

光晶格中非相干超冷原子的密度关联效应*

徐志君[†] 刘夏吟

(浙江工业大学应用物理系, 杭州 310032)

(2010年8月28日收到; 2011年8月12日收到修改稿)

陷俘于光晶格中的 Mott 绝缘体态原子是非相干物质波波源. 这种物质波从光晶格释放后不会出现一阶干涉现象, 但是存在二阶干涉(密度关联)效应. 针对这一现象, 理论上给出了自由膨胀超冷原子气体的密度关联函数, 该函数表现出清晰的干涉峰, 其条纹结构与光栅衍射谱类似. 进一步研究表明, 密度关联函数的峰值结构与两探测器的相对位置有关, 出现了物质波的“亚波长干涉”现象.

关键词: 光晶格, 密度关联函数, 两粒子干涉

PACS: 03. 75. Lm, 05. 30. Jp, 03. 75. Nt

1. 引言

近半个世纪以前, Hanbury-Brown-Twiss (HBT) 所开创的光强光联实验^[1]揭示了光源许多重要的特性. 这种关联函数在量子光学、天体物理、凝聚态物理等领域已有重要的应用^[2-6]. 近年来, 随着原子激光冷却技术和原子探测技术的发展, 人们也观测到原子的 HBT 效应^[7], 因此, 超冷玻色原子和费米原子密度关联函数的研究引起了广泛关注, 密度关联函数的理论分析和实验探测已成为揭示多粒子系统量子特性强有力的工具^[8-14]. 本文以一维光晶格为物理模型, 研究处于 Mott 绝缘体 (MI) 态超冷原子从光晶格释放后自由膨胀时的密度关联函数的性质.

2. 密度关联函数

典型的一维光晶格, 可通过两相向传播的相同的激光束叠加而获得, 其陷俘超冷原子的势可表示为

$$V = U \sin^2\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (1)$$

式中 U 为光晶格深度, λ 为激光波长, $d = \lambda/2$ 为光

晶格空间周期. 实验上, 通过绝热增加光晶格深度 U 至某一临界值 U_c , 可实现凝聚原子从超流态到 MI 态的量子相变^[14]. 在 $T = 0$ K 时, MI 态可用 Fock 态表示为

$$|\Psi\rangle = \prod_k \frac{1}{\sqrt{n_k!}} (a_k^\dagger)^{n_k} |0\rangle, \quad (2)$$

式中整数 k 表示光晶格序数, a_k^\dagger 为第 k 个光晶格中原子创生算符, n_k 为第 k 个光晶格中的凝聚原子数. 关闭光晶格后, 最初位于光晶格中的非相干原子云将在自由空间膨胀、叠加. 处于 MI 态的凝聚原子云不存在空间相干性, 其自由膨胀、叠加的结果不会出现密度分布的干涉图样^[15], 然而, 密度关联函数将产生显著的干涉效应. 密度关联函数的这一特性为研究非相干原子间的干涉提供了强有力的工具, 并能从中得到系统量子态的许多重要性质. 为此, 考虑如下归一化的密度关联函数^[8,9]:

$$g^2(x_1, x_2, t) = \frac{\langle \hat{n}(x_1, t) \hat{n}(x_2, t) \rangle}{\langle \hat{n}(x_1, t) \rangle \langle \hat{n}(x_2, t) \rangle}. \quad (3)$$

这里 $\hat{n} = \hat{\Psi}^\dagger \hat{\Psi}$ 是密度算符, $\Psi(x, t) = \sum_k a_k \Phi_k(x, t)$ 是场算符, 其中 $\Phi_k(x, t)$ 是第 k 个光晶格中原子的波函数. 密度关联函数 $g^2(x_1, x_2, t)$ 刻画了两个粒子的关联, 即表示在位置 x_1 处探测到一个原子而同时在 x_2 处探测到另一个原子的概率, 其探测方案可参见文献[9]. 方程(3)中 $\langle \cdot \rangle$ 表示对系综求平

* 浙江省自然科学基金(批准号: Y6090620)资助的课题.

