

双线性双滞后环系统的约束分岔*

吴志强^{1)†} 张振华¹⁾²⁾ 郝颖¹⁾

1) (天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) (南阳理工学院机电工程系, 南阳 473004)

(2010年11月13日收到; 2011年8月12日收到修改稿)

含双滞后环力-位移关系的系统在工程中有增多的趋势, 但相关的动力学研究还较少. 以形状记忆合金减振系统为背景, 研究了双线性双滞后环系统的主共振分岔问题. 首先用平均法求得了正弦激励下系统主共振幅频响应方程. 然后利用非光滑系统的约束分岔理论, 讨论了环境温度和外激励幅值变化对幅频响应曲线的影响. 结果表明: 环境温度和外激励幅值组成的参数平面可分成 11 个区域, 每个区域对应一种定性不同的幅频响应解. 此外, 为便于幅频响应图的描述和比较, 提出了一种编码规则来描述响应在扫频时的跳跃现象. 这对于系统频响模式的设计具有直接的指导作用.

关键词: 双线性, 滞后, 约束分岔

PACS: 05.45.-a

1. 引言

在机械、电子、生物和经济等多个领域内, 约束、摩擦、间隙、碰撞、滞后、可变刚度、开关、脉冲和数字控制等因素都会引起系统的非光滑性. 因非光滑系统具有不连续或不可微等特点, 其动力学分析有相当的特殊性, 一直是非线性动力学领域中具有吸引力的研究课题之一^[1, 2].

滞后非线性系统大多具有非光滑性的特点. 描述滞后的典型数学模型包括干摩擦理想模型、双线性滞后模型、Davidenkov 模型、Bouc-Wen 模型等^[3]. 其中双线性滞后模型结构简单, 物理意义明确, 应用比较广泛. 常见的双线性滞后模型有单环滞后模型和双环滞后模型两类. 单环双线性滞后模型是在理想干摩擦模型的基础上考虑了交界面弹性, 可用来描述弹塑性材料和摩擦阻尼元件等的滞后特性. 目前对单环双线性滞后系统的自治^[4]、非自治的单频激励^[5]和多频激励^[6]的研究已经有了许多成果. 如文献[4]研究了双线性单环滞后和 Van der Pol 阻尼相互作用产生的约束分岔; 文献[5]对同类系统受强迫激励的情况进行了

详细的数值分析, 表明滞后可用来抑制系统中的混沌现象; 而文献[7, 8]讨论了双线性滞后特性在地震隔振器中的应用. 双滞后环模型能够描述具有非线性应变恢复能力的结构和材料的力-位移关系. 随着抗震工程的发展, 已开发了大量新型的自定心结构系统^[9], 这种结构能在产生较大的非线性变形后自主恢复变形, 并具有较强的能量耗散能力. 这类结构包括由传统材料开发的新型耗能装置和智能材料构成的阻尼器, 如形状记忆合金(SMA)伪弹性阻尼器^[10-12]、钢结构建筑中用于梁柱连接的后张力耗能节点^[13]、后张力混凝土和钢抗弯框架^[14, 15]、抗震结构的自定心耗能支撑系统^[16]以及一些机械减振系统^[17]等的力-位移关系都可以用双滞后环模型来描述. 但目前对双线性双滞后环模型的动力学研究还比较有限.

分段线性系统的周期解分岔方程也是分段的, 所以难以用经典奇异性理论对其周期解分岔进行正确分类. 文献[4]将分段描述的分岔问题视为一系列单边、双边约束分岔问题的组合, 给出了分三段描述的分岔问题的所有转迁集类型, 为此类系统分岔的奇异性研究奠定了基础, 也为本文分析提供了工具.

* 国家自然科学基金(批准号: 10872142, 10472078)、教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-15-0247)、高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 2009003211005)和天津市自然科学基金重点项目(批准号: 09JCZDJC26800)资助的课题.

† E-mail: zhiqw@tju.edu.cn

本文以伪弹性 SMA 动力系统为背景,研究了含双线性双滞后环单自由度系统主共振情况下的约束分岔问题. 利用约束分岔理论,讨论了环境温度和激励幅值的变化对幅频响应的影响.

