

时滞反馈控制扭转振动系统的振动^{*}

赵艳影[†] 李昌爱

(南昌航空大学飞行器工程学院, 南昌 330063)

(2011 年 1 月 8 日收到; 2011 年 3 月 9 日收到修改稿)

研究了采用时滞反馈来控制扭转振动系统的振动问题. 在一个带有非线性动力吸振器的扭转振动系统中, 采用时滞反馈来控制主系统的振动. 研究了反馈增益系数和时滞对主系统振动的影响. 研究表明, 对某一固定的反馈增益系数, 存在时滞的某段调节区间, 可以通过调节时滞来抑制主系统的振动. 在时滞的调节区间内存在一个最佳点, 主系统的振动被抑制到最小值. 可以同时调节反馈增益系数和时滞两参数, 当反馈增益系数和时滞都调节到最佳值时, 主系统振动的振幅由 0.24 减小到 0.03, 取得了很好的减振效果.

关键词: 时滞反馈, 扭转振动, 减振

PACS: 43.40.Vn, 43.40.Ga

1. 引言

旋转机械广泛的应用于机械加工制造、能源和轨道交通等领域. 扭转振动是旋转机械系统一种普遍存在的动力学现象. 机械系统中轴系的扭转振动主要由发动机的扭矩变化和传动轴的安装角度引起万向节的扭矩变化而产生. 扭转振动会破坏机械设备的平稳运行, 甚至导致相关部件的损坏等严重的后果. 由于轴系扭转振动对旋转机械系统会造成严重故障, 人们认识到控制传动轴系的扭转振动问题非常重要.

扭转振动控制的方法很多^[1,2], 由于设计简单和实用性强, 采用动力吸振器吸引了工程界和学术界的众多研究者. Muneharu 等^[3]采用动力吸振器来控制一个强迫扭转振动系统的振动问题, 研究表明动力吸振器的质量越小、刚度越大对主系统的减振效果越好. Kim 等^[4]研究了非线性冲击阻尼对带有间隙的扭转振动系统的频率响应特性, 研究发现冲击阻尼降低了共振峰值, 增强了动力系统的稳定性, 减小了准周期和混沌运动的区域. El-Bassiouny^[5]研究了采用动力吸振器控制非线性强迫扭转振动系统的振动和混沌运动的问题. 本文对文献[5]中的模型进行研究, 采用了一种新兴的时滞

减振方法来控制主系统的扭转振动.

时滞是普遍存在的, 时滞动力系统也成为众多领域的研究对象. 针对网络系统^[6]、生物系统^[7]和控制系统^[8]的研究取得了许多重要的成果. 时滞减振是一种新兴的减振技术, Olgac 等^[9]提出在耦合的线性强迫振动系统中耦合进时滞, 利用时滞共振器(delayed resonator)来消除主系统的振动. Olgac 等^[10]经过大量的理论和实验研究取得了时滞减振技术的理论依据和实验结果. Hosek 等^[11]采用了一个离心摆式时滞共振器来控制扭转振动系统的振动, 通过在线调节反馈增益系数和时滞量能够完全消除主系统的振动. 然而该方法存在本质的缺陷, 时滞量是一个确定的数值, 一旦实验中时滞漂移, 系统的振动将更加剧烈, 导致主系统破坏. 作者近几年的研究^[12]发现采用时滞和非线性联合耦合的方法可以加宽减振频带. 本文在文献[5]研究的强迫扭转振动系统中, 给系统耦合进一个带有时滞的状态反馈来控制主系统的振动.

2. 力学模型

在文献[5]研究模型的基础上给系统耦合进一个带有时滞的状态反馈, 用来控制系统的扭转振动, 其结构示意图如图 1 所示.

^{*} 国家自然科学基金青年科学基金(批准号:10802035)资助的课题.

[†] E-mail: yanyingzhao@163.com

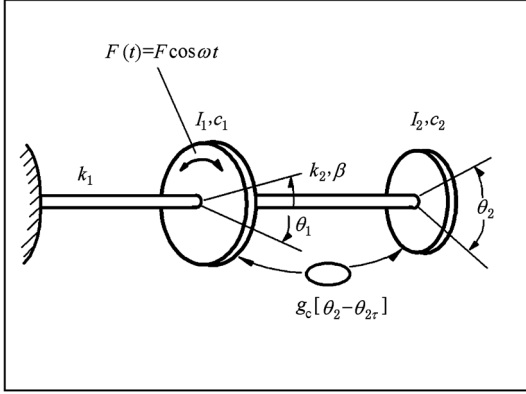


图1 扭转系统的时滞反馈控制模型

振动系统的运动微分方程为

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + k_1 \theta_1 + c_1 \dot{\theta}_1 + k_2 (\theta_1 - \theta_2) + c_2 (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \beta (\theta_1 - \theta_2)^3 - g_c [\theta_2 - \theta_{2\tau}] = F(t), \quad (1)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + k_2 (\theta_2 - \theta_1) + c_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - \beta (\theta_1 - \theta_2)^3 + g_c [\theta_2 - \theta_{2\tau}] = 0, \quad (2)$$

其中, I_1 和 I_2 是曲轴和吸振器的极惯性矩. k_1 和 k_2 是曲轴和吸振器的线性刚度系数. β 是吸振器的三次非线性刚度系数. c_1 和 c_2 是曲轴和吸振器的线性阻尼系数. $F(t) = F \cos \omega t$ 是外激励项. $g_c [\theta_2 - \theta_{2\tau}]$ 是给系统引进的时滞反馈控制项, 其中 $\theta_{2\tau} = \theta_2(t - \tau)$. 当 $\tau = 0$ 时时滞反馈控制项消失, 方程(1)和(2)就退化为无时滞反馈控制的非线性动力吸振器减振系统的运动微分方程.