[†] E-mail: xzj@zjut.edu.cn

均,实验上可通过如下标准方法获得:一次实验,可测得经过一定时间膨胀后的原子云密度分布,即可得到 $n(x_1, t)$, $n(x_2, t)$ 以及 $n(x_1, t)n(x_2, t)$ 等值;在相同的实验条件下多次重复这一实验,然后对多次实验结果求系综平均,得到 $\langle \hat{n}(x_1, t) \rangle$, $\langle \hat{n}(x_2, t) \rangle$ 和 $\langle \hat{n}(x_1, t)\hat{n}(x_2, t) \rangle$ 等值,从而计算出密度关联函数 $g^2(x_1, x_2, t)$. $g^2(x_1, x_2, t) = 1$ 表明两粒子不存在相关性, $g^2(x_1, x_2, t) > 1$ 和 $g^2(x_1, x_2, t) < 1$ 分别表示粒子的聚集效应和反聚集效应,对应于玻色子和费米子.

对量子简并系统,方程(3)中 $\langle \hat{n}(x_1, t)\hat{n}(x_2, t) \rangle$ 可进一步表示为

$$\langle \hat{n}(x_1, t)\hat{n}(x_2, t) \rangle = \langle \Psi^\dagger(x_1, t)\Psi(x_1, t) \rangle$$

$$g^2(x_1, x_2, t) = 1 \pm \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(x_1, t)\hat{\Psi}(x_2, t) \rangle}{\langle \hat{n}(x_1, t) \rangle \langle \hat{n}(x_2, t) \rangle} - \frac{\sum_k n_k(n_k \pm 1) |\Phi_k(x_1, t)|^2 |\Phi_k(x_2, t)|^2}{\langle \hat{n}(x_1, t) \rangle \langle \hat{n}(x_2, t) \rangle}. \quad (5)$$

在下面的计算中,我们仅以玻色子为例,费米子的情况可做类似处理.相比较而言,当系统总原子数 $N \gg 1$ 时,方程(5)中右边第三项对 $g^2(x_1, x_2, t)$ 的影响只有 $1/N$ 的量级,对密度关联函数影响很小^[11].因此,在密度关联函数中起主要作用的是第二项,即两粒子干涉项,其作用类似于 HBT 实验,表征了密度关联函数中的干涉结构特征.综上所述,只要求出 $\Phi_k(x, t)$,便可以讨论密度关联函数的基本性质.

对一维光晶格中处于 MI 态的超冷原子,为便于计算,又不影响密度关联函数的基本结构,可设光晶格中每个格子只含一个原子,这样第 k 个光晶格中的初态波函数可用归一化的高斯函数来近似^[16-18],即

$$\Phi_k(x, t=0) = \frac{1}{\pi^{1/4} l_0^{1/2}} \times \exp\left[\frac{(x - kd)^2}{2l_0^2} \pm i\varphi_k\right], \quad (6)$$

式中 l_0 为光晶格中凝聚原子云的高斯宽度,表征光晶格中原子波包的大小, φ_k 为第 k 个光晶格中原子波函数的相位因子,由于凝聚原子处于 MI 态,不存在相干性,因而 φ_k 是一个随机变量.

关闭光晶格后,初态原子波包将在自由空间膨胀.若不计原子间的相互作用,则第 k 个光晶格中的原子波包 $\Phi_k(x, t)$ 在自由空间随时间的演化将服

$$\begin{aligned} & \times \Psi^\dagger(x_2, t)\Psi(x_2, t) \rangle \\ & = \langle \hat{n}(x_1, t) \rangle \langle \hat{n}(x_2, t) \rangle \\ & \pm |\langle \Psi^\dagger(x_1, t)\Psi(x_2, t) \rangle|^2 \\ & - \sum_k n_k(n_k \pm 1) |\Phi_k(x_1, t)|^2 \\ & \times |\Phi_k(x_2, t)|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

方程(4)中的正号对应玻色子,负号对应费米子,这是由于玻色子和费米子的量子统计性质不同所致.值得注意的是,在方程(4)的计算中,已按照常用的处理方法将含有 $\delta(x_2 - x_1)$ 的项略去^[10],因为其作用仅仅是增加 $g^2(x_1, x_2, t)$ 在 $x_1 = x_2$ 处的值,而不影响密度关联函数的基本结构.将方程(4)代入方程(3)可得

从含时的薛定谔方程,即

$$i\hbar \frac{\partial \Phi_k(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Phi_k(x, t), \quad (7)$$

式中 m 为原子质量.因此,由初态波函数 $\Phi_k(x, t=0)$ 和方程(7)可得到随时间演化的波函数 $\Phi_k(x, t)$,即

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, t) & = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{(1 + i\Theta)l_0}} \\ & \times \exp\left[-\frac{(x - dk)^2}{2l_0^2(1 + i\Theta)} - i\varphi_k\right], \end{aligned} \quad (8)$$

式中引入无量纲参数 $\Theta = \hbar t/(ml_0^2)$.由方程(5)和方程(8)便可得到密度关联函数.

