

无旋性前进重力波传递在均匀流中的 Lagrange 解析解与试验验证 I. 理论解析解

陈阳益^{1)2)†} 许弘莒³⁾ 张宪国⁴⁾

1) (国立中山大学海洋环境及工程学系, 高雄 804)

2) (国立成功大学水利及海洋工程学系, 台南 701)

3) (国立成功大学水工试验所, 台南 701)

4) (国立交通大学土木工程学系, 新竹 300)

(2010年12月31日收到; 2011年5月16日收到修改稿)

对于三维空间等深水中, 无旋性自由表面周期性规则前进重力波传递在均匀流中的波流场, 依质量守恒取一波长的流体质点的运动位移的波长平均高程, 所得其标注参数恰为其在原静止水中的位置下, 完全以 Lagrange 方式的参数控制式, 解出此波流场至第三阶的全 Lagrange 形式解且得到检验验证; 其中波流交互作用效应存在于 Lagrange 流速势中, 使得波流场中的压力不受均匀流的影响. 而 Euler 形式解所无法描述的流场特性, 包括大于前进波周期的流体质点的运动周期, 与其受前进波引起的质量传输速度、它们间的关系, 及流体质点对其运动周期平均的高程与成因等, 都说明是随流体质点所在的高程向下做指数函数样递减; 而流体质点的三维空间螺旋曲线式的运动轨迹与烟线, 其随均匀流的流向流速而变化的情况, 例如其在均匀流于前进波波向有同向的流速分量时, 是受流体质点恰在波谷断面处时的流速大小而变的形式, 与其在均匀流于前进波波向有反向的流速分量时, 则受流体质点恰在波峰断面处时的流速大小而变的形式, 有很大不同的倒反形式甚至以封闭曲线形式呈现. 最后, 说明波流场变成稳定性运动流场时的特性, 并证实其在无流时退化纯前进波的情况.

关键词: 质点轨迹, 漂移速度, 质点运动周期, Lagrange 平均高程

PACS: 47.35.Bb, 47.27.Wg, 47.50.Ef

1 引言

在真实海洋中, 波浪总是与各种可能形式的海流共存的, 且会受到海流流速分布型态的不同而对波浪产生不同的影响. 最明显的是, 当前进波波向与流同向时, 会使流体质点的位移增长, 而反向时则缩短. 因此, 对波流场的研究是一相当重要的课题. 尤其对在短期间的区域海域里, 前进波传递在近为均匀流的强劲潮流 (tidal current) 或黑潮 (Kuroshio) 或湾流 (gulf stream) 中的情况, 应当特别重视.

至今对波流场的研究, 虽已由早期对最简单的均匀流情况, 进展到有流速变化的剪力流, 如 Longuet-Higgins 和 Stewart^[1,2], Jonsson 等^[3-5], Peregrine^[6], Thomas^[7,8], 陈阳益和庄文杰^[9], Bad-

dour 和 Song^[10], 张宪国和陈阳益^[11], Groeneweg 和 Battjes^[12], Musumeci 等^[13] 及 Olabarrieta 等^[14]. 但这些往昔的研究, 均以数学解析较为简单的、描述各固定位置处的流场特性的 Euler 方式来处理. 而利用数学解析较为困难的 Lagrange 方式来描述波流场中流体质点的运动特性, 如对其运动轨迹、运动周期、质量传输速度与运动周期平均高程及烟线等, 至今仍有待探讨; 故对在波流场中的沉浮物, 其随流体质点漂流的行迹也就有待描述. 针对此, 近来 Hsu 等^[15] 虽已对在均匀流中无旋性的自由表面周期性规则前进重力波流场 (简记为 IFSPG-WPUC 波流场), 将陈阳益和庄文杰^[9] 所得的此波流场的三阶 Euler 解, 应用陈阳益和许弘莒^[16-18] 以及 Chen 和 Hsu^[19] 的 Euler-Lagrange 转换方式, 求出此波流场中流体质点运动轨迹的三阶解; 但这

† E-mail: yichen@mail.nsysu.edu.tw

并非完全以 Lagrange 方式, 即非由明确定义出标注流体质点的参数下, 来求得此波流场的 Lagrange 解. 因此, 为明确且较完整地描述波流场中流体质点的所有运动特性, 本文则直接依 Lagrange 方式, 来求出 IFSPGWPU C 波流场的三阶解.

文中第二节是说明 IFSPGWPU C 波流场的基本性质, 及依据流场具有时空周期性在满足质量守恒下, 明确定义出方便鉴别流体质点的标注参数; 在此标注参数下, 波流场必要满足的质量守恒式、无旋流条件式、能量式、在底床与自由表面处的两边界条件式等, 所有控制式均被列出. 应用陈阳益 [20,21], Chen 和 Hsu 等 [22,23] 的解析方式, 求出流体质点的运动轨迹与前进波的波速等至第三阶解, 则在第三节中陈述. 第四节, 则对所得的此波流场的全 Lagrange 形式三阶解进行检验验证, 并陈列出 Euler 形式解所无法描述的流体质点的运动特性, 包括其运动周期、质量传输速度与运动周期平均高程; 并呈现其运动轨迹的形状 (在给定的波浪条件下) 随均匀流的流向流速的变化与变成稳定性运动时的情形, 以及烟线. 第五节则对本文整个论述所得给予明确的结论.

2 波流系统的描述与控制方程式

2.1 波流系统及流体质点的 Lagrange 标注参数的取定

在三维空间中, 考虑一无旋性的自由表面规则前进重力波列, 传递在平均静水深为 d 的均匀流速 U 的流体中. 描述此波流系统, 本文引入坐标原点 0 恰位于原平均静水面的卡氏直角坐标 (Cartesian rectangular coordinate), 该坐标位于原平均静水面处的水平 x 轴的正方向为前进波的波向, 而水深方向的垂直 y 轴为向上取正, 侧向正交的 z 轴则以右手螺旋原则来定其正方向, 至于均匀流 U 其流速方向与正 x 轴的夹角为 θ ; 如图 1 所示. L 与 T_w 各为前进波的波长与周期, 而其对应的波数 (wave number) 与周波率 (angular frequency) 则分别为 $k = 2\pi/L$ 与 $\sigma_w = 2\pi/T_w$; H 为此前进波的波高.

由于本文是以 Lagrange 方式, 来描述在不可压缩性 (incompressible) 且无黏性 (inviscid) 的流体中无旋性 (irrotational) 运动的波流场, 故需先取定各个流体质点的 Lagrange 标注 (label) 参数 (a, b, c) , a, b, c 各为沿着 x, y, z 轴的坐标值; 其中 b 值关

系到水中质点的上下起伏, 特确定如下. 如上所述在均匀流中于 y 轴方向上下起伏的前进波, 是沿正 x 轴方向传递的, 因此, 在此波流场中流体质点的运动轨迹其函数形式为 $x = x(a, b, t)$, $y = y(a, b, t)$, $z = c + |U|t \sin \theta$; 再由质量守恒及波浪于 x 轴方向的时空周期性, 依据 Chen 等 [23] 所陈述的延伸应用, 于 Lagrange 方式描述下, 对此波流场在任意给定时间 t 及沿 z 轴取单位宽度下, 由不透水的水平底床 $y = b = -d$ 处至自由表面 $y = \eta(x(a, b = 0, t))$ 处取积分, 所得的波长平均体积为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \int_{-d}^{\eta} \int_z^{z+1} dz dy dx = d \\ & = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \int_{-d}^0 \int_c^{c+1} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} da db dc \\ & = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \int_{-d}^0 \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} da db, \end{aligned} \quad (1)$$

(1) 式中因 x 轴恰位于原平均静水位处而有 $\frac{1}{L} \int_x^{x+L} \eta dx = 0$; 并由此即可得 $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = 1$ 及一波长的流体质点的运动对应的波长平均高程 \bar{y} 为

$$\begin{aligned} \bar{y} & = \frac{1}{L} \int_{x(a, b, t)}^{x(a+L, b, t)} y dx = \frac{1}{L} \int_x^{x+L} \int_{-d}^y dy dx - d \\ & = \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \int_{-d}^b \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} db da - d \\ & = b, -d \leq b \leq 0, \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 与 (2) 式所述的结果, 将对 IFSPGWPU C 波流场解析求得其解后, 再给予回证.