3. 摄动分析

为简化计算, 引入下列无量纲量 $t^* = \frac{\omega}{\Omega} t, \tau^* = \frac{\omega}{\Omega} \tau, y_1 = \frac{\theta_1}{\theta_c}, y_2 = \frac{\theta_2}{\theta_c}, \omega_1^2 = \frac{k_1 \Omega^2}{I_1 \omega^2}, \omega_2^2 = \frac{k_2 \Omega^2}{I_2 \omega^2}, \xi_1 = \frac{c_1 \Omega}{I_1 \omega}, \xi_2 = \frac{c_2 \Omega}{I_2 \omega}, \alpha = \frac{\beta \theta_c^2 \Omega^2}{I_2 \omega^2}, \gamma = \frac{I_2}{I_1}, f = \frac{F \Omega^2}{I_1 \theta_c \omega^2}, g = \frac{g_c \Omega^2}{I_2 \omega^2}$, 其中 Ω 是无量纲频率. 为了书写方便, 将方程中的 t^* 简写为 t , τ^* 简写为 τ . 同时为了便于摄动分析, 将控制方程中的一些变量重新标度. 令 $\xi_1 = \varepsilon \hat{\xi}_1, \xi_2 = \varepsilon \hat{\xi}_2, \alpha = \varepsilon \hat{\alpha}, \gamma = \varepsilon \hat{\gamma}, f = \varepsilon \hat{f}, g = \varepsilon \hat{g}$, 其中 $0 < \varepsilon \leq 1$. 同时为了书写方便, 将“ $\wedge$ ”去掉, 得到新的无量纲化的系统的运动方程为

$$y_1'' + \omega_1^2 y_1 = -\varepsilon \xi_1 y_1' - \varepsilon \gamma \omega_2^2 (y_1 - y_2) - \varepsilon^2 \xi_2 \gamma (y_1' - y_2') - \varepsilon^2 \alpha \gamma (y_1 - y_2)^3 - \varepsilon^2 g \gamma (y_{2\tau} - y_2) + \varepsilon f \cos \Omega t, \quad (3)$$

$$y_2'' + \omega_2^2 (y_2 - y_1) = -\varepsilon \xi_2 (y_2' - y_1') + \varepsilon \alpha (y_1 - y_2)^3 + \varepsilon g (y_{2\tau} - y_2). \quad (4)$$

下面采用多尺度法来研究方程(3)和(4)的二次近似解, 将解的形式表示为

$$y_1(t, \varepsilon) = y_{11}(T_0, T_1) + \varepsilon y_{12}(T_0, T_1) + \dots, \quad (5)$$

$$y_2(t, \varepsilon) = y_{21}(T_0, T_1) + \varepsilon y_{22}(T_0, T_1) + \dots, \quad (6)$$

$$y_{2\tau}(t, \varepsilon) = y_{21\tau}(T_0, T_1) + \varepsilon y_{22\tau}(T_0, T_1) + \dots, \quad (7)$$

其中, $T_n = \varepsilon^n t (n = 0, 1, 2, \dots)$ 是引进的一些新的自变量. 因此关于 t 的导数变成关于 T_n 的偏导数, 它可以表示为

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots, \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots, \quad (9)$$

其中, $D_k = \frac{\partial}{\partial T_k}, k = 0, 1$.

将方程(5)–(9)代入方程(3)和(4)中, 并使 ε 同次幂的系数相等, 对 ε^0 得到

$$D_0^2 y_{11} + \omega_1^2 y_{11} = 0, \quad (10)$$

$$D_0^2 y_{21} + \omega_2^2 (y_{21} - y_{11}) = 0, \quad (11)$$

对 ε^1 得到

$$\begin{aligned} & D_0^2 y_{12} + \omega_1^2 y_{12} \\ &= -2D_0 D_1 y_{11} - \xi_1 D_0 y_{11} - \gamma \omega_2^2 (y_{11} - y_{21}) + f \cos \Omega t, \\ & D_0^2 y_{22} + \omega_2^2 (y_{22} - y_{12}) \\ &= -2D_0 D_1 y_{21} + g (y_{21\tau} - y_{21}) - \xi_2 (D_0 y_{21} - D_0 y_{11}) \\ &+ \alpha (y_{11}^3 - y_{21}^3 + 3y_{11} y_{21}^2 - 3y_{11}^2 y_{21}), \end{aligned} \quad (12)$$

方程(10)和(11)的通解可以表示为

$$y_{11} = A(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + \text{c. c.}, \quad (14)$$

$$y_{21} = B(T_1) \exp(i\omega_1 T_0) + C(T_1) \exp(i\omega_2 T_0) + \text{c. c.}, \quad (15)$$

其中, $A(T_1)$, $C(T_1)$ 是未确定的函数, $i \equiv \sqrt{-1}$,

c. c. 代表前面各项的共轭复数, $B = \left(\frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \right) A$.

外激励项和时滞项可以表示为如下的复数形式:

$$f \cos \Omega t = \frac{1}{2} f \exp(i \Omega T_0) + \text{c. c.}, \quad (16)$$

$$y_{21\tau} = B_\tau \exp[i \omega_1 (T_0 - \tau)] + C_\tau \exp[i \omega_2 (T_0 - \tau)] + \text{c. c.} \quad (17)$$

在假设 τ 和 ε 都很小的条件下, B_τ 和 C_τ 可以按照泰勒级数展开^[13]成如下的形式:

$$B_\tau = B(T_1 - \varepsilon \tau) = B(T_1) - \varepsilon \tau B'(T_1) + \frac{\varepsilon^2 \tau^2}{2} B''(T_1) + \dots, \quad (18)$$

$$C_\tau = C(T_1 - \varepsilon \tau) = C(T_1) - \varepsilon \tau C'(T_1) + \frac{\varepsilon^2 \tau^2}{2} C''(T_1) + \dots \quad (19)$$