为进一步分析关联函数 $g^2(x_1, x_2, t)$ 随时间演化的特点,将方程(8)分解为高斯波包与演化相位两部分,即重写为

$$\begin{aligned} \Phi_k(x, t) & = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{(1 + i\Theta)l_0}} \\ & \times \exp\left[\frac{-(x - dk)^2}{2l_0^2(\Theta^2 + 1)}\right] \\ & \times \exp\left[\frac{i(x - dk)^2}{2l_0^2(\Theta + 1/\Theta)} + i\varphi_k\right]. \end{aligned} \quad (9)$$

由(9)式可得原子波包的尺度随时间演化的关系 $l_t = \sqrt{l_0^2(\Theta^2 + 1)}$.在一般实验中,自由膨胀时间 t 在 ms 量级,初始波包的高斯宽度 $l_0 < d/2$,约为 10^{-7} m 量级,则 $\Theta = \hbar t/(ml_0^2)$ 在 10^4 以上量级,所以

有 $l_t \approx l_0 \Theta = \hbar t / (ml_0)$, 可见其膨胀速度取决于初始原子波包的宽度 l_0 . 当 $l_t \approx d$ 时, 仅相邻格子中原子波包开始叠加; 当 $l_t \geq dk_M$ 时 (k_M 为总光晶格数), 所有原子波包发生叠加.

另一方面, 两粒子干涉项 $\langle \hat{\Psi}^\dagger(x_1, t) \hat{\Psi}(x_2, t) \rangle$ 可以进一步展开为

$$\begin{aligned} & \langle \hat{\Psi}^\dagger(x_1, t) \hat{\Psi}(x_2, t) \rangle \\ &= \left| \sum_k \Phi_k^*(x_1, t) \Phi_k(x_2, t) \right|^2 \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2} l_0 \sqrt{1 - \Theta^2}} \\ & \times \left| \sum_k \exp \left[\frac{-(x_1 - dk)^2 - (x_2 - dk)^2}{2l_0^2(\Theta^2 + 1)} \right] \right. \\ & \times \left. \exp \left[\frac{-i2dk(x_2 - x_1)}{2l_0^2(\Theta + 1/\Theta)} \right] \right|^2. \quad (10) \end{aligned}$$

分析(10)式中的相位因子, 发现两粒子干涉项在 $x_2 - x_1 = 2\pi n l_0^2 (\Theta + 1/\Theta) / d$ (n 为整数) 处关联函数 $g^2(x_1, x_2, t)$ 出现峰值. 由于 Θ 值约为 10^4 量级, 因此有

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &\approx \frac{2\pi n l_0^2 \Theta}{d} \\ &= \frac{2\pi n \hbar t}{md}. \quad (11) \end{aligned}$$

由此可知, 当一阶干涉不能形成干涉图样时, 密度关联函数(二阶干涉)将出现明显的干涉峰值结构. 如果取 $x_1 = -x/2, x_2 = x/2$, 则有 $x = 2\pi n \hbar t / (md)$, 相邻峰值间距 $\Delta x = 2\pi \hbar t / (md)$. 这与文献[9]中的结果一致.

3. 结果及讨论

3.1. 光晶格数与密度关联函数谱的关系

为便于计算, 空间变量以 d 为单位, 并选用经典实验参数, 即 $m = 87 \times 10^{-27}$ kg (^{87}Rb 原子), $\lambda = 853$ nm, $l_0 = 0.15d$, 演化时间 $t = \tau_0 = 1$ ms, 对密度关联函数进行数值计算. 图1给出了总光晶格数 k_M 分别为2, 5和40三种情况下, 处于MI态的玻色凝聚原子归一化密度关联函数的分布情况(两探测器分别位于 $x_1 = -x/2$ 和 $x_2 = x/2$ 处). 对于一阶干涉, 陷俘于光晶格中的MI态原子, 关闭光晶格后就观测不到干涉图样, 膨胀原子云密度分布是无法表明系统的量子统计特性的, 而密度关联函数 $g^2(x_1, x_2, t)$ 表现

出类似于光栅衍射的干涉峰结构, 这正是两粒子干涉效应, 揭示了MI态原子系统重要的量子统计特性. 对费米原子, 干涉峰处变为谷, 其他情况类似, 这里不展开讨论.