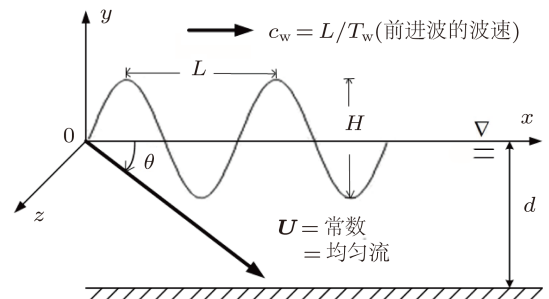


图 1 IFSPGWPU C 波流场示意图

由以上的陈述可得, 以 Lagrange 方式来描述 IFSPGWPU C 波流场, 在满足质量守恒下, 沿水深 y 轴方向被标注为 b 值的流体质点, 恰为 b 层的流体质点的运动高程 $y(a, b, t)$ 取波长平均 \bar{y} , 因此可取为 $-d \leq b = \bar{y} \leq 0$, 即在底床 $y = -d$

处的流体质点其 $b = -d$, 而在自由表面 $y = \eta$ 处的其 $b = 0$. 由此可得知, 在此取定下, IFSPG-WPUC 波流场中, 流体质点被取定的 Lagrange 标注参数 (a, b, c) 即为其在原静止水中的坐标值. 在这样的取定下, 以 Lagrange 方式来描述和解析 IFSPGWPU 波流场, 就很明确与方便了.

2.2 控制方程式

1) 质量守恒方程式

由上小节所述, 为解析求解, 则质量守恒式与其对时间 t 的偏微分式各为

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(a, b)} = x_a y_b - x_b y_a = 1 \quad (3)$$

与

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= \frac{\partial(x_t, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(x, y_t)}{\partial(a, b)} \\ &= x_{at} y_b - x_{bt} y_a + x_a y_{bt} - x_b y_{at} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

2) 动量守恒的运动方程式

参考 Lamb^[24] §13, 则动量守恒式为

$$x_{tt} x_a + y_{tt} y_a + z_{tt} z_a = -g y_a - p_a / \rho, \quad (5a)$$

$$x_{tt} x_b + y_{tt} y_b + z_{tt} z_b = -g y_b - p_b / \rho, \quad (5b)$$

$$x_{tt} x_c + y_{tt} y_c + z_{tt} z_c = -g y_c - p_c / \rho, \quad (5c)$$

式中 g 为重力加速度, ρ 为流体密度, p 为流场中作用在流体质点的压力; 而下标表示对所示的变量的偏微分.

3) 能量守恒的能量方程式

可由 (5a)—(5c) 式分别对时间 t 由起始时间 $t = t_0$ 至任意时间 t 取积分, 则有

$$\begin{aligned} &x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a - [x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a]_{t=t_0} \\ &= -K_a, \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} &x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b - [x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b]_{t=t_0} \\ &= -K_b, \end{aligned} \quad (6b)$$

$$\begin{aligned} &x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c - [x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c]_{t=t_0} \\ &= -K_c, \end{aligned} \quad (6c)$$

及

$$\begin{aligned} K_t &= p/\rho + gy - (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)/2 \\ K &= \int_{t_0}^t [p/\rho + gy - (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)/2] dt, \end{aligned} \quad (7)$$

(7) 式即为 Lagrange 方式描述下, 无黏性与不可压缩性流体的流场的能量式, 或所谓的 Weber 转换.

4) 非旋流条件式

由 Lamb^[24] §17 所示, 对密度等于常数或仅为压力的函数的理想流体, 在一具位势 (potential) 的守恒场如在重力场的重力作用下, 于任一时刻, 有一流速势 (velocity potential) 存在于此流体的任一有限部分的质团中时, 则在此部分的流体质团中于之前或之后时的运动, 皆有一流速势的存在. 因此, 令 IFSPGWPU 流场中, 于起始时间 $t = t_0$ 时存在一流速势 $\phi_0(t = t_0)$, 则由 Lamb^[24] §17 与 §251 里的导述, 有一正合微分式 (an exact differential equation) 成立于存在此 ϕ_0 的整个流体质团中, 为

$$\begin{aligned} &[u dx + v dy + w dz]_{t=t_0} \\ &= [(x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a) da \\ &\quad + (x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b) db \\ &\quad + (x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c) dc]_{t=t_0} \\ &= d\phi_0, \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式中 $u = x_t, v = y_t, w = z_t$ 分别表示流体质点于 x, y, z 轴方向上的流速分量. 接着, 将 (6a)—(6c) 三式分别乘以 da, db, dc 后相加, 且应用 (8) 式, 则在任意给定的时间 t 下, 有

$$\begin{aligned} &(x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a) da \\ &\quad + (x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b) db \\ &\quad + (x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c) dc \\ &= [d\phi_0 - dK] \\ &= d\phi = \phi_a da + \phi_b db + \phi_c dc, \\ &\phi = -K + \phi_0, \end{aligned}$$

由上式与 (7) 式, 可得

$$\begin{aligned} \phi_a &= x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a, \\ \phi_b &= x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b, \\ \phi_c &= x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c, \end{aligned} \quad (9a)$$

与

$$p/\rho = -\phi_t - gy + (x_t^2 + y_t^2 + z_t^2)/2, \quad (9b)$$

(9a) 和 (9b) 式中的 ϕ 即为 IFSPGWPU 流场的 Lagrange 流速势. 因此, 该无旋流流场的条件 (the irrotational flow condition), 按 (9a) 式的应用, 在 Lagrange 方式的描述下, 其在三维空间中的表示为

$$\begin{aligned} &\phi_{ba} - \phi_{ab} \\ &= (x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b)_a - (x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a)_b \\ &= x_{at} x_b - x_{bt} x_a + y_{at} y_b - y_{bt} y_a \\ &\quad + z_{at} z_b - z_{bt} z_a = \frac{\partial(x_t, x)}{\partial(a, b)} \\ &\quad + \frac{\partial(y_t, y)}{\partial(a, b)} + \frac{\partial(z_t, z)}{\partial(a, b)} = 0, \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{cb} - \phi_{bc} \\ &= (x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c)_b - (x_t x_b + y_t y_b + z_t z_b)_c \\ &= x_{bt} x_c - x_{ct} x_b + y_{bt} y_c - y_{ct} y_b \\ &+ z_{bt} z_c - z_{ct} z_b = \frac{\partial(x_t, x)}{\partial(b, c)} \\ &+ \frac{\partial(y_t, y)}{\partial(b, c)} + \frac{\partial(z_t, z)}{\partial(b, c)} = 0, \end{aligned} \quad (10b)$$

及

$$\begin{aligned} & \phi_{ac} - \phi_{ca} \\ &= (x_t x_a + y_t y_a + z_t z_a)_c - (x_t x_c + y_t y_c + z_t z_c)_a \\ &= x_{ct} x_a - x_{at} x_c + y_{ct} y_a - y_{at} y_c \\ &+ z_{ct} z_a - z_{at} z_c = \frac{\partial(x_t, x)}{\partial(c, a)} \\ &+ \frac{\partial(y_t, y)}{\partial(c, a)} + \frac{\partial(z_t, z)}{\partial(c, a)} = 0. \end{aligned} \quad (10c)$$

5) 边界条件式

在不透水的水平底床 $b = -d$ 与在自由表面 $b = 0$ 两边界处, 其需满足的条件式分别为

$$v = y_t = 0, \quad b = -d, \quad (11)$$

$$p = 0, \quad b = 0. \quad (12)$$

整理以上的导述, 则求解 IFSPGWPU C 波流场必需应用到的方程式依序是: 质量守恒式 (3) 式及其对时间 t 的偏微式 (4) 式, 与无旋流条件式 (10a)—(10c) 式及其对应的流速势 (9a) 式, 与能量式 (9b) 式及底床与自由表面边界条件 (11) 与 (12) 两式. 此可详见于下节中的求解过程.