2. 动力学模型

考虑如图 1(a) 所示的振动系统,其动力学方程为

$$\ddot{x} + x = -\eta\dot{x} - \sigma + f \sin(\gamma t), \quad (1)$$

其中 σ 代表 SMA 阻尼器的名义回复应力. σ 与无量纲位移 x 间的关系如图 1(b) 所示,其数学表达式为^[18]

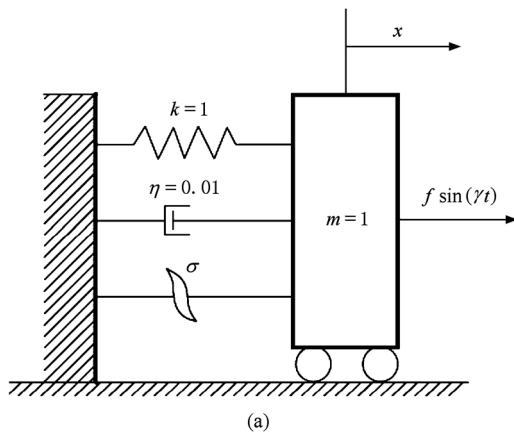
$$\sigma = k_i x + \sigma_{i0} \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (2)$$

其中

$$k_1 = k_3 = \frac{3}{50},$$

$$k_2 = k_4 = \frac{21}{5350},$$

$$\sigma_{10} = 0,$$



$$\sigma_{20} = \frac{3}{267500}(T + 66),$$

$$\sigma_{30} = \begin{cases} 0 & (0 < y < \varepsilon_{Ms}), \\ \frac{3}{267500}(T + 66) - \frac{6y}{107} & (\varepsilon_{Ms} \leq y \leq \varepsilon_{Mf}), \\ -\frac{3}{1250} & (\varepsilon_{Mf} < y), \end{cases}$$

$$\varepsilon_{Ms} = \frac{T + 66}{5000},$$

$$\varepsilon_{Mf} = 0.04 + \frac{T + 80}{5000},$$

$$\varepsilon_{As} = 0.04 + \frac{T + 17}{5000},$$

$$\varepsilon_{Af} = \frac{T + 3}{5000},$$

$$\sigma_{40} = \frac{3(T + 3)}{25280}.$$

这里 ε_{Ms} 和 ε_{Mf} 分别表示 SMA 马氏体相变开始和结束时的应变, ε_{As} 和 ε_{Af} 分别表示 SMA 奥氏体相变开始和结束时的应变, y 为 SMA 应变的最大值, T 为环境温度.

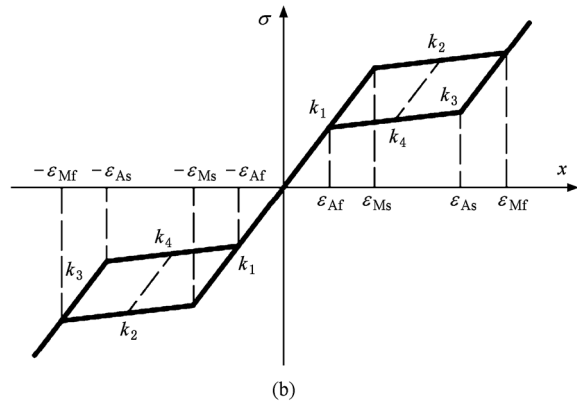


图 1 动力系统和 SMA 双线性回复应力模型 (a) 动力系统, (b) SMA 双线性回复应力模型

3. 系统的幅频响应方程

设系统主共振响应解为

$$x = y \cos(\gamma t + \theta), \quad (3)$$

振幅 y 也是 SMA 的最大应变值. 令

$$\varphi = \gamma t + \theta,$$

由平均法可得

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\int_0^{2\pi} [\eta y \sin\varphi - \sigma(y \cos\varphi) + f \sin(\gamma t)] \sin\varphi d\varphi}{2\pi}$$

$$= -\frac{\eta y}{2} + B_y - \frac{f \cos\theta}{2},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 - \gamma - \frac{\int_0^{2\pi} [\eta y \sin\varphi - \sigma(y \cos\varphi) + f \sin(\gamma t)] \cos\varphi d\varphi}{2y\pi}$$

$$= 1 - \gamma + B_\theta + \frac{f \sin\theta}{2y}. \quad (4)$$

这里

$$B_y = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(y \cos \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$= \begin{cases} B_{y1} & (0 \leq y < \varepsilon_{Ms}), \\ B_{y2} & (\varepsilon_{Ms} \leq y \leq \varepsilon_{Mf}), \\ B_{y3} & (y > \varepsilon_{Mf}), \end{cases}$$

$$B_\theta = \frac{1}{2y\pi} \int_0^{2\pi} \sigma(y \cos \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$= \begin{cases} B_{\theta1} & (0 \leq y < \varepsilon_{Ms}), \\ B_{\theta2} & (\varepsilon_{Ms} \leq y \leq \varepsilon_{Mf}), \\ B_{\theta3} & (y > \varepsilon_{Mf}), \end{cases}$$

其中 $B_{y1}, B_{y2}, B_{y3}, B_{\theta1}, B_{\theta2}, B_{\theta3}$ 的表达式见附录.