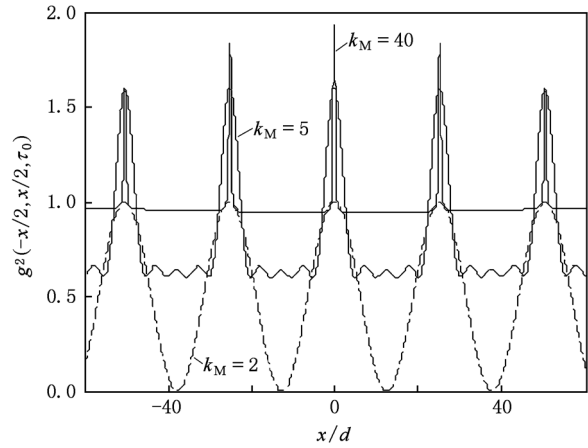


图1 当 k_M 分别为2, 5和40时, 处于MI态且初始波包宽度 $l_0 = 0.15d$ 的玻色凝聚原子经过 $\tau_0 = 1$ ms 时间演化后的归一化密度关联函数谱

3.2. 密度关联函数中的亚波长干涉效应

由方程(11)可知, 两探测器相对位置间距 $x_2 - x_1$ 不同, 密度关联函数的峰值间距就不一样. 当两探测器间距为 $x_2 - x_1 = x/2 - (-x/2) = x$ 时, 密度关联函数的峰值间距为 $\Delta x = 2\pi \hbar t / (md)$; 当两探测器间距为 $x_2 - x_1 = x - (-x) = 2x$ 时, 密度关联函数峰值的间距为 $\Delta x' = \pi \hbar t / (md)$, 其对应的密度关联函数谱分别如图2(a)和(b)所示. 由此可知, 当膨胀时间一定时, 密度关联函数峰值的间距取决于两探测器的相对位置. 这种现象类似于量子光学中的“亚波长干涉”(subwavelength interference)现象^[19,20]. “亚波长干涉”的名称源于同一波长光的二阶干涉条纹间距是一阶干涉条纹间距的二分之一这一现象. 为便于比较, 这里给出在相同条件下处于超流态的相干玻色凝聚气体的一阶干涉 $g^1(x, x, \tau_0) = n(x, \tau_0)$ 的干涉图样^[16-18](图2(c)), 其相邻条纹的间距也为 $\Delta x = 2\pi \hbar t / (md)$, 与两探测器间距为 $x_2 - x_1 = x$ 时的二阶干涉条纹间距一致, 为探测器间距 $x_2 - x_1 = 2x$ 时的两倍. 由玻色凝聚原子波包的尺度随时间演化的关系 $l_t \approx \hbar t / (ml_0)$ 可知, 原子波包的膨胀速度 $v = \hbar / (ml_0)$, 因此其德布罗意波长 $\lambda_{dB} = 2\pi l_0$, 则峰值间距可写为 $\Delta x = l_t \lambda_{dB} / d$. 因而当飞行测量时间 t 一定时, 密度关联函数的峰值

间距也与物质波的波长成正比,类似光学中的多光束干涉,其条纹间距与波长成正比. 当 $x_2 - x_1 = 2x$ 时,有 $\Delta x' = \frac{l_i \lambda_{dB}}{d} \frac{1}{2}$,即二阶干涉条纹间距是一阶干涉条纹间距的二分之一,这就是本文提出的物质波的“亚波长干涉”效应.