将方程(14)–(19)代入方程(12)和(13)得到

$$D_0^2 y_{12} + \omega_1^2 y_{12} = L_1 \exp(i \omega_1 T_0) + \gamma \omega_2^2 C \exp(i \omega_2 T_0) + \frac{1}{2} f \exp(i \Omega T_0) + \text{c. c.}, \quad (20)$$

$$D_0^2 y_{22} + \omega_2^2 (y_{22} - y_{12}) = L_2 \exp(i \omega_1 T_0) + L_3 \exp(i \omega_2 T_0) + L_4 \exp(i 3 \omega_1 T_0) + L_5 \exp[i(\omega_2 + 2 \omega_1) T_0] + L_6 \exp[i(\omega_1 + 2 \omega_2) T_0] + L_7 \exp[i(2 \omega_2 - \omega_1) T_0] + g B \exp[i \omega_1 (T_0 - \tau)] + g C \exp[i \omega_2 (T_0 - \tau)] + \text{c. c.}, \quad (21)$$

其中, $L_1 = (B - A) \gamma \omega_2^2 - i \omega_1 (2A' + \xi_1 A)$,

$$L_2 = -gB + 3\alpha A^2 \bar{A} - 6\alpha A \bar{B} \bar{A} + 3\alpha B^2 \bar{A} - 3\alpha A^2 \bar{B} + 6\alpha A \bar{B} \bar{B} - 3\alpha B^2 \bar{B} + 6\alpha A \bar{C} \bar{C} - 6\alpha B \bar{C} \bar{C} + i A \xi_2 \omega_1 - i B \xi_2 \omega_1 - i 2 \omega_1 B',$$

$$L_3 = -gC - 6\alpha A \bar{C} \bar{A} + 6\alpha B \bar{C} \bar{A} + 6\alpha A \bar{C} \bar{B} - 6\alpha B \bar{C} \bar{B} - 3\alpha C^2 \bar{C} - i C \xi_2 \omega_2 - i 2 \omega_2 C',$$

$$L_4 = \alpha A^3 - 3\alpha A^2 B + 3\alpha A B^2 - \alpha B^3,$$

$$L_5 = -3\alpha A^2 C + 6\alpha A B C - 3\alpha B^2 C,$$

$$L_6 = 3\alpha A C^2 - 3\alpha B C^2,$$

$$L_7 = 3\alpha C^2 \bar{A} - 3\alpha C^2 \bar{B},$$

$$L_8 = -3\alpha A^2 \bar{C} + 6\alpha A \bar{B} \bar{C} - 3\alpha B^2 \bar{C}.$$

考虑主共振和 1:1 内共振同时发生时系统的动力学行为, 引进解谐参数 σ_1 和 σ_2 表示偏差值. 其中 σ_1 表示内共振偏差值, σ_2 表示外共振偏差值, 有

$$\omega_1 = \omega_2 - \varepsilon \sigma_1, \quad (22)$$

$$\omega_1 = \Omega - \varepsilon \sigma_2. \quad (23)$$

考虑方程(22)和(23), 得到方程(20)和(21)的可解性条件

$$L_1 + \gamma \omega_2^2 C \exp(i \sigma_1 T_1) + \frac{1}{2} f \exp(i \sigma_2 T_1) = 0, \quad (24)$$

$$L_2 \exp(-i \sigma_1 T_1) + L_3 + \frac{\gamma \omega_2^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} C + L_7 \exp(i \sigma_1 T_1) + L_8 \exp(-i 2 \sigma_1 T_1) + g B \exp(-i \sigma_1 T_1 - i \omega_1 \tau) + g C \exp(-i \omega_2 \tau) = 0. \quad (25)$$

方程组(24)和(25)的解可以写成如下的形式:

$$A(T_1) = \frac{1}{2} a(T_1) \exp[i \theta_1(T_1)], \quad (26)$$

$$C(T_1) = \frac{1}{2} c(T_1) \exp[i \theta_2(T_1)]. \quad (27)$$

将(26)和(27)代入方程(24)和(25), 并将得到的结果实部和虚部分开, 得到

$$a' = \frac{1}{\omega_1} \left[-\frac{1}{2} \omega_1 \xi_1 a - \frac{1}{2} \gamma \omega_2^2 c \sin \phi_2 + \frac{1}{2} f \sin \phi_1 \right], \quad (28)$$

$$a \phi_1' = \frac{1}{\omega_1} \left[\omega_1 \sigma_2 a + \frac{1}{2} (\mu - 1) \gamma \omega_2^2 a + \frac{1}{2} \gamma \omega_2^2 c \cos \phi_2 + \frac{1}{2} f \cos \phi_1 \right], \quad (29)$$

$$c' = \frac{1}{\omega_2} \left[-\frac{1}{2} g \mu a \sin \phi_2 + n_1 \sin \phi_2 + n_2 \cos \phi_2 - \frac{1}{2} \omega_2 \xi_2 c - n_4 \sin \phi_2 + n_5 \sin 2 \phi_2 + \frac{1}{2} g \mu a \cos(\omega_1 \tau) \sin \phi_2 - \frac{1}{2} g \mu a \sin(\omega_1 \tau) \cos \phi_2 - \frac{1}{2} g c \sin(\omega_2 \tau) - \frac{1}{2} (\mu - 1) \mu \gamma \omega_2^2 a \sin \phi_2 + \frac{1}{2} \omega_1 \xi_1 \mu a \cos \phi_2 \right]$$

$$-\frac{1}{2}f\mu\sin(\phi_1 + \phi_2) \Big], \quad (30)$$

$$\begin{aligned} c(\phi'_1 + \phi'_2) = & \frac{1}{\omega_2} \Big[\omega_2(\sigma_2 - \sigma_1)c \\ & - \frac{1}{2}g\mu a \cos\phi_2 - \frac{1}{2}gc \\ & + n_1 \cos\phi_2 - n_2 \sin\phi_2 + n_3 \\ & + \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega_2^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} c + n_4 \cos\phi_2 \\ & + n_5 \cos 2\phi_2 + \frac{1}{2}g\mu a \cos(\omega_1\tau) \cos\phi_2 \\ & + \frac{1}{2}g c \cos(\omega_2\tau) \\ & + \frac{1}{2}g\mu a \sin(\omega_1\tau) \sin\phi_2 \\ & - \frac{1}{2}(\mu - 1)\mu\gamma\omega_2^2 a \cos\phi_2 \\ & - \frac{1}{2}\omega_1\xi_1\mu a \sin\phi_2 - \frac{1}{2}\gamma\mu\omega_2^2 c \\ & - \frac{1}{2}f\mu\cos(\phi_1 + \phi_2) \Big], \quad (31) \end{aligned}$$

