物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 60, No. 11 (2011) 110515

阶次不等的分数阶混沌系统同步*

胡建兵[1)2)] 肖 建[2)] 赵灵冬[2)†]

1)(西南交通大学电气工程学院, 成都 610031)

2)(南通大学电子信息学院,南通 226019)

(2011 年 3 月 29 日收到;2011 年 7 月 4 日收到修改稿)

针对阶次不等的分数阶混沌系统同步问题,提出了一种将不等阶分数阶系统转化为等阶系统的方法,将不等阶分数阶系统的同步问题转化为等阶的异结构同步问题. 利用该方法实现了阶次不等的分数阶 Lorenz 混沌系统的同步,数值仿真结果验证了该理论的正确性.

关键词: 不等阶, 分数阶混沌系统, 同步, 异结构

PACS: 05.45.Gg

1. 引 言

分数阶微分理论差不多与整数阶微分理论有相同长的历史,由于一直没有找到对应的应用背景而未得到重视. 但是直到最近十几年,研究发现在自然界及许多科学技术领域中存在大量的自相似于整数阶微积分动力学描述的分数维现象[1],另一方面,在生物分子工程、细胞组织工程和神经网络工程的一些新兴领域[2],用传统的微分方程为动态系统建模的方法存在很大局限性,分数阶微积分可以提供一种线性运算模型,分数阶微分的研究吸引了人们的研究兴趣,成为当今研究的一个热点.

混沌同步由于在保密通信等领域的潜在应用价值而得到了广泛研究,提出了多种同步方法,如线性非线性反馈方法,Backstepping 方法,active 方法,脉冲控制方法,实现了完全同步、反同步、函数投影同步等[3—6]. 这些研究更多集中于整数阶混沌系统同步的研究.

分数阶混沌系统的同步由于更有普遍意义得到了研究,并取得了一些成果:实现了分数阶系统自适应同步、异结构同步、超混沌同步等[7—11]. 在实际应用中,由于元件参数的差异以及干扰等因素的影响,混沌同步的两分数阶系统的阶次很难完全一致,并且非线性系统具有参数敏感性,微分阶次的细微差异也会引起显著变化. 然而对于阶次不等的分数阶系统的同步还少见报道,因此研究不等阶分数阶系统的同步具有积极意义.

本文根据分数阶微分方程的性质,将不等阶的分数阶系统转化为等阶的异结构分数阶混沌系统. 利用分数阶非线性系统稳定性理论,设计控制器实现异结构的分数阶 Lorenz 混沌系统同步. 利用数值仿真验证了该控制器的正确性.

2. 分数阶微分概述

分数阶微分方程是整数阶微分方程的推广,在研究过程中对分数阶微分和积分概念提出了多种定义,但常用的是 Caputo 分数阶微分定义,其数学表达式如下[12]:

$$
{}_a^C D_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha+n-1} f^{(n)}(\tau)\,\mathrm{d}\tau, \quad (1)
$$

式中 n 为大于 α 的最小整数, $n-1<\alpha<n$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数. Caputo 分数导数定义的最大优点是其初始值有明确的物理意义.

与分数阶微分相对应的是分数阶积分

$$
D_0^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t x^{\alpha-1} f(t-x)\,\mathrm{d}x. \quad (2)
$$

定理 1 设 $f(t) \in C_a^{\alpha}([a,b])$, $D_a^{\alpha} f(t) \in$

* 南通大学自然科学基金(批准号:10Z021)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:zhaolingdong@163.com

$C_a^\beta([a,b])$, $\alpha,\beta>0$ 且 $m-1<\beta<m$, $n-1<\alpha<n$, 则有

$$D_a^\beta(D_a^\alpha f(t)) = D_a^{\alpha+\beta} f(t). \tag{3}$$

证明

$$\begin{aligned} &D_a^\beta(D_a^\alpha f(t)) = D^m(D_a^{-(m-\beta)}D^n(D_a^{-(n-\alpha)}f(t)))\\ &= D^m(D^n D_a^{-(m-\beta)}(D_a^{-(n-\alpha)}f(t)))\\ &= D^{n+m}D_a^{-(m-\alpha+n-\beta)}(f(t))\\ &= D_a^{(\alpha+\beta)}(f(t)). \end{aligned} \tag{4}$$

定理 1 证毕.

胡建兵等[13]研究了分数阶非线性系统的稳定性,给出了分数阶非线性系统的稳定性判据.