3 摄动解析展开及至第三阶解

IFSPGWPU C 波流场, 于 Lagrange 方式描述下, 求解上节所述的非线性控制方程式. 本节中, 利用一个适当的摄动解析方式系统地对其逐阶地展开, 求出其至第三阶的 Lagrange 解析解. 由 2.1. 小节对 IFSPGWPU C 波流场的基本特性, 及参考陈阳益 [20,21], 陈阳益和许弘莒 [17,18] 以及 Chen 等 [19,22,23] 对规则前进重力波的论述, 且在无波的均匀流流场中的压力为静水压下, 则此波流场中待解的流体质点的运动轨迹 x, y, z , 与其运动周期 $T_L = 2\pi/\sigma$, 及流速势 ϕ 与压力 p 等, 其摄动展开的函数形式可表示为

$$\begin{aligned} x &= a + |\mathbf{U}|t \cos \theta + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n [f_n(a, b, \sigma t) \\ &+ f'_n(a, b, \sigma_0 t)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} y &= b + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n [g_n(a, b, \sigma t) \\ &+ g'_n(a, b, \sigma_0 t)], \end{aligned} \quad (14)$$

$$z = c + |\mathbf{U}|t \sin \theta, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi &= |\mathbf{U}|(a \cos \theta + c \sin \theta) + |\mathbf{U}|^2(t - t_0)/2 \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n [\phi_n(a, b, \sigma t) + \phi'_n(a, b, \sigma_0 t)] \\ &= -K + \phi_0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$p/\rho = -gb + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n p_n(a, b, \sigma t)/\rho, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \sigma &= 2\pi/T_L(b) = \sigma(b) \\ &= \sigma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \sigma_n(b), \end{aligned} \quad (18)$$

(13) 至 (18) 式中, ϵ 如 Pierson^[25] 所示的仅是表示阶次的一个参数 (an ordering parameter) 或符号而已, 而在最后求得的解中其取为 1. 在这些式中可明显地看出, 纯由均匀流所造成的量皆已被呈现在包括其流速 $|\mathbf{U}|$ 的项里. 再者, 对均匀流中沿 x 轴方向传递的周期性自由表面规则重力波, 其流场中所有的流体质点运动, 当然于 x 轴方向皆具同一空间周期 (即波长) 性; 因此, 流体质点的运动周期 T_L 与对应的周频率 $\sigma = 2\pi/T_L$, 仅是其沿水深 y 轴方向的标注参数 b 的函数, 详情可见下述的解析. 因此, 待求的流场解皆是参变数 b 的复合函数 (functional, 即函数的函数); 故若其解中有 $F(a, b, \sigma(b)t)$ 的复合函数形式, 则其对 b 的偏微分, 当然须包括对纯 b 本身的偏微分部分, 以下标 (b) 表示, 以及再加上对 σ 的偏微分部分, 即有

$$\partial F(a, b, \sigma(b)t)/\partial b = F_b = F_{(b)} + F_{\sigma t} \sigma_{bt}; \quad (19)$$

$$\partial F'(a, b, \sigma_0 t)/\partial b = F'_b = F'_{(b)}, \quad (20)$$

根据 (19) 式对复合函数的偏微分处理, 则可对 IF-SPGWPU C 波流场进行系统、清楚、明确地逐阶展开解析, 如下述.

3.1 第一阶 (即 ϵ 阶) 解

将 (13)—(18) 式代入控制方程式 (3), (4), (10a)—(10c), (9a), (9b) 及 (11) 与 (12) 式中, 且应用 (19) 式来取出其中的 ϵ 项, 则第一阶控制式依序为

$$f_{1a} + f'_{1a} + g_{1(b)} + g'_{1b} = 0, \quad (20a)$$

$$f_{1a\sigma t} + f'_{1a\sigma_0 t} + g_{1(b)\sigma t} + g'_{1b\sigma_0 t} = 0, \quad (20b)$$

$$f_{1(b)\sigma t} + f'_{1b\sigma_0 t} - g_{1a\sigma t} - g'_{1a\sigma_0 t} = 0, \quad (20c)$$

$$\phi_{1a} + \phi'_{1a} = |\mathbf{U}|(f_{1a} + f'_{1a}) \cos \theta + \sigma_0(f_{1\sigma t} + f'_{1\sigma_0 t}), \quad (20d)$$

$$\phi_{1(b)} + \phi'_{1b} = |\mathbf{U}|(f_{1(b)} + f'_{1b}) \cos \theta + \sigma_0(g_{1\sigma t} + g'_{1\sigma_0 t}), \quad (20e)$$

$$p_1/\rho = |\mathbf{U}|\sigma_0(f_{1\sigma t} + f'_{1\sigma_0 t}) \cos \theta - \sigma_0(\phi_{1\sigma t} + \phi'_{1\sigma_0 t}) - g(g_1 + g'_1), \quad (20f)$$

$$g_{1\sigma t} + g'_{1\sigma_0 t} = 0, \quad b = -d, \quad (20g)$$

$$p_1 = 0, \quad b = 0, \quad (20h)$$

上述第一阶 (即 \in 阶) 的控制式依序为: (20a), (20b) 两式分别为质量守恒式与其对时间 t 的偏微分式; (20c) 式为无旋流条件式; (20d), (20e) 两式分别为流速势 ϕ 对 a 与纯 b 本身的偏微分式; (20f) 式为能量守恒式; 而 (20g), (20h) 两式则分别为在水平底床与自由表面两处的边界条件式. 由这些控制式 (20a)—(20h) 式, 当取时间 $t = t_0 = 0$ 时, 且在 $a = b = 0$ 处为一个波峰点时, 解出 IFSPGWPU C 波流场的第一阶解为

$$f_1 = -\frac{H \cosh k(b+d)}{2 \sinh(kd)} \sin(ka - \sigma t), \quad f'_1 = 0, \quad (21)$$

$$g_1 = \frac{H \sinh k(b+d)}{2 \sinh(kd)} \cos(ka - \sigma t), \quad g'_1 = 0, \quad (22)$$

$$\phi_1 = \frac{H(\sigma_0 - k|\mathbf{U}| \cos \theta)}{2k} \times \frac{\cosh k(b+d)}{\sinh(kd)} \sin(ka - \sigma t), \quad \phi'_1 = 0, \quad (23)$$

$$\frac{p_1}{\rho} = -gH \frac{\sinh(kb)}{\sinh(2kd)} \cos(ka - \sigma t), \quad (24)$$

$$\sigma_0^2 = gk \tanh(kd), \text{ 且令 } \omega_0 = \tanh(kd), \quad (25)$$

(25) 式的结果是由已求出的 (21)—(23) 式的解代入 (20f) 式中且利用 (20h) 式而得的; 然后, 再把所得的 (21)—(23) 式及 (25) 式代入 (20f) 中就可得到 (24) 式. 上以式中 H 为波高, 即在第一阶解中波高就被给定了 [26], 故以后的高阶解中波峯减波谷的水位差就需为零.