其中, $\phi_1 = \sigma_2 T_1 - \theta_1$, $\phi_2 = \theta_1 - \theta_2 - \sigma_1 T_1$,

$$\begin{aligned} n_1 = & \frac{3}{8}\alpha a^3 - \frac{9}{8}\alpha\mu a^3 + \frac{9}{8}\alpha\mu^2 a^3 - \frac{3}{8}\alpha\mu^3 a^3 \\ & + \frac{3}{4}\alpha a c^2 - \frac{3}{4}\alpha\mu a c^2, \\ n_2 = & \frac{1}{2}\xi_2\omega_1 a - \frac{1}{2}\xi_2\omega_1\mu a, \\ n_3 = & -\frac{3}{4}\alpha a^2 c + \frac{3}{2}\alpha\mu a^2 c - \frac{3}{4}\alpha\mu^2 a^2 c - \frac{3}{8}\alpha c^3, \\ n_4 = & \frac{3}{8}\alpha a c^2 - \frac{3}{8}\alpha\mu a c^2, \\ n_5 = & -\frac{3}{8}\alpha a^2 c + \frac{3}{4}\alpha\mu a^2 c - \frac{3}{8}\alpha\mu^2 a^2 c. \end{aligned}$$

4. 平衡解及稳定分析

系统的稳态运动对应方程组(28)—(31)中 $a' = c' = \phi'_1 = \phi'_2 = 0$ 时的平衡解. 为了确定平衡解的稳定性, 将方程组转化到直角坐标系下,

$$\begin{aligned} p'_1 = & \frac{1}{\omega_1} \Big[-\frac{1}{2}\omega_1\xi_1 p_1 - \frac{1}{2}\gamma\omega_2^2 q_2 \\ & - \omega_1\sigma_2 q_1 - \frac{1}{2}(\mu - 1)\gamma\omega_2^2 q_1 \Big], \quad (32) \end{aligned}$$

$$q'_1 = \frac{1}{\omega_1} \Big[-\frac{1}{2}\omega_1\xi_1 q_1 + \frac{1}{2}\gamma\omega_2^2 p_2$$

$$+ \omega_1\sigma_2 p_1 + \frac{1}{2}(\mu - 1)\gamma\omega_2^2 p_1 + \frac{1}{2}f \Big], \quad (33)$$

$$\begin{aligned} p'_2 = & \frac{1}{\omega_2} \Big[-\frac{1}{2}g\mu\sin(\omega_1\tau)p_1 + \frac{1}{2}\xi_1\omega_1\mu p_1 \\ & + \frac{1}{2}\xi_2\omega_1 p_1 - \frac{1}{2}\xi_2\omega_1\mu p_1 + \frac{1}{2}g\mu q_1 \\ & - \frac{1}{2}g\mu\cos(\omega_1\tau)q_1 + \frac{1}{2}(\mu - 1)\mu\gamma\omega_2^2 q_1 \\ & - \frac{1}{2}\omega_2\xi_2 p_2 - \frac{1}{2}\sin(\omega_2\tau)p_2 \\ & + \frac{1}{2}gq_2 - \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega_2^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} q_2 - \frac{1}{2}g\cos(\omega_2\tau)q_2 \\ & + \frac{1}{2}\gamma\mu\omega_2^2 q_2 - \omega_2(\sigma_2 - \sigma_1)q_2 \\ & + \frac{3}{8}\alpha(p_2^2 + q_2^2)q_2 - \left(\frac{3}{8}\alpha \right. \\ & - \frac{9}{8}\alpha\mu + \frac{9}{8}\alpha\mu^2 - \frac{3}{8}\alpha\mu^3 \Big)(p_1^2 + q_1^2)q_1 \\ & - \left(-\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha\mu - \frac{3}{4}\alpha\mu^2 \right)(p_1^2 + q_1^2)q_2 \\ & - \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha\mu \right)(p_2^2 + q_2^2)q_1 \\ & + \left(\frac{3}{8}\alpha - \frac{3}{8}\alpha\mu \right)(p_2^2 q_1 - q_2^2 q_1 - 2p_1 p_2 q_2) \\ & + \left(\frac{3}{4}\alpha\mu - \frac{3}{8}\alpha - \frac{3}{8}\alpha\mu^2 \right) \\ & \left. (p_1^2 q_2 - q_1^2 q_2 - 2p_1 p_2 q_1) \right], \quad (34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q'_2 = & \frac{1}{\omega_2} \Big[\frac{1}{2}g\mu\cos(\omega_1\tau)p_1 - \frac{1}{2}g\mu p_1 \\ & - \frac{1}{2}(\mu - 1)\mu\gamma\omega_2^2 p_1 - \frac{1}{2}g\mu\sin(\omega_1\tau)q_1 \\ & + \frac{1}{2}\omega_1\xi_1\mu q_1 + \frac{1}{2}\omega_1\xi_2 q_1 - \frac{1}{2}\omega_1\xi_2\mu q_1 \\ & - \frac{1}{2}gp_2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma\omega_2^4}{\omega_1^2 - \omega_2^2} p_2 - \frac{1}{2}\gamma\mu\omega_2^2 p_2 \\ & + \omega_2(\sigma_2 - \sigma_1)p_2 - \frac{3}{8}\alpha(p_2^2 + q_2^2)p_2 \\ & + \frac{1}{2}g\cos(\omega_2\tau)p_2 - \frac{1}{2}\omega_2\xi_2 q_2 \\ & - \frac{1}{2}g\sin(\omega_2\tau)q_2 + \left(-\frac{3}{4}\alpha + \frac{3}{2}\alpha\mu \right. \\ & - \frac{3}{4}\alpha\mu^2 \Big)(p_1^2 + q_1^2)p_2 \\ & + \left(\frac{3}{8}\alpha - \frac{9}{8}\alpha\mu + \frac{9}{8}\alpha\mu^2 - \frac{3}{8}\alpha\mu^3 \right)(p_1^2 + q_1^2)p_1 \\ & + \left(\frac{3}{4}\alpha - \frac{3}{4}\alpha\mu \right)(p_2^2 + q_2^2)p_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{3}{8}\alpha - \frac{3}{8}\alpha\mu \right) (p_2^2 p_1 - q_2^2 p_1 + 2q_1 p_2 q_2) \\
& + \left(-\frac{3}{8}\alpha + \frac{3}{4}\alpha\mu - \frac{3}{8}\alpha\mu^2 \right) \\
& \times (p_1^2 p_2 - q_1^2 p_2 + 2p_1 q_1 q_2) - \frac{1}{2}f\mu \Big], \quad (35)
\end{aligned}$$