引理 1　对于一般的分数阶非线性系统:

$$\frac{\mathrm{d}^\alpha X}{\mathrm{d}t^\alpha} = A(X)X. \tag{5}$$

当分数阶系统阶次 $\alpha<1$, 如果存在正定矩阵 P 使不等式 $X^{\mathrm{T}}P\dfrac{\mathrm{d}^\alpha X}{\mathrm{d}t^\alpha}\leqslant 0$ 成立,则分数阶受控系统稳定.

3. 同步阶次不等的分数阶 Lorenz 混沌系统

分数阶 Lorenz 混沌系统具有如下的表达形式:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^\alpha x_1}{\mathrm{d}t^\alpha}\\ \dfrac{\mathrm{d}^\alpha x_2}{\mathrm{d}t^\alpha}\\ \dfrac{\mathrm{d}^\alpha x_3}{\mathrm{d}t^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0\\ b & -1 & -x_1\\ 0 & x_1 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

文献[14]研究了该系统的非线性动力学行为,指出当阶数 $\alpha=0.96$, 参数 $a=10$, $b=28$, $c=8/3$ 系统具有复杂混沌吸引子. 本文以系统(6)为驱动系统,研究当响应系统的阶次与驱动系统的阶次不等时候的同步问题.

令响应分数阶混沌系统

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^\beta y_1}{\mathrm{d}t^\beta} &= -ay_1+ay_2-u_1(t),\\ \frac{\mathrm{d}^\beta y_2}{\mathrm{d}t^\beta} &= by_1-y_2-y_1y_3-u_2(t),\\ \frac{\mathrm{d}^\beta y_3}{\mathrm{d}t^\beta} &= y_1y_2-cy_3-u_3(t). \end{aligned} \tag{7}$$

假定分数阶系统(7)的阶次 β 大于分数阶系统(6)的阶次 α.

根据分数阶微分定义及定理 1,由方程(6)可得

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mathrm{d}^\alpha x_1}{\mathrm{d}t^\alpha}\right)^{(\beta-\alpha)} &= (-ax_1+ax_2)^{(\beta-\alpha)},\\ \left(\frac{\mathrm{d}^\alpha x_2}{\mathrm{d}t^\alpha}\right)^{(\beta-\alpha)} &= (bx_1-x_2-x_1x_3)^{(\beta-\alpha)},\\ \left(\frac{\mathrm{d}^\alpha x_3}{\mathrm{d}t^\alpha}\right)^{(\beta-\alpha)} &= (x_1x_2-cx_3)^{(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{8}$$

即

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^\beta x_1}{\mathrm{d}t^\beta} &= -ax_1^{(\beta-\alpha)}+ax_2^{(\beta-\alpha)},\\ \frac{\mathrm{d}^\beta x_2}{\mathrm{d}t^\beta} &= bx_1^{(\beta-\alpha)}-x_2^{(\beta-\alpha)}-(x_1x_3)^{(\beta-\alpha)},\\ \frac{\mathrm{d}^\beta x_3}{\mathrm{d}t^\beta} &= (x_1x_2)^{(\beta-\alpha)}-cx_3^{(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{9}$$

因而阶次不等的分数阶系统(7)和分数阶系统(6)的同步问题就转化为分数阶系统(7)同异结构的分数阶系统(9)的同步问题.

定义系统的同步误差

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1-x_1,\\ e_2 &= y_2-x_2,\\ e_3 &= y_3-x_3. \end{aligned} \tag{10}$$

其同步误差方程为

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^\beta e_1}{\mathrm{d}t^\beta} &= -ay_1+ay_2-u_1(t)\\ &\quad-(-ax_1+ax_2)^{(\beta-\alpha)},\\ \frac{\mathrm{d}^\beta e_2}{\mathrm{d}t^\beta} &= by_1-y_2-(y_1y_3)-u_2(t)\\ &\quad-(bx_1-x_2-x_1x_3)^{(\beta-\alpha)},\\ \frac{\mathrm{d}^\beta e_3}{\mathrm{d}t^\beta} &= y_1y_2-cy_3-u_3(t)\\ &\quad-(x_1x_2-cx_3)^{(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{11}$$

定理 2　设计响应系统的控制项 $u(t)$:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= -ax_1+ax_2-(-ax_1+ax_2)^{(\beta-\alpha)}\\ &\quad+(a+b-x_3)e_2+x_2e_3,\\ u_2(t) &= bx_1-x_2-x_1x_3-(bx_1-x_2-x_1x_3)^{(\beta-\alpha)},\\ u_3(t) &= x_1x_2-cx_3-(x_1x_2-cx_3)^{(\beta-\alpha)}. \end{aligned} \tag{12}$$

则分数阶同步误差系统(11)稳定,也即阶次不等的分数阶系统(7)和分数阶系统(6)实现了同步.