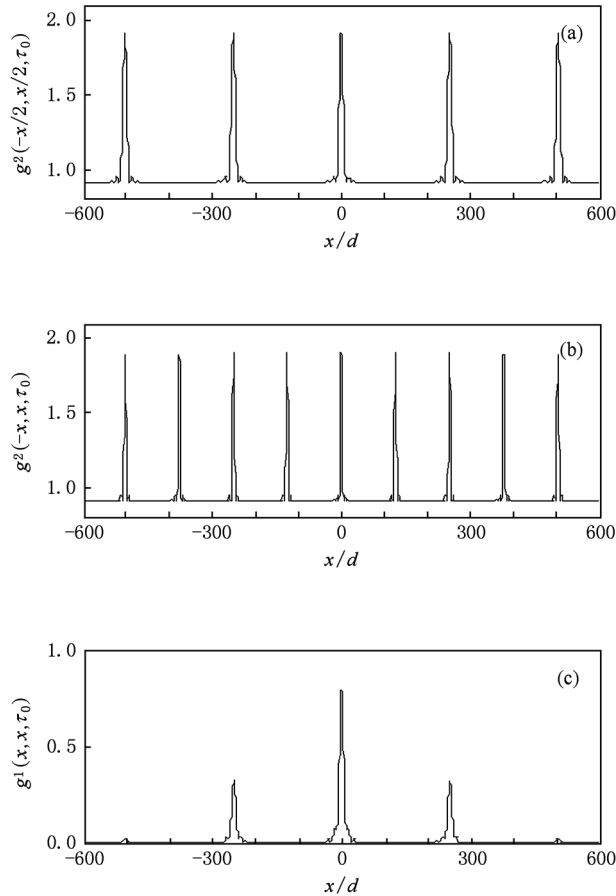


图2 当光晶格数 $k_M = 21$, 初始波包宽度 $l_0 = 0.15d$ 时, 密度关联函数与探测器相对位置 x 的关系及与一阶干涉效应的比较 (a) 两探测器间距为 x , (b) 两探测器间距为 $2x$, (c) 相干超流态一阶干涉密度分布

3.3. 初始波包宽度与关联函数的关系

图3给出了初始原子波包宽度与关联函数的关系. 由 $\lambda_{dB} = 2\pi l_0$ 可知, 初始波包宽度 l_0 越小, 物质波波长越短, 但由于原子波包膨胀速度与 l_0 成反比, 由 $\Delta x = l_i \lambda_{dB}/d$ 知峰值间距与初始宽度 l_0 无关, 完全由光晶格空间周期决定, 这类似于光栅衍射. 然而, 由方程(10)中的高斯波包部分可知, 初始宽度 l_0 的值决定关联函数分布的轮廓, 与单缝衍射类似, 即初始宽度 l_0 等效于单缝衍射中的

缝宽; 而关联函数中的峰值结构则由方程(10)中的相位因子决定.

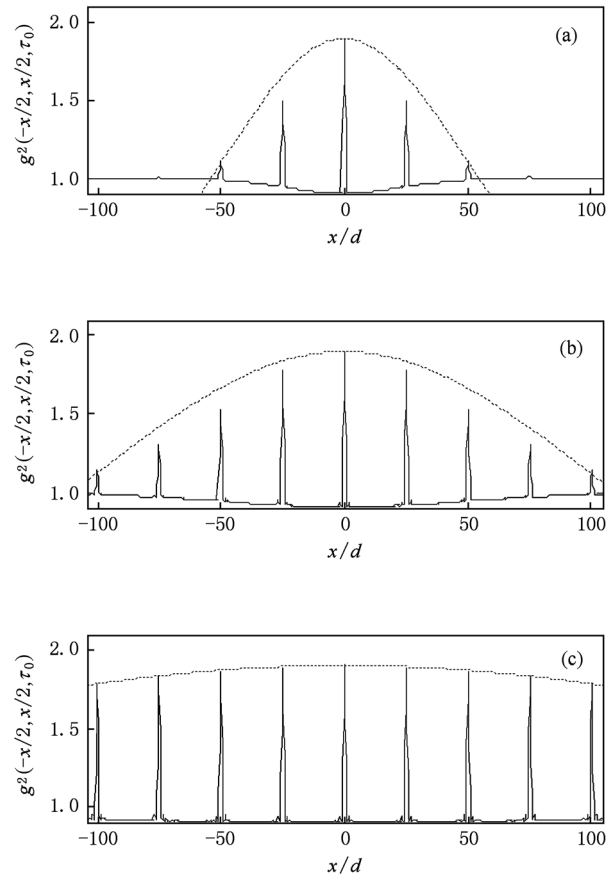


图3 当 $k_M = 21$ 时, 密度关联函数与初始波包宽度 l_0 的关系 (a) $l_0 = 0.3d$, (b) $l_0 = 0.2d$, (c) $l_0 = 0.1d$