其中, $p_1 = a \cos \phi_1$, $q_1 = a \sin \phi_1$, $p_2 = c \cos(\phi_1 + \phi_2)$, $q_2 = c \sin(\phi_1 + \phi_2)$. 为了分析平衡解的稳定性, 对方程组 (32)–(35) 进行摄动分析, 摄动方程为

$$\begin{aligned}
& \{\Delta p'_1, \Delta q'_1, \Delta p'_2, \Delta q'_2\}^T \\
& = [\mathbf{J}] \{\Delta p_1, \Delta q_1, \Delta p_2, \Delta q_2\}^T, \quad (36)
\end{aligned}$$

其中, T 代表转置矩阵, $[\mathbf{J}]$ 是 Jacobian 矩阵. 对应平衡解的特征方程可以表示为

$$\lambda^4 + \delta_1 \lambda^3 + \delta_2 \lambda^2 + \delta_3 \lambda + \delta_4 = 0, \quad (37)$$

式中 λ 代表矩阵 $[\mathbf{J}]$ 的特征值, $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 代表特征方程的系数.

用罗斯-霍尔维兹准则去判断方程的稳定性, 得到系统稳定的充分和必要条件

$$\begin{aligned}
& \delta_1 > 0, \delta_1 \delta_2 - \delta_3 > 0, \delta_4 > 0, \\
& \delta_3 (\delta_1 \delta_2 - \delta_3) - \delta_1^2 \delta_4 > 0. \quad (38)
\end{aligned}$$

方程 (3) 和 (4) 的平衡解稳定的充分和必要条件是特征方程 (37) 的所有特征根的实部都是负数; 如果有一个特征根的实部是正数则方程 (3) 和 (4) 的平衡解就是不稳定的. 如果有特征根的实部改变符号, 则系统可能发生鞍结分岔, 导致跳跃现象出现. 如果有一对复数特征根的实部改变符号, 系统可能出现 Hopf 分岔, 导致系统出现概周期等复杂运动.

5. 系统参数对减振的影响

对以上的分析可知, 当 $\tau = 0$ 时时滞反馈控制项消失, 该系统就退化为非线性动力吸振器减振系统. 为了验证非线性对系统振动的抑制作用, 图 2 给出了不同非线性参数下主振动系统的幅频响应曲线.

图 2 中 $SN_{(.)}$ 代表鞍结分岔点, $HP_{(.)}$ 代表 Hopf 分岔点. 实线代表稳定解, 实心点线代表不稳定的焦点, 空心点线代表其他类型不稳定的解. 图 2 中无量纲参数选择为 $\omega_1 = 1.4$, $\omega_2 = 1.2$, $\sigma_1 = -0.2$, $\gamma = 0.1$, $\xi_1 = 0.1$, $\xi_2 = 0.1$, $f = 0.1$.