令

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

$$Q = 10^5 f^2,$$

消去方程组(4)中的 θ 可得幅频响应方程

$$\frac{10^5 (\eta y - 2B_y)^2}{Q} + \frac{10^5 [2(\gamma - 1 - B_\theta)y]^2}{Q} = 1. \quad (5)$$

由方程(5)解得

$$g = \begin{cases} \frac{10^5 (\eta y - 2B_{y1})^2}{Q} + \frac{10^5 [2(\gamma - 1 - B_{\theta1})y]^2}{Q} - 1 & (0 \leq y < \varepsilon_{Ms}), \\ \frac{10^5 (\eta y - 2B_{y2})^2}{Q} + \frac{10^5 [2(\gamma - 1 - B_{\theta2})y]^2}{Q} - 1 & (\varepsilon_{Ms} \leq y \leq \varepsilon_{Mf}), \\ \frac{10^5 (\eta y - 2B_{y3})^2}{Q} + \frac{10^5 [2(\gamma - 1 - B_{\theta3})y]^2}{Q} - 1 & (\varepsilon_{Mf} < y). \end{cases} \quad (7)$$

利用文献[4]给出的变迁集定义,计算得到分岔方程(7)的非空变迁集包括第二段上边界和下边界的约束分岔集 BI2u 和 BI2l、第二段滞后集 H2、第二段上边界约束滞后集 HI2u、第二段上下边界约束双极限点集 DLI2ul、第三段下边界约束分岔集 BI3l 和第三段滞后集 H3. 这些变迁集把 $T \in [0, 200]$, $Q \in [0, 0.6]$ 的平面分成 11 个区域 (见图 2). 根据奇异性理论,在同一个区域内幅频响应曲线保持定性不变. 因此,在所考察的开折参数范围内对应 11 种定性不同的幅频响应曲线,各个区域的幅频响应曲线如图 3 所示,图 3(a)~(k) 分别与图 2 中的区域 1~区域 11 对应. 为清楚表示最大振幅的范围,各幅频响应图中用上两

$$\gamma = 1 + B_\theta \pm \frac{1}{2 \times 10^3 y} \times \sqrt{10Q - 10^6 (\eta y - 2B_y)^2}. \quad (6)$$

如果给出所有的参数,就可以根据方程(6)画出系统的幅频响应图. 对于不同的参数,幅频响应曲线会呈现定性或者定量上的不同. 如果知道存在定性不同的幅频响应曲线的数量及对应的参数条件,设计者就容易找出理想参数使系统具有所期望的振动特征. 为了得到定性不同的幅频响应曲线及对应的参数条件,下面引入了约束分岔理论对幅频方程(5)进行分析.

4. 约束分岔分析

从分岔理论的观点看,若以外激励频率为分岔参数,响应幅值为状态变量,幅频响应方程即为分岔方程,幅频响应图即为分岔图. 因此幅频响应的分类可以通过奇异性理论来解决. 本文以环境温度 T 和外激励幅值 Q 为开折参数来研究其对系统分岔行为的影响.

将 $B_y = B_{yi} (i = 1, 2, 3)$, $B_\theta = B_{\theta i} (i = 1, 2, 3)$ 代入幅频响应方程(5),就得到分段描述的分岔方程

条点划线分别表示 $y = \varepsilon_{Mf}$ 和 $y = \varepsilon_{Ms}$ 两条水平线. 这两条线将幅频响应参数空间分为以下三部分: $y = \varepsilon_{Ms}$ 线以下为第一部分,在该区域的分岔图称为第一段分岔图,简称第一段; $y = \varepsilon_{Ms}$ 和 $y = \varepsilon_{Mf}$ 两条线之间为第二部分,在该区域的分岔图称为第二段分岔图,简称第二段; $y = \varepsilon_{Mf}$ 线以上为第三部分,在该区域的分岔图称为第三段分岔图,简称第三段. 为刻画幅频响应图细节特征,对图 3(e)~(k) 的虚线框内部分进行局部放大,放大图以内插形式置于各对应图中. 图 3 中的所有幅频响应图有一个共同的特征,即第一段 ($y \in (0, \varepsilon_{Ms}]$) 为线性,第二段 ($y \in (\varepsilon_{Ms}, \varepsilon_{Mf}]$) 呈现软特性,第三段 ($y \in [\varepsilon_{Mf}, 0.2)$) 呈现硬特性.