3.2 第二阶 (即 \in^2 阶) 解

与上小节求解第一阶解时的做法一样, 由所述的控制式中取出 \in^2 项, 并利用所求得的第一阶解 (21)—(25) 式, 则 IFSPGWPU C 波流场的第二阶控制式依序为

$$f_{2a} + f'_{2a} + g_{2(b)} + g'_{2b}$$

$$= -f_{1a}g_{1(b)} + f_{1(b)}g_{1a} - \sigma_{1b}tg_{1\sigma t} = \frac{1}{8}k^2H^2 \left[\frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} + \frac{\cos 2(ka - \sigma t)}{\sinh^2(kd)} \right] - \frac{H}{2}\sigma_{1b} \frac{\sinh k(b+d)}{\sinh(kd)} t \sin(ka - \sigma t), \quad (26)$$

$$\sigma_0[(f_{2a} + g_{2(b)})_{\sigma t} + (f'_{2a} + g'_{2b})_{\sigma_0 t}] = -\sigma_1(f_{1a} + g_{1(b)})_{\sigma t} - \sigma_0(f_{1a}g_{1(b)} - f_{1(b)}g_{1a})_{\sigma t} - \sigma_{1b}g_{1\sigma t} - \sigma_0\sigma_{1b}tg_{1(\sigma t)^2} = \frac{1}{4}k^2H^2\sigma_0 \frac{\sin 2(ka - \sigma t)}{\sinh^2(kd)} - \frac{H}{2}\sigma_{1b} \frac{\sinh k(b+d)}{\sinh(kd)} \times [\sin(ka - \sigma t) - \sigma_0 t \cos(ka - \sigma t)], \quad (27)$$

$$\sigma_0[(f_{2(b)} - g_{2a})_{\sigma t} + (f'_{2b} - g'_{2a})_{\sigma_0 t}] = \sigma_1(g_{1a} - f_{1(b)})_{\sigma t} - \sigma_0(f_{1a}f_{1(b)\sigma t} - f_{1a\sigma t}f_{1(b)}) + g_{1a}g_{1(b)\sigma t} - g_{1a\sigma t}g_{1(b)} - \sigma_{1b}f_{1\sigma t} - \sigma_0\sigma_{1b}tf_{1(\sigma t)^2} = \frac{1}{4}k^2H^2\sigma_0 \frac{\sinh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} - \frac{H}{2}\sigma_{1b} \frac{\cosh k(b+d)}{\sinh(kd)} \times [\cos(ka - \sigma t) - \sigma_0 t \sin(ka - \sigma t)], \quad (28)$$

$$\phi_{2a} + \phi'_{2a} = |\mathbf{U}|(f_{2a} + f'_{2a}) \cos \theta + \sigma_0(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t}) + \sigma_1f_{1\sigma t} + \sigma_0(f_{1a}f_{1\sigma t} + g_{1a}g_{1\sigma t}) = |\mathbf{U}|(f_{2a} + f'_{2a}) \cos \theta + \sigma_0(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t}) + \frac{H}{2}\sigma_1 \frac{\cosh k(b+d)}{\sinh(kd)} \cos(ka - \sigma t) - \frac{\sigma_0}{8}kH^2 \left[\frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} + \frac{\cos 2(ka - \sigma t)}{\sinh^2(kd)} \right], \quad (29)$$

$$\phi_{2(b)} + \phi'_{2b} = |\mathbf{U}|(f_{2(b)} + f'_{2b}) \cos \theta + \sigma_0(g_{2\sigma t} + g'_{2\sigma_0 t}) + \sigma_1g_{1\sigma t} + \sigma_0(f_{1(b)}f_{1\sigma t} + g_{1(b)}g_{1\sigma t}) + (|\mathbf{U}|f_1 \cos \theta - \phi_1)_{\sigma t} \sigma_{1b}t = |\mathbf{U}|(f_{2(b)} + f'_{2b}) \cos \theta + \sigma_0(g_{2\sigma t} + g'_{2\sigma_0 t}) + \frac{H}{2}\sigma_1 \frac{\sinh k(b+d)}{\sinh(kd)} \sin(ka - \sigma t)$$

$$+\frac{H\sigma_0}{2k}\sigma_{1b}\frac{\cosh k(b+d)}{\sinh(kd)}t\cos(ka-\sigma t), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho} &= -\sigma_0(\phi_{2\sigma t} + \phi'_{2\sigma_0 t}) \\ &+ \sigma_0|U|(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t})\cos\theta - g(g_2 + g'_2) \\ &+ \sigma_1(|U|f_1\cos\theta - \phi_1)_{\sigma t} + \frac{\sigma_0^2}{2}(f_{1\sigma t}^2 + g_{1\sigma t}^2) \\ &= \sigma_0[|U|(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t})\cos\theta - (\phi_{2\sigma t} + \phi'_{2\sigma_0 t})] \\ &- g(g_2 + g'_2) + \frac{H\sigma_0}{2k}\sigma_1\frac{\cosh k(b+d)}{\sinh(kd)} \\ &\times \cos(ka-\sigma t) + \frac{\sigma_0^2}{16}H^2\left[\frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} \right. \\ &\left. + \frac{\cos 2(ka-\sigma t)}{\sinh^2(kd)}\right], \quad (31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_0(g_{2\sigma t} + g'_{2\sigma_0 t}) + \sigma_1g_{1\sigma t} &= \sigma_0(g_{2\sigma t} + g'_{2\sigma_0 t}) = 0, \\ b &= -d, \quad (32) \end{aligned}$$

$$p_2 = 0, \quad b = 0. \quad (33)$$

求解控制方程式 (26)—(33) 式的第二阶解, 其详细解析过程如下所述.

首先, 对 IFSPGWPU 波流场中的任一流体质点的运动而言, 其由任一时间 t 至时间 $t + T_L$ 的一个运动周期 T_L 的期间, 是在一定的范围内位移一个固定的距离而已, 而不像共振的情形那样会随时间 t 的增长而加大其运动的范围与距离; 因此, (26)—(33) 式中, 含有共振的 $t\cos(ka - \sigma t)$ 与 $t\sin(ka - \sigma t)$ 项须为零, 即 $\sigma_{1b} = 0$ 而得 σ_1 为待解的常数. 因此, 再由 (27) 式对 a 的偏微分加上 (28) 式对纯 b 本身的偏微分, 则可得

$$\begin{aligned} &(27\text{式})_a + (28\text{式})_b \\ &= \sigma_0[(f_{2aa} + f_{2(b)(b)})_{\sigma t} \\ &\quad + (f'_{2aa} + f'_{2bb})_{\sigma_0 t}] \\ &= \frac{1}{2}k^3H^2\sigma_0\left[\frac{\cos 2(ka-\sigma t)}{\sinh^2(kd)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)}\right], \\ &\sigma_{1b} = 0, \quad (34) \end{aligned}$$

(34) 式是 Poisson 方程, 其解为

$$\begin{aligned} f_2 &= -\beta_{222}\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)}\sin 2(ka-\sigma t) \\ &- \beta_{211}\frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)}\sin(ka-\sigma t) \\ &+ \frac{1}{16}kH^2\frac{\sin 2(ka-\sigma t)}{\sinh^2(kd)}, \quad (35a) \end{aligned}$$

$$f'_2 = \frac{1}{8}kH^2\frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)}\sigma_0 t, \quad (35b)$$