证明　根据(11) 式和(12)式得同步误差

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^\beta e_1}{\mathrm{d}t^\beta} &= -ae_1-be_2+x_3e_2-x_2e_3,\\ \frac{\mathrm{d}^\beta e_2}{\mathrm{d}t^\beta} &= (b-x_3)e_1-e_2-y_1e_3, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{\beta}e_3}{\mathrm{d}t^{\beta}} = x_2e_1 + y_1e_2 - ce_3. \tag{13}$$

构造 h 函数

$$\begin{aligned} h(e) &= e_1\frac{\mathrm{d}^{\beta}e_1}{\mathrm{d}t^{\beta}} + e_2\frac{\mathrm{d}^{\beta}e_2}{\mathrm{d}t^{\beta}} + e_3\frac{\mathrm{d}^{\beta}e_3}{\mathrm{d}t^{\beta}} \\ &= (-ae_1 - be_2 + x_3e_2 - x_2e_3)e_1 \\ &\quad + ((b - x_3)e_1 - e_2 - y_1e_3)e_2 \\ &\quad + (x_2e_1 + y_1e_2 - ce_3)e_3 \\ &= -ae_1^2 - e_2^2 - ce_3^2 \leqslant 0. \end{aligned} \tag{14}$$

根据引理 1, 在控制器(12)下, 分数阶误差系统(11)稳定. 定理得证.

4. 数值仿真

基于改进的 Adams-Bashforth-Moulton 理论[15], 文献[16]提出了分数阶混沌系统仿真算法. 用该算法进行仿真, 仿真时设 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, y_1 = 2.1, y_2 = 1.1, y_3 = 0.11$ 为初始值, 时间步长取为 0.005 s. 设驱动系统阶次 $\alpha = 0.93$, 响应系统阶次 $\beta = 0.95$ 其仿真结果如图 1 所示. 驱动系统阶次 $\alpha = 0.96$, 响应系统阶次 $\beta = 0.98$ 其仿真结果如图 2 所示. 图 1 和图 2 的仿真结果表明在所设计的控制器作用下能实现两阶次不等的分数阶混沌系统同步, 也验证了所提方法的有效性.