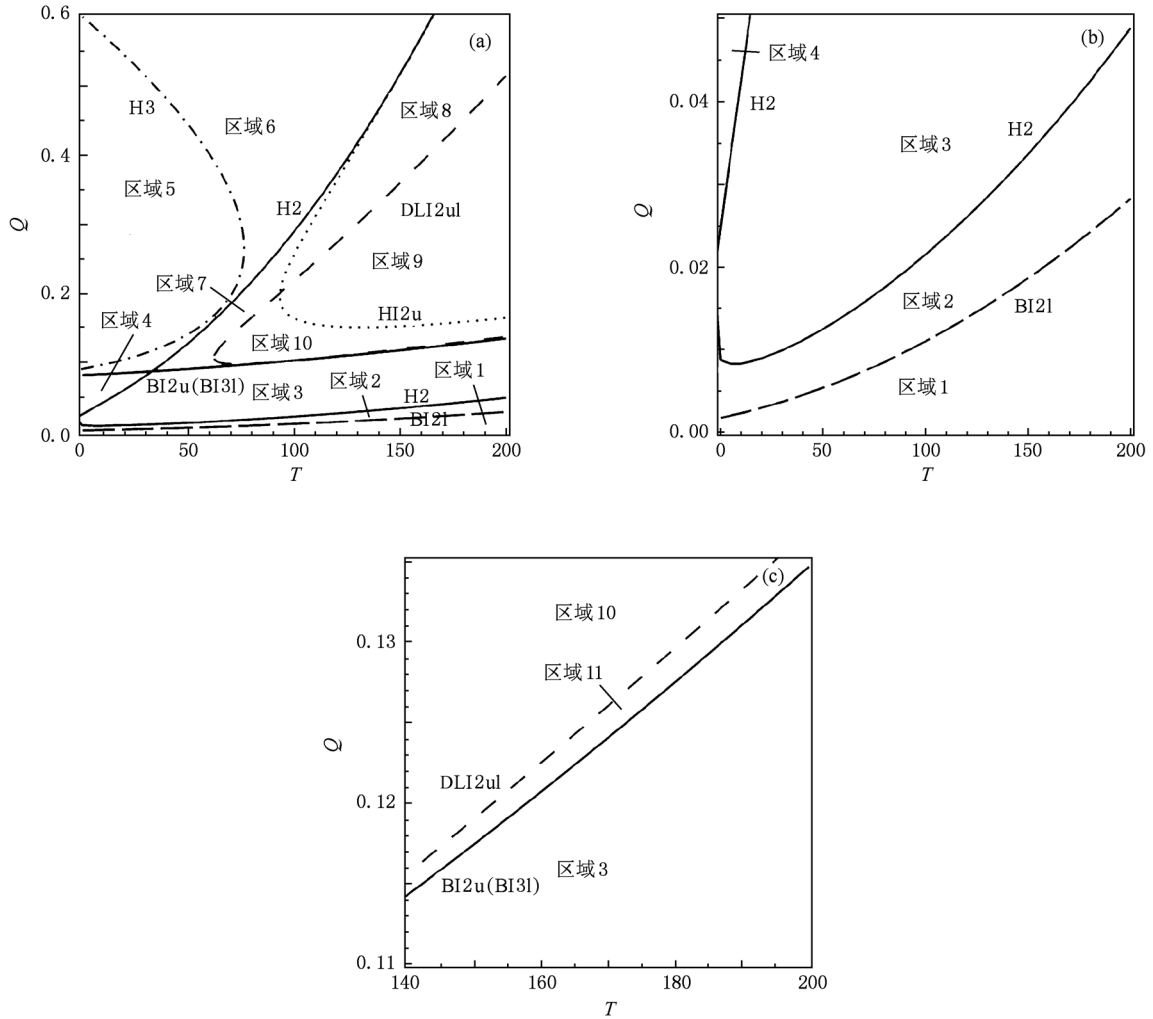


图2 幅频响应曲线的转迁集及其局部放大 (a) $T \in [0, 200]$, $Q \in [0, 0.6]$; (b) $T \in [0, 200]$, $Q \in [0, 0.05]$; (c) $T \in [0, 200]$, $Q \in [0, 0.05]$

上述结果对指导系统参数设计十分有用. 比如,若希望系统幅频响应特征与图3(c)相似,只需在图2中的区域3选择参数即可. 在不同区域中选择参数,可以设计出11种具有定性不同幅频响应的振动系统. 尽管图2中所有区域的幅频响应图是摄动保持的,但是不同区域幅频响应图的鲁棒性是不一样的. 区域1、区域2和区域11非常窄小,对应幅频响应较难实现,抗参数摄动能力也很差. 其他区域都比较大,比较容易实现,且有较好的抗干扰能力.