图 2(a) 是非线性项 $\alpha = 0.10$ 时主系统的幅频响应曲线. 从图中看到幅频响应曲线都是稳定的,

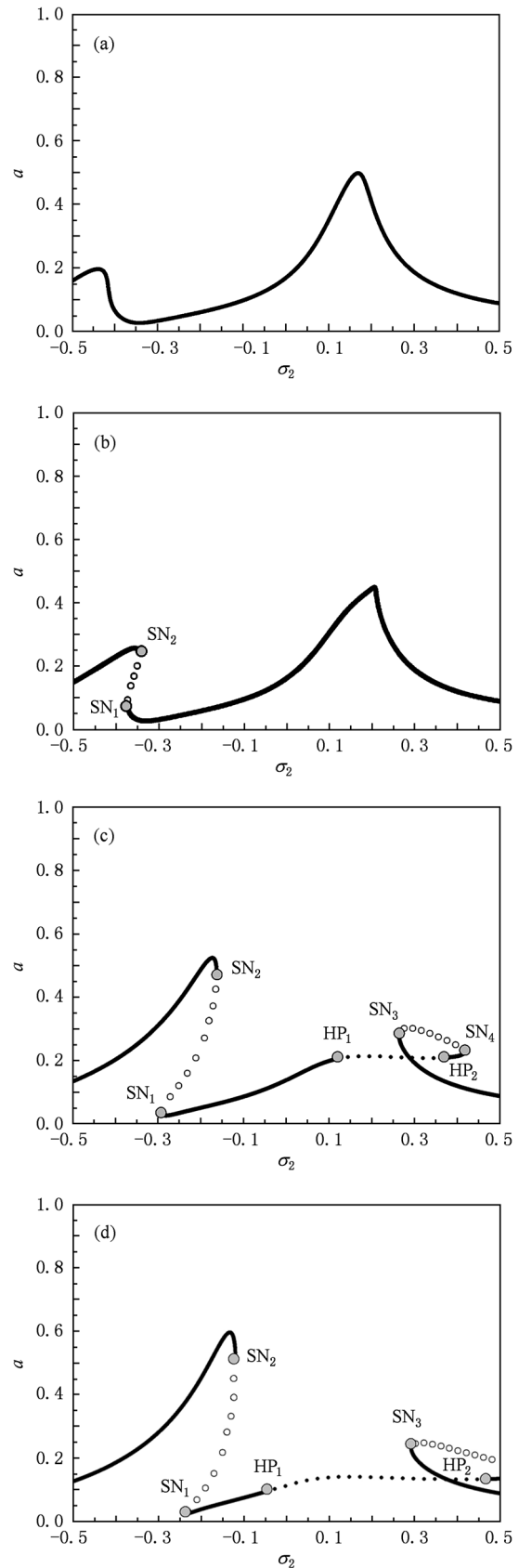


图 2 非线性对主系统幅频响应曲线的影响 (a) $\alpha = 0.10$; (b) $\alpha = 0.20$; (c) $\alpha = 0.60$; (d) $\alpha = 1.00$

在主共振点右侧 $\sigma_2 \in [0.1, 0.2]$ 之间出现峰值. 并且可观察到主系统的振幅在共振点附近较大. 随着非线性系数的增大, 由图 2(b) 可以看出, 当 $\alpha = 0.20$ 时幅频响应曲线的峰值有所降低. 然而幅频响应曲线中由于鞍结分岔 SN_1 和 SN_2 的出现使得系统有多个稳定的周期解共存, 对应幅频响应曲线产生跳跃现象. 随着非线性系数的继续增大, 由图 2(c) 观察到在共振点的右侧, 出现了鞍结分岔点 SN_3 和 SN_4 , 以及 Hopf 分岔点 HP_1 和 HP_2 . 这表明幅频响应曲线的不稳定范围扩大了. 当继续增大非线性系数, 从图 2(d) 能够看出, 幅频响应曲线的拓扑结构相同, 但是不稳定的范围也在不断扩大.

观察图 2(a)–(d), 随着非线性系数的增大, 在共振点附近主系统的振幅不断减小, 说明系统的减振能力在不断提高. 然而, 非线性系数的不断增大也使幅频响应曲线的不稳定区域不断扩大. 因此, 在实际工程中要根据工程需要来适当的选择非线性系数.

在实际工程中, 由于制造和控制等技术的影响, 内共振解谐参数不可避免的存在, 下面以非线性参数 $\alpha = 0.20$ 为例, 分析内共振解谐参数对系统减振的影响. 图 3 给出了不同内共振解谐参数的条件下主系统的幅频响应曲线.

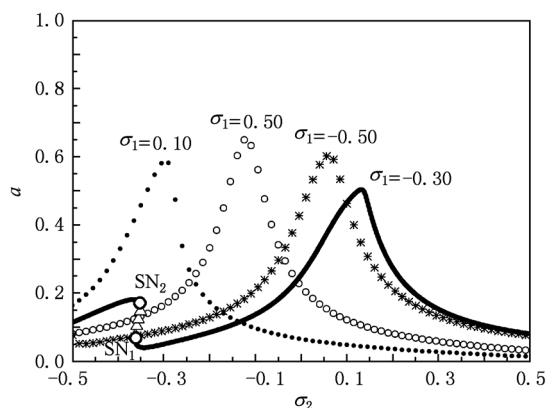


图3 内共振解谐对主系统幅频响应曲线的影响

图 3 给出了 $\sigma_1 = 0.10, 0.50, -0.50, -0.30$ 时的主系统的幅频响应曲线. 首先, 当内共振解谐参数为正数时, 幅频响应曲线的峰值在共振点的左侧. 随着内共振解谐参数的不断增大, 峰值不断向共振点移动, 使得共振点附近主系统的振幅不断增大. 其次, 当内共振解谐参数为负数时, 幅频响应曲线的峰值在共振点的右侧. 随着内共振解谐参数绝对值的不断增大, 峰值也不断向共振点移动, 使得

共振点附近主系统的振幅不断增大. 这说明内共振解谐参数的控制非常重要, 要使其绝对值尽量小, 才能使主系统在共振点及其附近取得好的减振效果.

6. 时滞对系统减振的作用

由以上的分析可知, 如果内共振解谐参数存在, 采用非线性动力吸振器减振, 主系统在共振点及其附近的减振效果并不理想, 此时主系统的振幅较大. 因此我们以非线性系数 $\alpha = 0.20$, 内共振解谐参数为 $\sigma_1 = -0.30$, 外激励频率等于主系统固有频率 ($\sigma_2 = 0$, 即在共振点) 为例, 研究采用时滞反馈控制主系统振动的问题. 为此, 取 $\omega_1 = 1.4, \omega_2 = 1.1, \gamma = 0.1, \xi_1 = 0.1, \xi_2 = 0.1, f = 0.1$. 图 4 给出了不同反馈增益系数下主系统的振幅-时滞响应曲线.

图 4(a) 是反馈增益系数为 0.10, 0.20, 0.30 时主振动系统的振幅-时滞响应曲线.