4. 结 论

自实验上观察到超冷原子的 HBT 效应以来, 一系列处于 MI 态超冷原子二阶相干性的理论研究和实验探测就成为揭示多粒子系统量子特性强有力的工具. 研究表明, 一系列处于 MI 态的凝聚原子云是非相干物质波波源, 从光晶格中释放后不能产生普通的一阶干涉现象, 但是存在二阶干涉效应(密度关联), 并且表现出清晰的二阶干涉图样. 其条纹结构与光栅衍射类似, 而且二阶干涉条纹比一阶干涉更精细. 更令人感到有趣的是, 当两探测器的相对位置为 $x_2 - x_1 = 2x$ 时, 出现类似于量子光学中的“亚波长干涉”现象, 即非相干物质波的“亚波长干涉”效应. 对这种效应的研究和实验上的实现, 将为超冷原子的干涉计量测量提供新的思路. 特别是冷原子比光子有更加丰富的涡旋角动量, 那么带涡旋

角动量的超冷原子,其二阶干涉现象将更加有趣和更有应用价值. 同样,对于重力场中处于 MI 态的一

系列超冷原子的二阶相干性研究,也将给重力加速度的精确测量带来新的方法.

- [1] Brown R H, Twiss R Q 1956 *Nature* **177** 27
- [2] Mandel L, Wolf E 1995 *Optical Coherence and Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [3] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press)
- [4] Baym G 1998 *Acta Phys. Pol. B* **29** 1839
- [5] Boal D H, Gelbke C K, Jennings B K 1990 *Rev. Mod. Phys.* **62** 553
- [6] Zhao X W, Chen X L, Zhang H 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 482 (in Chinese) [赵杏文、程新路、张红 2010 物理学报 **59** 482]
- [7] Yasuda M, Shimizu F 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3090
- [8] Li Y, Chen L S, Xiong H W 2007 *Phys. Rev. A* **76** 063608
- [9] Fölling S, Gerbier F, Widera A, Mandel O, Gericke T, Bloch I 2005 *Nature* **434** 481
- [10] Rom T, Best T, Van Oosten D, Schneider U, Fölling S, Paredes B, Bloch I 2006 *Nature* **444** 733
- [11] Naraschewski M, Glauber R J 1999 *Phys. Rev. A* **59** 4595
- [12] Jelten T, McNamara J M, Hogervorst W, Vassen W, Krachmalnicoff V, Schellekens M, Perrin A, Chang H, Boiron D, Aspect A, Westbrook C I 2007 *Nature* **445** 402
- [13] Imambekov A, Mazets I E, Petrov D S, Gritsev V, Manz S, Hofferberth S, Schumm T, Demler E, Schmiedmayer J 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033604
- [14] Altman E, Demler E, Lukin M D 2004 *Phys. Rev. A* **70** 013603
- [15] Greiner M, Mandel O, Esslinger T, Hänsch T W, Bloch I 2002 *Nature* **415** 39
- [16] Liu S J, Xiong H W, Xu Z J, Huang G X 2003 *J. Phys. B* **36** 2083
- [17] Xu Z J, Wang D M, Li Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3076 (in Chinese) [徐志君、王冬梅、李珍 2007 物理学报 **56** 3076]
- [18] Pedri P, Pitaevskii L, Stringari S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 220401
- [19] D'Angelo M, Chekhova M V, Shih Y 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 013602
- [20] Xiong J, Cao D Z, Huang F, Li H G, Sun Z J, Wang K G 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 173601

Density correlation effect of incoherent ultracold atoms in an optical lattice *

Xu Zhi-Jun[†] Liu Xia-Yin

(Department of Applied Physics, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310032, China)

(Received 28 August 2010; revised manuscript received 12 August 2011)

Abstract

Atoms in the Mott insulator state trapped in an optical lattice are incoherence matter wave source. It is not the first-order, but the second-order interference effect (density correlation) that will appear for this incoherence wave source after being released. A density correlation function of the freely expanding ultracold gases is obtained theoretically, which presents sharp peaks of interference, and the stripes structure is similar to the diffraction gratings. It is further pointed out that the peak structure of the density correlation function depends on the relative position between two detectors. The phenomenon of subwavelength interference of matter waves is also proposed in this paper.

Keywords: optical lattice, density correlation function, two-particle interference

PACS: 03.75.Lm, 05.30.Jp, 03.75.Nt

* Project supported by the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6090620).

[†] E-mail: xzj@zjut.edu.cn