduction equation is also classified by means of the Painlevé test, and three types of P-integrable models are found. Finally, it is shown that the coupled KdV equation has kinds of traveling wave solutions, including conoidal periodic wave solution, soliton solution, and so on.

Keywords: coupled KdV equation, CK direct method, Painlevé test, exact analytical solution

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik

^{*} Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province of China (Grant No. Y1100088), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11047155) and the Special Foundation of Zhejiang Ocean University.

[†] E-mail: chengxp2005@126.com