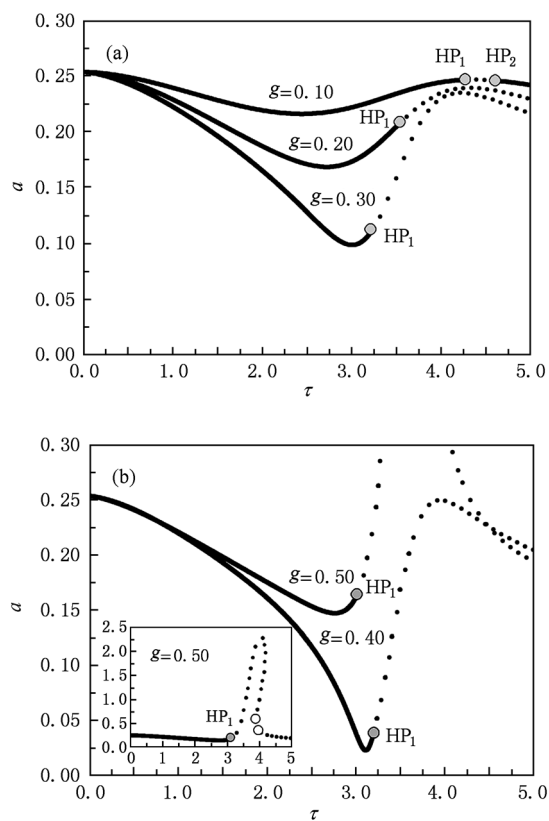


图4 不同反馈增益系数下主系统的振幅-时滞响应曲线
(a) $g = 0.10, 0.20, 0.30$; (b) $g = 0.40, 0.50$

首先, 以 $g = 0.10$ 为例分析时滞对主系统振幅

的影响. 随着时滞的增大主系统的振幅逐渐减小, 在 $\tau \in [2.0, 3.0]$ 之间的某点达到最小值. 然后, 随着时滞的继续增大主系统的振幅逐渐增大. 在 $\tau = 4.3$ 出现亚临界 Hopf 分岔 HP_1 , 使得周期解失去稳定性. 随着时滞的继续增大, 在 $\tau = 4.6$ 通过超临界 Hopf 分岔 HP_2 又获得稳定的周期解. 当时滞在分岔点 HP_1 和 HP_2 之间调节时, 系统可能出现复杂的运动状态.

其次, 观察 $g = 0.20$ 时的振幅-时滞响应曲线. 随着反馈增益系数的增大, 在 $\tau \in [2.5, 3.0]$ 之间

的某点主系统的振动达到最小值. 此时系统的减振能力比 $g = 0.10$ 时有所提高.

再次, 对图 4(a) 的整体分析表明, 随着反馈增益系数的增大, 系统的减振能力提高了. 但是, 随着反馈增益系数的增大, 振幅-时滞响应曲线的不稳定区域也扩大了.

图 4(b) 是反馈增益系数为 0.40, 0.50 时主振动系统的振幅-时滞响应曲线. 我们发现, 随着反馈增益系数的增大, 系统的减振能力提高到一定程度后又开始降低. 当反馈增益系数选择为 $g = 0.40$,