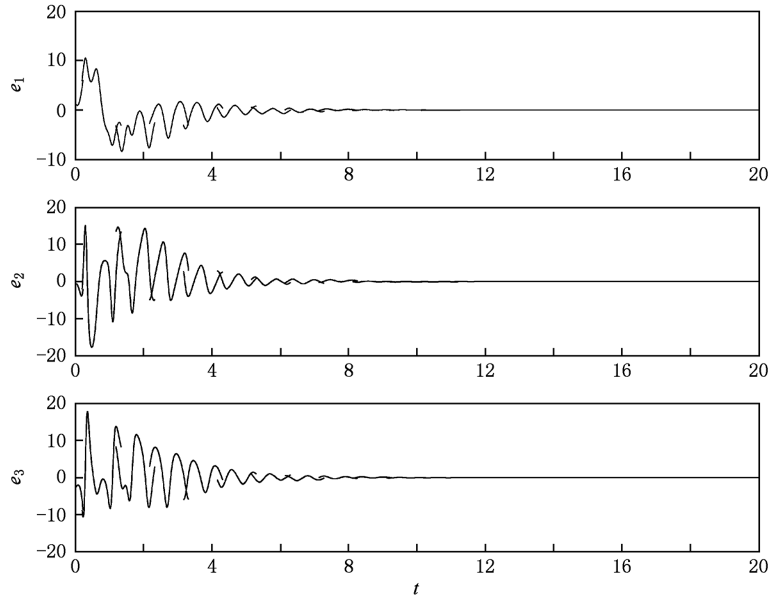

图 1 $\alpha = 0.93, \beta = 0.95$ 同步误差 e_1, e_2, e_3 随时间演化图

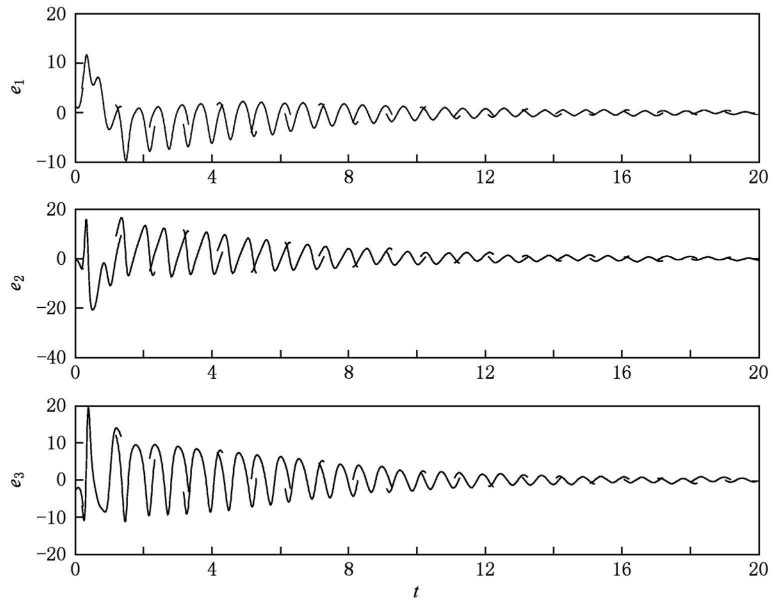

图 2 $\alpha = 0.96, \beta = 0.98$ 同步误差 e_1, e_2, e_3 随时间演化图

5. 结 论

本文根据分数阶微分相关理论,提出了通过分数阶微分将阶次不等的分数阶系统化为阶次相等的分数阶异结构系统的思想. 利用该思想,研究了当响应系统的阶次大于驱动系统的阶次时,对驱动系统再微分化为等阶异结构系统并设计控制器实现了同步. 如果当驱动系统的阶次大于响应系统时,相应地可以对响应系统再微分,将响应系统和驱动系统化为等阶的异结构同步问题研究. 因而本文提出的方法不仅适用于驱动系统的阶次小于响应系统的阶次的情况,也同样适用于驱动系统的阶次大于响应系统的阶次的情况. 该方法同样可拓展到分数阶系统与整数阶系统的同步中. 这对于进一步研究和应用分数阶系统具有积极意义.

[1] Mandelbort B B 1983 *The fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
[2] Magin R L 2004 *Critical Rev. in Biomed. Engin.* **32** 193
[3] Wang Y W, Guan Z H, Xiao J W 2004 *Chaos* **14** 199
[4] Huang L, Feng R, Wang M 2004 *Phys. Lett.* A **32** 271
[5] Li G H, Zhou S P 2007 *Chaos Sol. Fract.* **32** 516
[6] Guo L X, Xu Z Y, Hu M F 2008 *Chin. Phys.* B **17** 4067
[7] Zhao L D, Hu J B, Liu X H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2305 (in Chinese) [赵灵冬、胡建兵、刘旭辉 2010 物理学报 **59** 2305]
[8] Mohammad S T, Mohammad H 2008 *Physica* A **387** 57
[9] Liu C X, Liu T, Liu L, Liu K 2004 *Chaos, Sol. and Fract.* **22** 1031
[10] Zhou P, Zhu W 2011 *Nonlinear Anal. RWA* **12** 811
[11] Peng G J, Jiang Y L, Chen F 2008 *Physica* A **387** 3738
[12] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press)
[13] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵、韩 焱、赵灵冬 2009 物理学报 **58** 2235]
[14] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
[15] Yan J P, Li C P 2004 *Chaos, Sol. and Fract.* **22** 443
[16] Wang J W, Xiong X H, Zhang Y B 2006 *Physica* A **370** 279

Synchronizing fractional chaotic systems with different orders*

Hu Jian-Bing[1)2)] Xiao Jian[2)] Zhao Ling-Dong[2)†]

1) (*School of Electrical Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

2) (*School of Electronics & Information, Nantong University, Nantong 226019, China*)

(Received 29 March 2011; revised manuscript received 4 July 2011)

Abstract

To synchronize fractional chaotic systems with different orders, a method is proposed in which a fractional chaotic system with different orders is changed into a fractional chaotic system with the same order but different structures, according to the properties of fractional differential equation. This method is successfully used to synchronize fractional Lorenz chaotic systems. Numerical simulation demonstrates the effectiveness of the method.

Keywords: different order, fractional chaotic system, synchronizing, different structure

PACS: 05.45.Gg

* Project supported by the Nantong University Natural Science Foundation of China (Grant No. 10Z021).

† Corresponding author. E-mail: zhaolingdong@163.com