幅频响应曲线反映了响应幅值和简谐激励频率之间的关系. 如果幅频响应曲线出现多个稳态,外激励频率缓慢增加或者减小时,响应会在两个稳态解支之间跳跃. 为便于描述幅频响应曲线的特征和响应的跳跃次序,文中用字符串对分岔图进行编

码. 编码规则如下:编码由两个字符串组成,这两个字符串分别表示分岔参数缓慢增加和减小时分岔图的演化规律. 用L和R分别表示分岔图的左半支和右半支,用数字*i*(*i*=1, 2, 3)表示分岔曲线的段次,用u和d分别表示曲线在两个稳态解支上切换时向上跳跃和向下跳跃. 例如,分岔图3(c)的编号可以写成L1uL2R21-R12L2dL1,左边的字符串表示当外激励频率逐步增加时,响应经由第一段的左半支,在第一段左半支上向上跳跃至第二段的左半支,然后再依次到第二段、第一段的右半支;右边的字符串表示,当外激励的频率逐步减小时,响应经由第一段、第二段的右半支,在第二段的左半支上发生向下跳跃至第一段的左半支. 根据上述编码规则,以下给出了图3中所有分岔图的编码来表示幅频响应曲线在扫频时的跳跃特征. 图3(a)对应于

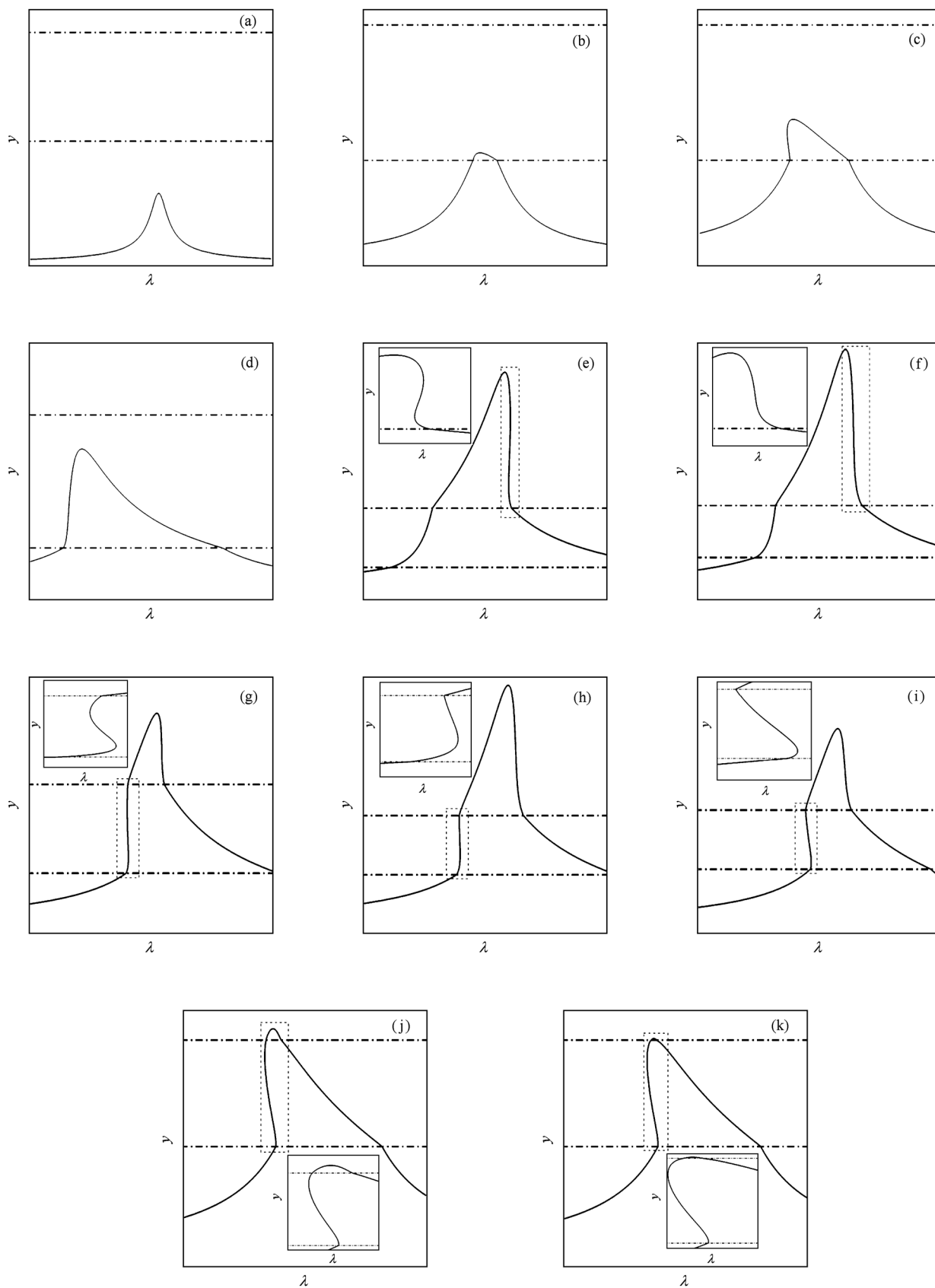


图3 参数空间内11个区域的分岔图 内插图是虚线框内的局部放大. (a) 区域1,(b) 区域2,(c) 区域3,(d) 区域4,(e) 区域5,(f) 区域6,(g) 区域7,(h) 区域8,(i) 区域9,(j) 区域10,(k) 区域11

图 2 中的区域 1, 其编码为 L1R1-R1L1. 该幅频响应曲线为完全线性的. 图 3(b) 对应于图 2 中的区域 2, 其编码为 L12R21-R12L21. 该幅频响应曲线达到第二段, 表现出拟线性特征, 没有滞后. 区域 1 和区域 2 之间是第二段下边界的约束分岔集 B121, 当开折参数穿越该变迁集时, 系统的幅频响应将发生线性和非线性的转换. 图 3(c) 对应于图 2 的区域 3, 编码为 L1uL2R21-R12L2dL1. 该幅频响应曲线有明显非线性特征, 且在第二段左侧解支有滞后. 区域 2 和区域 3 之间是第二段滞后集 H2, 当开折参数穿越该变迁集时, 幅频响应曲线在第二段的滞后性质发生变化. 