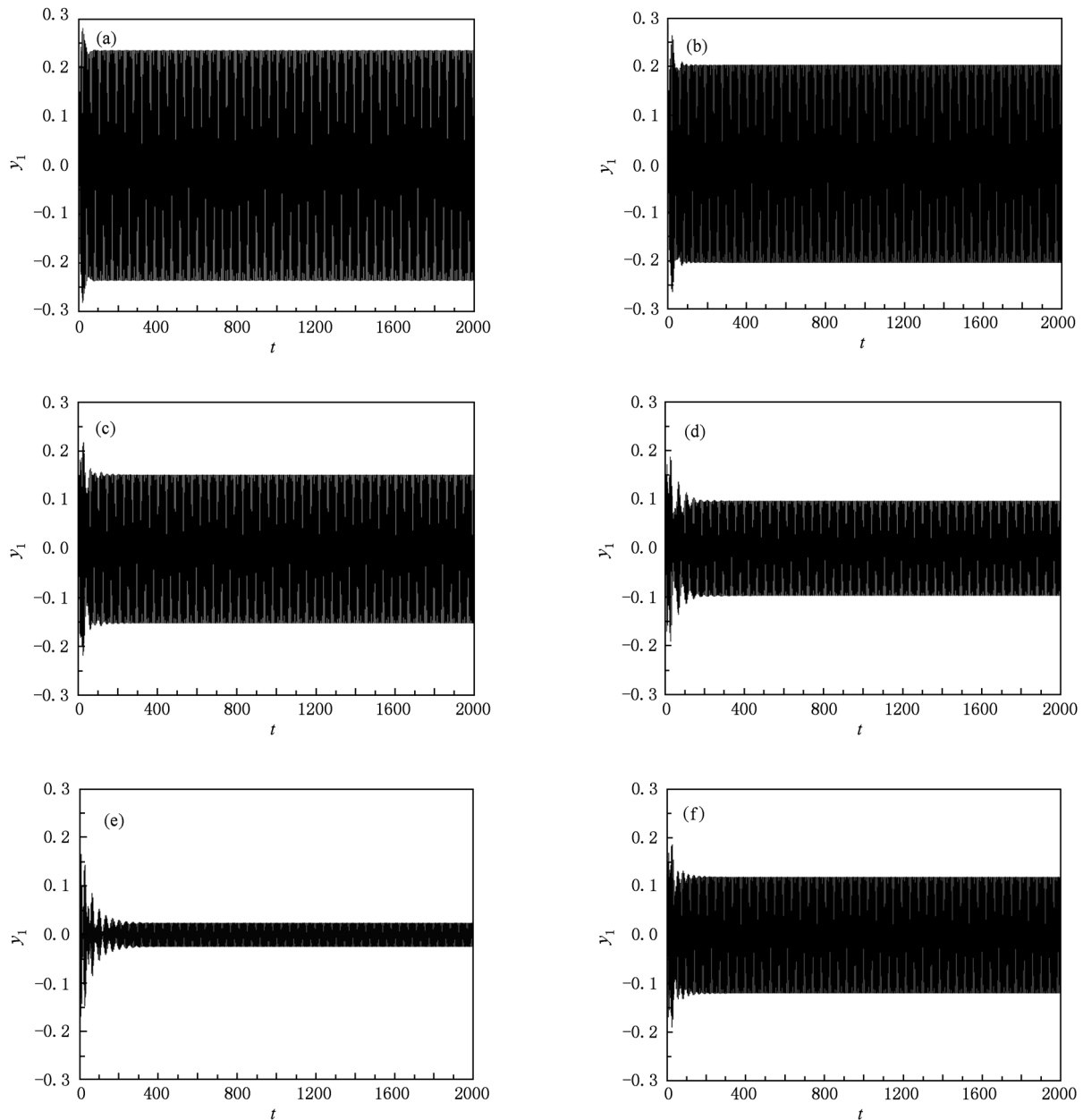


图5 主系统时间历程响应曲线 (a) $\tau = 0$; (b) $g = 0.10, \tau = 2.3$; (c) $g = 0.20, \tau = 2.6$; (d) $g = 0.30, \tau = 2.9$; (e) $g = 0.40, \tau = 3.1$; (f) $g = 0.50, \tau = 2.8$

时滞选择为 $\tau = 3.1$ 时是一个最佳减振点, 此时主系统的振动被抑制到一个最小值.

分析图 4(a) 和 (b), 在主共振点处时滞反馈控制对抑制主系统的振动起到了很好的作用, 这也说明在共振点处时滞反馈控制比非线性动力吸振器减振效果好.

为了说明以上解析结果的可靠性, 图 5 对图 4 的结果进行了数值验证. 计算中初始条件选择为 $y_1(0) = y_2(0) = 10^{-4}$, $\dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 10^{-4}$, $y_1(t) = y_2(t) = 0$, $\dot{y}_1(t) = \dot{y}_2(t) = 0$, 其中 $t \in [-\tau, 0]$.

图 5(a) 是 $\tau = 0$ 时主系统的时间历程响应曲线, 此时反馈控制项消失, 系统退化为非线性减振器. 图 5(b) — (f) 是在不同反馈增益系数下时滞选择为最佳值时主系统的时间历程响应曲线. 从数值模拟的结果可以看出, 采用非线性减振器时主系统的振幅约为 0.24, 当反馈增益系数选择 0.40, 时滞选择为 3.1 时主系统的振幅被减小到 0.03. 对比图 5 与图 4, 数值模拟的结果与解析结果符合得很好, 说明本文得到的结论是可靠的.

7. 结 论

文章主要研究了采用时滞反馈控制来抑制主系统的振动. 得到如下的一些结论: 1) 非线性系数越大, 在共振点附近对主系统的振动抑制效果越好. 但是, 随着非线性系数的增大, 幅频响应曲线中的不稳定区域也不断增大, 振动系统会出现复杂的运动. 2) 内共振解谐参数的绝对值越大, 系统在共振点附近的振幅越大, 振动抑制效果越差. 因此, 内共振解谐参数要控制的越小越好. 3) 对某一固定的反馈增益系数, 可以通过调节时滞来控制主系统的振动. 4) 随着反馈增益系数的增大, 系统的减振能力不断提高, 在反馈增益系数为 0.40 附近减振能力达到极值. 随着反馈增益系数的继续增大, 系统的减振能力又开始下降. 5) 当反馈增益系数和时滞都取得最佳值时, 主系统的振幅由 0.24 被降低到 0.03, 取得了很好的减振效果.

感谢同济大学航空航天与力学学院徐鉴教授的建议讨论.

- [1] Shen I Y, Guo W, Pao Y C 1997 *J. Vibr. and Acou.* **119** 504
- [2] Kim T C, Singh R 2001 *SAE Trans. J. Pass. Cars; Mech. Sys.* **110** 1934
- [3] Muneharu S, Nobuo T, Dong H N 2004 *J. Sound and Vibr.* **270** 657
- [4] Kim T C, Rook T E, Singh R 2005 *J. Sound and Vibr.* **281** 995
- [5] El-Bassiouny A F 2005 *Physica A* **366** 167
- [6] Wang M J, Wang X Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1467 (in Chinese) [王明军、王兴元 2009 物理学报 **58** 1467]
- [7] Zhang M, Hu S S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1431 (in Chinese) [张 敏、胡寿松 2008 物理学报 **57** 1431]
- [8] Xing Z C, Xu W, Rong H W, Wang B Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 824 (in Chinese) [邢真慈、徐 伟、戎海武、王宝燕 2009 物理学报 **58** 824]
- [9] Olgac N, Holm-Hansen B T 1996 *J. Sound and Vibr.* **176** 93
- [10] Olgac N, Jalili N 1998 *J. Sound and Vibr.* **218** 307
- [11] Hosek M, Elmali H, Olgac N 1997 *J. Sound and Vibr.* **205** 151
- [12] Zhao Y Y, Xu J 2007 *J. Sound and Vibr.* **308** 212
- [13] Wirkus S, Rand R 2002 *Nonl Dynam.* **30** 205

The delayed feedback control to suppress the vibration in a torsional vibrating system^{*}

Zhao Yan-Ying[†] Li Chang-Ai

(School of Aircraft Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

(Received 8 January 2011; revised manuscript received 9 March 2011)

Abstract

We investigate the delayed feedback control to suppress the vibration in a torsional vibrating system. The delayed feedback control is applied to a torsional vibrating system with a nonlinear dynamical absorber. We investigate the effects of gain and delay on vibration suppression of the primary system. The results show that for a fixed gain, the vibration of the primary system can be suppressed at some values of the delay. As the delay varies for a fixed gain, the amplitude of the primary system can be suppressed to a minimum value. The vibration of the primary system is suppressed from 0.24 to 0.03 when the gain and the delay are chosen to be appropriate values. The analytical solutions are consistent well with the numerical simulation.

Keywords: delayed feedback, torsional vibration, suppression

PACS: 43.40. Vn, 43.40. Ga

^{*} Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10802035).

[†] E-mail: yanyingzhao@163.com