(35a) 式中 β_{222} 与 β_{211} 均为待定的常数系数. 同理, 由 (27) 式对纯 b 本身的偏微分减去 (28) 式对 a 的偏微分, 则可得

$$\begin{aligned} &(27\text{式})_b - (28\text{式})_a \\ &= \sigma_0[(g_{2aa} + g_{2(b)(b)})_{\sigma t} \\ &\quad + (g'_{2aa} + g'_{2bb})_{\sigma_0 t}] = 0, \\ &\sigma_{1b} = 0, \quad (36) \end{aligned}$$

(36) 式在满足底床边界条件 (32) 式下, 求得其解为

$$\begin{aligned} g_2 &= \lambda_{222}\frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)}\cos 2(ka-\sigma t) \\ &+ \lambda_{211}\frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)}\cos(ka-\sigma t); \\ g'_2 &= g'_2(b), \quad (37) \end{aligned}$$

(37) 式中 λ_{222} 与 λ_{211} 均为待定的常数系数, 而 $g'_2(b)$ 是待求的 b 的函数; σ_1 及 (35a) 与 (37) 式中的这些待求者将在下面解析求出.

由于波高 H 已于第一阶解就已被完全决定, 故在第二阶解中所得的波峰 ($b = 0, ka - \sigma t = 2n\pi$) 处的水位减去波谷 ($b = 0, ka - \sigma t = (2n + 1)\pi$) 处的水位差需为零, 即由 (37) 式得

$$\begin{aligned} &g_2(b = 0, ka - \sigma t = 2n\pi) \\ &- g_2(b = 0, ka - \sigma t = (2n + 1)\pi) = 0, \\ &n \in I, \quad \text{得 } \lambda_{211} = 0. \quad (38) \end{aligned}$$

将所得的 (35a), (35b), (37) 及 (38) 式再代入质量守恒式 (26) 式中, 于 $\sigma_{1b} = 0$ 下, 则有

$$\begin{aligned} &\beta_{222} = \lambda_{222} = \beta_2, \\ &\lambda_{211} = \beta_{211} = 0, \\ &g'_2 = \frac{1}{16}kH^2\frac{\sinh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)}. \quad (39) \end{aligned}$$

接着, 将 (34)—(39) 式得到的 $\sigma_1, f_2, f'_2, g_2, g'_2$ 的结果, 代入 (29) 与 (30) 式中, 则分别可得

$$\begin{aligned} \phi_{2a} + \phi'_{2a} &= \left\{ 2(k|U|\cos\theta - \sigma_0) \right. \\ &\times \left[-\beta_2\frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16}kH^2(\omega_0^{-2} - 1) \right] \\ &\quad \left. - \frac{1}{8}kH^2\sigma_0(\omega_0^{-2} - 1) \right\} \\ &\times \cos 2(ka - \sigma t) + \frac{H}{2}\sigma_1\omega_0^{-1} \\ &\times \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)}\cos(ka - \sigma t), \\ &\sigma_1 = \text{常数}, \quad (40a) \end{aligned}$$

与

$$\begin{aligned} & \phi_{2(b)} + \phi'_{2b} \\ &= 2(\sigma_0 - k|U| \cos \theta)\beta_2 \\ & \quad \times \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)} \sin 2(ka - \sigma t) \\ & \quad + \frac{1}{4}k^2 H^2(\omega_0^{-2} + 1)|U| \cos \theta \\ & \quad \times \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)} \sigma_0 t \\ & \quad + \frac{H}{2}\sigma_1 \omega_0^{-1} \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \sin(ka - \sigma t), \\ & \sigma_1 = \text{常数}, \end{aligned} \quad (40b)$$

此时由 (40a) 与 (40b) 两式分别对 a 与纯 b 本身的积分, 则可得 ϕ_2 与 ϕ'_2 各为

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \left[\frac{(\sigma_0 - k|U| \cos \theta)}{k} \beta_2 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(k|U| \cos \theta - 2\sigma_0)}{16 \sinh^2(kd)} H^2 \right] \sin 2(ka - \sigma t) \\ & \quad + \frac{H\sigma_1}{2k} \omega_0^{-1} \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \sin(ka - \sigma t), \quad (41a) \\ \phi'_2 &= \frac{1}{8}kH^2|U| \frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} \sigma_0 t \cos \theta \\ & \quad + D_2(\sigma_0 t), \\ & \sigma_1 = \text{常数}, \end{aligned} \quad (41b)$$

(41b) 式中 $D_2(\sigma_0 t)$ 仅为 $\sigma_0 t$ 的函数 (包含任意常数可取为零).

再将以上所得的 f_2, f'_2, g_2, g'_2 及 ϕ_2, ϕ'_2 代入 (31) 式中, 则可得

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho} &= \left[\frac{2\sigma_0^2}{k} \beta_2 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \\ & \quad \left. - g\beta_2 \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{16}\sigma_0^2 H^2(\omega_0^{-2} - 1) \right] \cos 2(ka - \sigma t) \\ & \quad + \frac{H}{k} \sigma_0 \sigma_1 \omega_0^{-1} \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \cos(ka - \sigma t) \\ & \quad + \frac{H^2}{16} \left[\sigma_0^2 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} \right. \\ & \quad \left. - gk \frac{\sinh 2k(b+d)}{\sinh^2(kd)} \right] - \sigma_0 D_{2\sigma_0 t}. \end{aligned} \quad (42)$$

最后, 将 (42) 式代入自由表面边界条件 (33) 式中, 且应用第一阶解中的 (25) 式, 则于第二阶解中

所有尚待解出的常数可被求得为

$$\beta_2 = \frac{3}{32}(\omega_0^{-4} - 1)kH^2, \quad \sigma_1 = 0,$$

$$D_2(\sigma_0 t) = -\frac{1}{16}(\omega_0^{-2} - 1)H^2 \sigma_0^2 t. \quad (43)$$

整理本小节以上所求得解, 则 IFSPGWPU 波流场至第二阶的全解为

$$\begin{aligned} f_2 &= \left[-\frac{3}{32}(\omega_0^{-4} - 1) \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{16}(\omega_0^{-2} - 1) \right] kH^2 \sin 2(ka - \sigma t), \quad (44) \end{aligned}$$

$$f'_2 = \frac{1}{8}(\omega_0^{-2} + 1)kH^2 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \sigma_0 t, \quad (45)$$

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{3}{32}(\omega_0^{-4} - 1)kH^2 \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \\ & \quad \times \cos 2(ka - \sigma t), \quad (46) \end{aligned}$$

$$g'_2 = \frac{1}{16}(\omega_0^{-2} + 1)kH^2 \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= |U|f_2 \cos \theta + \left[\frac{3}{32}(\omega_0^{-4} - 1) \right. \\ & \quad \left. \times \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} - \frac{1}{8}(\omega_0^{-2} - 1) \right] \\ & \quad \times H^2 \sigma_0 \sin 2(ka - \sigma t), \quad (48) \end{aligned}$$

$$\phi'_2 = |U|f'_2 \cos \theta - \frac{1}{16}(\omega_0^{-2} - 1)H^2 \sigma_0^2 t, \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_2}{\rho} &= g \left\{ \frac{3}{32}(\omega_0^{-4} - 1) \left[2\omega_0 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} - \frac{2\omega_0}{(\omega_0^{-2} + 1)} \right] \right. \\ & \quad \left. \times \cos 2(ka - \sigma t) + \frac{1}{16}(\omega_0^{-2} + 1) \right. \\ & \quad \left. \times \left[\omega_0 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} - \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{(\omega_0^{-1} - \omega_0)}{(\omega_0^{-2} + 1)} \right] \right\} kH^2, \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = 0. \quad (50)$$