图 3(d) 对应于图 2 的区域 4, 编码为 L12R21-R12L21. 该幅频响应曲线表现出拟线性特征, 没有滞后. 区域 3 和区域 4 之间仍是第二段滞后集 H2, 当开折参数穿越该变迁集时, 幅频响应曲线在第二段的滞后性质再次发生变化. 图 3(e) 对应于图 2 的区域 5, 编码为 L123R3dR321-R123uR3L321. 该幅频响应曲线达到第三段, 曲线在第二段没有滞后, 在第三段右侧解支出现滞后特征. 图 3(f) 对应于图 2 的区域 6, 编码为 L123R321-R123L321. 幅频响应曲线表现为拟线性, 没有滞后. 区域 5 和区域 6 之间为第三段的滞后集 H3, 当开折参数穿越该变迁集时, 幅频响应曲线第三段的滞后性质发生变化. 图 3(g) 对应于图 2 的区域 7, 编码为 L12uL3R321-R123L32dL1. 该幅频响应曲线第二段的左侧解支有滞后, 第三段没有滞后. 区域 6 和区域 7 之间是第二段的滞后集 H2, 当开折参数穿越该变迁集时, 曲线在第二段的滞后性质会发生变化. 图 3(h) 对应于图 2 的区域 8, 编码为 L12uL3R321-R123L3dL1. 该幅频响应曲线第二段左侧解支有滞后, 第三段没有滞后. 区域 7 和区域 8 之间是第二段上边界的约束滞后集 HI2u, 当开折参数穿越该变迁集时, 曲线在第二段上边界处的滞后性质发生变化. 图 3(i) 对应于图 2 的区域 9, 编码为 L12uL3R321-R123L3dL1. 该幅频响应曲线和区域 8 的幅频响应曲线具有相似特征, 但区域 8 和区域 9 之间存在第二段上下边界约束双极限点集 DLI2ul, 当开折参数穿越该变迁集时, 第二段左半支的上边界点、下边界点的相对位置关系发生变化. 图 3(j) 对应于图 2 的区域 10, 编码为 L12uR321-R123L32dL1. 该幅频响应曲线第二段左侧解支有滞后, 第三段没有滞后. 区域 9 和区域 10 之间是第二段上边界的约束滞后集 HI2u, 当开折参数穿越该变迁集时, 曲线在第二段上边界处的滞