由 (44)–(50) 式得知, 在均匀流 U 中沿 x 轴方向传递的周期性自由表面重力波, 其流场中的流体质点的运动, 受波浪所引起的 x 轴与水深 y 轴方向的运动轨迹分量及压力, 如同 (21)–(25) 式所示的第一阶解的一样, 在第二阶解, 皆与无流纯波时 (见文献 [20,23]) 完全相同 (其实在更高阶解中亦如此, 详见于下). 在第二阶解中, 除了时空周期项外, 另有沿 x 轴方向随时间 t 做线性增长流体质点的位移量 f'_2 项与在其运动周期平均下的高程 g'_2 项的存在, 且皆随着流体质点所在的原静止深度 b 的愈深而递减, 此现象亦随波浪尖锐度 kH 的增大而愈

显著. 但与无流纯波时显著不同的是, 因为有均匀流 U 与前进波的相互作用效应存在于此波流场中的流速势 ϕ_2 与 ϕ'_2 项里, 使得波流场中的压力 p_2 不受均匀流 U 的影响.

3.3 第三阶 (即 ϵ^3 阶) 解

如同前二阶求解的做法, 由所述的控制式中取出 ϵ^3 项, 并利用前二阶解 (21) 至 (25) 式及 (44) 至 (50) 式, 则第三阶控制式依次为

$$\begin{aligned} & f_{3a} + f'_{3a} + g_{3(b)} + g'_{3b} \\ &= f_{1(b)}g_{2a} + (f_{2(b)} + f'_{2b})g_{1a} \\ & \quad - f_{1a}(g_{2(b)} + g'_{2b}) - f_{2a}g_{1(b)} - \sigma_{2b}tg_{1\sigma t}, \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0[(f_{3a} + g_{3(b)})_{\sigma t} + (f'_{3a} + g'_{3b})_{\sigma_0 t}] \\ &= \sigma_0[f_{1(b)}g_{2a} + f_{2(b)}g_{1a} - f_{1a}(g_{2(b)} + g'_{2b}) \\ & \quad - f_{2a}g_{1(b)}]_{\sigma t} + \sigma_0(f'_{2b\sigma_0 t}g_{1a} + f'_{2b}g_{1a\sigma t}) \\ & \quad - \sigma_{2b}g_{1\sigma t} - \sigma_0\sigma_{2b}tg_{1(\sigma t)^2} \\ & \quad - \sigma_2(f_{1a\sigma t} + g_{1(b)\sigma t}), \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0[(f_{3(b)} - g_{3a})_{\sigma t} + (f'_{3b} - g'_{3a})_{\sigma_0 t}] \\ &= \sigma_0[f_{1a\sigma t}(f_{2(b)} + f'_{2b}) - f_{1a}(f_{2(b)\sigma t} + f'_{2b\sigma_0 t}) \\ & \quad + f_{2a\sigma t}f_{1(b)} - f_{2a}f_{1(b)\sigma t} + g_{1a\sigma t}(g_{2(b)} + g'_{2b}) \\ & \quad - g_{1a}g_{2(b)\sigma t} + g_{2a\sigma t}g_{1(b)} - g_{2a}g_{1(b)\sigma t}] \\ & \quad - \sigma_2(f_{1(b)} - g_{1a})_{\sigma t} - \sigma_{2b}f_{1\sigma t} \\ & \quad - \sigma_0\sigma_{2b}tf_{1(\sigma t)^2}, \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{3a} + \phi'_{3a} \\ &= |\mathbf{U}|(f_{3a} + f'_{3a}) \cos \theta + \sigma_0(f_{3\sigma t} + f'_{3\sigma_0 t}) \\ & \quad + \sigma_2f_{1\sigma t} + \sigma_0[f_{1\sigma t}f_{2a} + (f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t})f_{1a} \\ & \quad + g_{1\sigma t}g_{2a} + g_{2\sigma t}g_{1a}], \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & \phi_{3(b)} + \phi'_{3b} \\ &= |\mathbf{U}|(f_{3(b)} + f'_{3b}) \cos \theta + \sigma_0(g_{3\sigma t} + g'_{3\sigma_0 t}) \\ & \quad + \sigma_2g_{1\sigma t} + (|\mathbf{U}|f_{1\sigma t} \cos \theta - \phi_{1\sigma t})\sigma_{2b}t \\ & \quad + \sigma_0[(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t})f_{1(b)} + (f_{2(b)} + f'_{2b})f_{1\sigma t} \\ & \quad + (g_{2(b)} + g'_{2b})g_{1\sigma t} + g_{1(b)}g_{2\sigma t}], \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} & \frac{p_3}{\rho} \\ &= \sigma_0|\mathbf{U}|(f_{3\sigma t} + f'_{3\sigma_0 t}) \cos \theta - \sigma_0(\phi_{3\sigma t} + \phi'_{3\sigma_0 t}) \\ & \quad - g(g_{3\sigma t} + g'_{3\sigma_0 t}) + (|\mathbf{U}|f_{1\sigma t} \cos \theta - \phi_{1\sigma t})\sigma_2 \\ & \quad + \sigma_0^2[f_{1\sigma t}(f_{2\sigma t} + f'_{2\sigma_0 t}) + g_{1\sigma t}g_{2\sigma t}], \end{aligned} \quad (56)$$

$$g_{3\sigma t} + g'_{3\sigma_0 t} = 0, \quad b = -d, \quad (57)$$

$$p_3 = 0, \quad b = 0. \quad (58)$$

求解 (51)—(58) 式的 IFSPGWPU 波流场的第三阶解的过程, 完全与 3.2 小节所述的求解其第二阶解相同. 首先, 在这些控制式中含有共振的 $t \sin(ka - \sigma t)$ 与 $t \cos(ka - \sigma t)$ 项须为零, 故得

$$\sigma_{2b} = -\frac{1}{4}(\omega_0^{-2} + 1)k^3 H^2 \sigma_0 \frac{\sinh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)},$$

即

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= -\frac{\sigma_0}{8}(\omega_0^{-2} + 1)k^2 H^2 \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh 2(kd)} \\ & \quad + \omega_2 k^2 H^2 \sigma_0, \end{aligned} \quad (59)$$

(59) 式中 ω_2 为待求的常数. 应用 (59) 式至 (52) 与 (53) 式后, 取 (52) 式对 a 的偏微分加上 (53) 式对纯 b 本身的偏微分, 则可得方程式及其解为

$$\begin{aligned} & (52\text{式})_a + (53\text{式})_b \\ &= \sigma_0[(f_{3aa} + f_{3(b)(b)})_{\sigma t} + (f'_{3aa} + f'_{3bb})_{\sigma_0 t}] \\ &= \frac{\sigma_0}{32}k^4 H^3 \left\{ (30\omega_0^{-5} + 76\omega_0^{-3} \right. \\ & \quad - 42\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3(kd)} \cos(ka - \sigma t) \\ & \quad + (30\omega_0^{-5} - 68\omega_0^{-3} + 38\omega_0^{-1}) \\ & \quad \left. \times \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \cos 3(ka - \sigma t) \right\}, \end{aligned} \quad (60)$$

$$\begin{aligned} f_3 &= k^2 H^3 \left\{ \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \\ & \quad \times \left[-\beta_{333} \sin 3(ka - \sigma t) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{128}(15\omega_0^{-5} + 38\omega_0^{-3} - 21\omega_0^{-1}) \right. \\ & \quad \left. \times \sin(ka - \sigma t) \right] + \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \left[\frac{1}{384} \right. \\ & \quad \left. \times (15\omega_0^{-5} - 34\omega_0^{-3} + 19\omega_0^{-1}) \sin 3(ka - \sigma t) \right. \\ & \quad \left. + \beta_{311} \sin(ka - \sigma t) \right] \left. \right\}, \\ f'_3 &= 0, \end{aligned} \quad (61)$$

(61) 式中 β_{333} 与 β_{311} 均为待定的常数系数. 同理, 由 (52) 式对纯 b 本身的偏微分减去 (53) 式对 a 的偏微分, 且应用底床边界条件 (57) 式, 则又得

$$\begin{aligned} & (52\text{式})_b - (53\text{式})_a \\ &= \sigma_0[(g_{3aa} + g_{3(b)(b)})_{\sigma t} + (g'_{3aa} + g'_{3bb})_{\sigma_0 t}] \\ &= \frac{\sigma_0}{16}k^4 H^3 \left[(9\omega_0^{-5} + 22\omega_0^{-3} \right. \\ & \quad - 15\omega_0^{-1}) \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \sin(ka - \sigma t) \\ & \quad \left. + (9\omega_0^{-5} - 18\omega_0^{-3} + 9\omega_0^{-1}) \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sin 3(ka - \sigma t)], \quad (62) \\
 g_3 = & k^2 H^3 \left\{ \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \left[\lambda_{333} \cos 3(ka - \sigma t) \right. \right. \\
 & + \frac{1}{128} (9\omega_0^{-5} + 22\omega_0^{-3} - 15\omega_0^{-1}) \\
 & \times \cos(ka - \sigma t) \left. \right] + \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \\
 & \times \left[-\frac{1}{128} (3\omega_0^{-5} - 6\omega_0^{-3} + 3\omega_0^{-1}) \cos 3(ka - \sigma t) \right. \\
 & \left. \left. - \lambda_{311} \cos(ka - \sigma t) \right] \right\}, \\
 g'_3 = & 0, \quad (63)
 \end{aligned}$$

(63) 式中 λ_{333} 与 λ_{311} 亦为待定的常数系数。

求解以上待定的常数系数, 由 $g_3(b=0, ka - \sigma t = 2n\pi) - g_3(b=0, ka - \sigma t = (2n+1)\pi) = 0$, 以及应用 (59) 式, 将所得的 (61) 与 (63) 式再代回到 (51) 式中, 则有

$$\beta_{333} = \lambda_{333} = \beta_3$$

与

$$\begin{aligned}
 \beta_{311} = & \lambda_{311} \\
 = & \omega_0^{-1} \beta_3 \tanh(3kd) + \frac{1}{16} (3\omega_0^{-5} - \omega_0^{-1}) \\
 = & \lambda_3. \quad (64)
 \end{aligned}$$

接着, 将所得的 (59), (61), (63) 及 (64) 式代入 (54) 与 (55) 式中, 则分别有

$$\begin{aligned}
 & \phi_{3a} + \phi'_{3a} \\
 = & |\mathbf{U}| f_{3a} \cos \theta + \sigma_0 k^2 H^3 \left\{ \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \\
 & \times \left[3\beta_3 \cos 3(ka - \sigma t) + \frac{1}{128} (3\omega_0^{-5} + 6\omega_0^{-3} \right. \\
 & \left. - 9\omega_0^{-1}) \cos(ka - \sigma t) \right] + \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \\
 & \times \left[-\frac{3}{128} (9\omega_0^{-5} - 22\omega_0^{-3} + 13\omega_0^{-1}) \right. \\
 & \times \cos 3(ka - \sigma t) \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\omega_2}{2\omega_0} - \lambda_3 \right) \cos(ka - \sigma t) \right] \right\}, \quad (65a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \phi_{3(b)} + \phi'_{3b} \\
 = & |\mathbf{U}| f_{3(b)} \cos \theta + \sigma_0 k^2 H^3 \\
 & \times \left\{ \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \left[3\beta_3 \sin 3(ka - \sigma t) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{3}{128} (3\omega_0^{-5} + 6\omega_0^{-3} - 9\omega_0^{-1}) \sin(ka - \sigma t) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \left[-\frac{1}{128} (9\omega_0^{-5} \right. \\
 & \left. - 22\omega_0^{-3} + 13\omega_0^{-1}) \sin 3(ka - \sigma t) \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\omega_2}{2\omega_0} - \lambda_3 \right) \cos(ka - \sigma t) \right] \right\}, \quad (65b)
 \end{aligned}$$

此时, 由 (65a) 与 (65b) 两式分别对 a 与纯 b 本身的积分, 则得

$$\begin{aligned}
 \phi_3 = & |\mathbf{U}| f_3 \cos \theta + \sigma_0 k H^3 \left\{ \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \\
 & \times \left[\beta_3 \sin 3(ka - \sigma t) + \frac{1}{128} (3\omega_0^{-5} \right. \\
 & \left. + 6\omega_0^{-3} - 9\omega_0^{-1}) \sin(ka - \sigma t) \right] \\
 & + \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \left[-\frac{1}{128} (9\omega_0^{-5} - 22\omega_0^{-3} \right. \\
 & \left. + 13\omega_0^{-1}) \sin 3(ka - \sigma t) \right. \\
 & \left. \left. + \left(\frac{\omega_2}{2\omega_0} - \lambda_3 \right) \sin(ka - \sigma t) \right] \right\}, \\
 \phi'_3 = & 0, \quad (66)
 \end{aligned}$$

再将 (59), (61), (63), (64) 及 (66) 式代入 (56) 式中, 即可得

$$\begin{aligned}
 \frac{p_3}{\rho} = & \sigma_0^2 k H^3 \left\{ \left[3\beta_3 \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \right. \\
 & - \frac{1}{128} (21\omega_0^{-5} - 50\omega_0^{-3} + 29\omega_0^{-1}) \\
 & \times \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \left. \right] \cos 3(ka - \sigma t) \\
 & + \left[\frac{1}{128} (9\omega_0^{-5} + 18\omega_0^{-3} - 27\omega_0^{-1}) \right. \\
 & \times \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} + \frac{1}{32} (32 \frac{\omega_2}{\omega_0} - 32\lambda_3 \\
 & \left. - \omega_0^{-3} + \omega_0^{-1}) \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \\
 & \times \cos(ka - \sigma t) \left. \right\} - gk^2 H^3 \\
 & \times \left\{ \left[\beta_3 \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} - \frac{1}{128} (3\omega_0^{-5} \right. \right. \\
 & \left. \left. - 6\omega_0^{-3} + 3\omega_0^{-1}) \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \right. \\
 & \times \cos 3(ka - \sigma t) + \left[\frac{1}{128} (9\omega_0^{-5} - 5\omega_0^{-3}) \right. \\
 & \times (1 + 3\omega_0^2) \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \\
 & \left. \left. - \lambda_3 \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \cos(ka - \sigma t) \right\}. \quad (67)
 \end{aligned}$$

然后, 应用自由表面边界条件 (58) 式于 (67) 式

中, 及利用 (25) 与 (64) 两式, 则求得第三阶解中尚未被定出的常数系数 $\beta_3, \lambda_3, \omega_2$ 为

$$\begin{aligned} \beta_3 &= \frac{1}{512}(9\omega_0^{-7} + 5\omega_0^{-5} - 53\omega_0^{-3} + 39\omega_0^{-1}), \\ \lambda_3 &= \frac{1}{512}(27\omega_0^{-7} + 39\omega_0^{-5} + 17\omega_0^{-3} - 19\omega_0^{-1}), \\ \omega_2 &= \frac{1}{64}(9\omega_0^{-4} - 10\omega_0^{-2} + 9). \end{aligned} \quad (68)$$