后性质会发生变化. 图 3(k) 对应于图 2 的区域 11, 编码为 L12uR21-R123L32dL1. 该幅频响应曲线第二段左侧解支有滞后, 第三段没有滞后. 区域 11 非常狭小, 其分岔曲线的性质和相邻区域分岔曲线的性质区别不明显.

5. 结 论

用平均法求得了双环滞后非线性系统具有分段特性的幅频响应方程, 然后以幅频响应方程为分岔方程, 以环境温度和外激励幅值为开折参数, 用约束分岔奇异性分析方法求解了该分段分岔方程所有的变迁集. 这些变迁集将开折参数空间分成 11 个区域, 每个区域对应一种定性不同的幅频响应曲线. 所有区域对应的幅频响应曲线最多由三部分组成, 按振动幅值从小到大分别为线性段、软特性段和硬特性段, 多解主要出现在软特性段的左侧, 硬特性段的右侧. 11 种幅频响应曲线中, 有 1 种是线性的, 2 种是拟线性的, 这三种均无跳跃现象, 其余的 8 种均有跳跃, 且跳跃次序差别较大. 对所有幅频响应曲线分析发现, 响应峰值主要取决于外激励幅值. 在激励幅值不变的情况下, 温度对跳跃现象和跳跃次序有较大影响. 由幅频响应曲线特性可知, 在变迁集图中的区域 2、区域 3 和区域 4 内选择开折参数能够充分发挥 SMA 的滞后阻尼作用, 起到良好的振动控制效果. 此外, 本文提出的编码规则能准确且方便地描述幅频响应曲线在扫频时的跳跃现象. 该研究可以为双线性双滞后环阻尼结构的优化设计提供指导和参考.

附录 $B_{y1}, B_{y2}, B_{y3}, B_{\theta1}, B_{\theta2}$ 和 $B_{\theta3}$ 的表达式

方程(4)中的 $B_{y1}, B_{y2}, B_{y3}, B_{\theta1}, B_{\theta2}$ 和 $B_{\theta3}$ 的表达式如下:

$$\begin{aligned}
 B_{y1} &= 0, \\
 B_{y2} &= \frac{(k_1 - k_2)(\varepsilon_{Ms} - \varepsilon_{Af})}{\pi} \left(\frac{\varepsilon_{Ms}}{y} - 1 \right), \\
 B_{y3} &= \frac{k_1 - k_2}{2y\pi} [(\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Ms})^2 - (\varepsilon_{Af} - \varepsilon_{Ms})^2 - (\varepsilon_{As} - \varepsilon_{Mf})^2], \\
 B_{\theta1} &= \frac{k_1}{2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_{\theta_2} = & \frac{k_2 - k_1}{2y\pi} \left[\sqrt{\frac{(\varepsilon_{Ms} - \varepsilon_{As})(2y - \varepsilon_{Ms} + \varepsilon_{Af})}{y^2}} \right. \\
 & \times (y - \varepsilon_{Ms} + \varepsilon_{Af}) - y \arccos\left(\frac{y - \varepsilon_{Ms} + \varepsilon_{Af}}{y}\right) \\
 & + \arccos\left(\frac{\varepsilon_{Af}}{y}\right)y - \varepsilon_{Ms} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{Ms}^2}{y^2}} \\
 & \left. - \varepsilon_{Af} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{Af}^2}{y^2}} + \arccos\left(\frac{\varepsilon_{Ms}}{y}\right)y \right] + \frac{k_1}{2}, \\
 B_{\theta_3} = & \frac{k_1 - k_2}{2y\pi} \left[2(\varepsilon_{Ms} - \varepsilon_{Mf}) \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{As}^2}{y^2}} \right. \\
 & + y \left(\arccos \frac{\varepsilon_{Mf}}{y} - \arccos \frac{\varepsilon_{Ms}}{y} \right) \\
 & + y \left(\arccos \frac{\varepsilon_{As}}{y} - \arccos \frac{\varepsilon_{Af}}{y} \right) \\
 & + \varepsilon_{Af} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{Af}^2}{y^2}} + \varepsilon_{As} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{As}^2}{y^2}} \\
 & + \varepsilon_{Ms} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{Ms}^2}{y^2}} - \varepsilon_{Mf} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{Mf}^2}{y^2}} \\
 & \left. - 2\varepsilon_{Af} \sqrt{\frac{y^2 - \varepsilon_{As}^2}{y^2}} \right] + \frac{k_1}{2}.
 \end{aligned}$$

- [1] Zhang W, Hu H Y 2009 *New Development of Nonlinear Dynamic Theory and Applications* (Beijing: Science Press) p142 (in Chinese) [张 伟、胡海岩 2009 非线性动力学理论和应用的新进展 (北京:科学出版社) 第142页]
- [2] Li G J, Xu W, Wang L, Feng J Q 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2107 (in Chinese) [李高杰、徐 伟、王 亮、冯进铃 2008 物理学报 **57** 2107]
- [3] Li S H, Yang S P 2006 *J. Dynam. Contr.* **4** 8 (in Chinese) [李韶华、杨绍普 2006 动力学与控制学报 **4** 8]
- [4] Wu Z Q, Yu P, Wang K Q 2004 *Int. J. Bifur. Chaos* **14** 2825
- [5] Chen Z, Wu Z Q, Yu P 2005 *J. Sound Vib.* **284** 783
- [6] Huang C T, Kuo S Y 2006 *Int. J. Nonlin. Mech.* **41** 888
- [7] Fragiaco M, Rajgelj S, Cimadom F 2003 *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **32** 1333
- [8] Katsaras C P, Panagiotakos T B, Kolia B 2008 *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **37** 557
- [9] Christopoulos C 2004 *J. Eng. Mech. ASCE* **130** 894
- [10] Lau S M L, Lau K T, Yin Y S, Li L, Wong M, Chan K, Chen W 2010 *Mater. Manuf. Process.* **25** 281
- [11] Williams K A, Chiu G T C, Bernhard R J 2005 *J. Sound Vib.* **280** 211
- [12] Rustighi E, Brennan M J, Mace B R 2005 *Smart Mater. Struct.* **4** 19
- [13] Chou C C, Tsai K C, Yang W C 2009 *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* **38** 403
- [14] Stanton J F, Stone W C, Cheok G S 1997 *PCI J.* **42** 20
- [15] Priestley M J N, Sritharan S, Conley J R, Pampanin S 1999 *PCI J.* **44** 42
- [16] Christopoulos C, Tremblay R, Kim H J, Lacerte M 2008 *J. Struct. Eng. ASCE* **134** 96
- [17] Li H G, Zhang J W, Wen B C 2002 *Mech. Res. Commun.* **29** 283
- [18] Motahari S A, Ghassemieh M 2007 *Eng. Struct.* **29** 904

Constrained bifurcations of the system with double-loop bilinear hysteresis^{*}

Wu Zhi-Qiang^{1)†} Zhang Zhen-Hua¹⁾²⁾ Hao Ying¹⁾

1) (School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

2) (Department of Mechanical and Electrical Engineering, Nanyang Institute of Technology, Nanyang 473004, China)

(Received 13 November 2010; revised manuscript received 12 August 2011)

Abstract

Systems with double-loop hysteresis are used increasingly in engineering, but few studies on their dynamics are reported. In this study, the bifurcation characteristics of the primary resonance of a system with double-loop bilinear hysteresis are investigated on the background of a shape memory alloy damper. First, the frequency-amplitude response equation is obtained by using the averaging methods. Then, the influences of the temperature and the amplitude of excitation on amplitude-frequency responses are analyzed by the constrained bifurcation singularity analysis method of non-smooth systems. The calculation results show that the parameter space composed of the temperature and the amplitude of excitation can be divided into 11 regions, which suggest that there are 11 qualitatively different kinds of amplitude-frequency responses to the variation of two parameters. In order to describe and compare the frequency-amplitude response curves conveniently, an encoding rule is proposed to describe their jump phenomena as the frequency sweeps. The above results can guide directly the design of frequency response mode of the system.

Keywords: bilinearity, hysteresis, constrained bifurcation

PACS: 05.45.-a

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10872142, 10472078), the Program for the New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education, China (Grant No. NCET-05-0247), the Doctoral Program Foundation of Institution of Higher Education, China (Grant No. 2009003211005), and the Key Program of the Natural Science Foundation of Tianjin, China (Grant No. 09JCZDJC26800).

[†] E-mail: zhiqwu@tju.edu.cn