最后, 整理本小节所求出的 IFSPGWPUC 波流场的第三阶满足的全解为

$$\begin{aligned} f_3 &= k^2 H^3 \left\{ \left[-\frac{1}{512}(9\omega_0^{-7} + 5\omega_0^{-5} - 53\omega_0^{-3} + 39\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{384}(15\omega_0^{-5} - 34\omega_0^{-3} + 19\omega_0^{-1}) \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \sin 3(ka - \sigma t) \right. \\ &\quad \left. + \left[-\frac{1}{128}(15\omega_0^{-5} + 38\omega_0^{-3} - 21\omega_0^{-1}) \times \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} + \frac{1}{512} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (27\omega_0^{-7} + 39\omega_0^{-5} + 17\omega_0^{-3} - 19\omega_0^{-1}) \times \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \sin(ka - \sigma t) \right\}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$f'_3 = 0, \quad (69)$$

$$\begin{aligned} g_3 &= k^2 H^3 \left\{ \left[\frac{1}{512}(9\omega_0^{-7} + 5\omega_0^{-5} - 53\omega_0^{-3} + 39\omega_0^{-1}) \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{128}(3\omega_0^{-5} - 6\omega_0^{-3} + 3\omega_0^{-1}) \times \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \cos 3(ka - \sigma t) \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{1}{128}(9\omega_0^{-5} + 22\omega_0^{-3} - 15\omega_0^{-1}) \times \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} - \frac{1}{512}(27\omega_0^{-7} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 39\omega_0^{-5} + 17\omega_0^{-3} - 19\omega_0^{-1}) \times \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \cos(ka - \sigma t) \right\}, \end{aligned} \quad (70)$$

$$g'_3 = 0, \quad (70)$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= |\mathbf{U}| f_3 \cos \theta + \sigma_0 k H^3 \left\{ \left[\frac{1}{512} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times (9\omega_0^{-7} + 5\omega_0^{-5} - 53\omega_0^{-3} + 39\omega_0^{-1}) \times \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} - \frac{1}{128}(9\omega_0^{-5} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left. \left. - 22\omega_0^{-3} + 13\omega_0^{-1}) \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \right. \\ &\quad \left. \times \sin 3(ka - \sigma t) + \left[\frac{1}{128}(3\omega_0^{-5} + 6\omega_0^{-3} - 9\omega_0^{-1}) \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{512}(27\omega_0^{-7} + 3\omega_0^{-5} + 57\omega_0^{-3} - 55\omega_0^{-1}) \times \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \sin(ka - \sigma t) \right\}, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\phi'_3 = 0, \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \frac{p_3}{\rho} &= g k^2 H^3 \left\{ \frac{1}{512}(9\omega_0^{-7} - 22\omega_0^{-5} + 13\omega_0^{-3}) \right. \\ &\quad \left. \times \left[(3\omega_0 + 9\omega_0^3) \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh 3(kd)} - (1 + 3\omega_0^2) \times \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh 3(kd)} \right] + \frac{1}{128} \left[(3\omega_0^{-5} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 6\omega_0^{-3} + 3\omega_0^{-1}) \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} - (21\omega_0^{-4} - 50\omega_0^{-2} + 29) \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \right\} \\ &\quad \times \cos 3(ka - \sigma t) + g k^2 H^3 \left\{ \frac{1}{128} \right. \\ &\quad \left. \times (1 + 3\omega_0^2) \left[(9\omega_0^{-4} - 9\omega_0^{-2}) \times \frac{\cosh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} - (9\omega_0^{-5} - 5\omega_0^{-3}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\sinh 3k(b+d)}{\cosh(3kd)} \right] + \frac{1}{512} \right. \\ &\quad \left. \times \left[(27\omega_0^{-7} + 39\omega_0^{-5} + 17\omega_0^{-3} - 19\omega_0^{-1}) \times \frac{\sinh k(b+d)}{\cosh(kd)} - (27\omega_0^{-6} - 33\omega_0^{-4} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 113\omega_0^{-2} - 107) \frac{\cosh k(b+d)}{\cosh(kd)} \right] \right\} \\ &\quad \times \cos(ka - \sigma t), \end{aligned} \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \left[-\frac{1}{8}(\omega_0^{-2} + 1) \frac{\cosh 2k(b+d)}{\cosh(2kd)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{64}(9\omega_0^{-4} - 10\omega_0^{-2} + 9) \right] k^2 H^2 \sigma_0 \\ &= \frac{1}{64}(9\omega_0^{-4} - 10\omega_0^{-2} + 9) k^2 H^2 \sigma_0 \\ &\quad - k \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t). \end{aligned} \quad (73)$$

如同第一与第二阶解一样, (69) 至 (73) 式所示的第三阶解, 除流速势 ϕ_3 中含有均匀流 \mathbf{U} 与前进波相互作用的效应, 使得波流场中的压力 p_3 不受

均匀流 U 的影响外, 其流体质点的运动轨迹中, 受波浪效应下沿波浪传递方向 x 轴与水深 y 轴方向的分量, 及其受到的压力, 即 f_3 与 g_3 及 p_3 , 均与无流 (纯) 前进波时完全相同, 都是具时空周期性的; 因此, 流体质点的运动周期 $T_L = 2\pi/\sigma$, 是纯因流场中的周期性的自由表面前进重力波所引起的, 当然其亦与无流纯波时相同. 以上这些特性都随着流体质点所在的原静止深度 b 的愈深而递减, 且亦随波浪尖锐度 kH 的增大而愈显著. 因此可得知, 在此波流场中, 均匀流 U 对流体质点运动的效应, 除了随时间 t 增加或减小其位移距离外, 当均匀流流速方向与波浪传递方向不在同一轴线时, 则会使流体质点的运动轨迹成为具周期性的三维空间的似正或倒扁长辐或短辐的螺旋曲线 (the prolate or curvate helix), 详见下节中所述.

3.4 (纯) 前进波的波速或其分散关系式的求出及封闭解

对在均匀流中传递的自由表面周期性规则前进重力波的波流场, 解析至此唯一尚待定出的是, (纯) 前进波的波速 $c_w = L/T_w$ 或其分散关系式, 这是因为波数 $k = 2\pi/L$ 尚为未知, 对此可被求出如下. 参照文献 [20] 的图 2 或文献 [23] 的 Fig.5 所示的 (纯) 前进波场情况, 则对本文所言的沿正 x 轴方向的前进波与均匀流速 U 成 θ 的角度下, 此波流场中沿水深 y 轴方向的高程 b 所标注的流体质点, 在波峰 (或波谷) 断面处运动至下一个波峰 (或波谷) 断面处, 其运动一个周期 $T_L(b)$ 的运动轨迹投影在 x - y 平面上的分量曲线如图 2 所示. 此时在波流场中的这一流体质点, 其发生的运动位移在 x 与 y 轴方向上的分量, 由上述所得的至第三阶解, 则分别有

$$\begin{aligned} \Delta &= x(a, b, t + T_L(b)) - x(a, b, t) \\ &= \left[|U| \cos \theta + \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \right] T_L(b) \end{aligned} \quad (74a)$$

与

$$y(a, b, t + T_L(b)) - y(a, b, t) = 0, \quad (74b)$$

其中

$$T_L(b) = 2\pi/\sigma(b) = 2\pi/(\sigma_0 + \sigma_2). \quad (74c)$$

而同时, 在这一流体质点运动经过一个运动周期 $T_L(b)$ 时间, 所对应到达其位置断面的下一个连续波峰或 (波谷) 所传递的距离, 投影在 x 轴方向即前进波波向上的分量为

$$\begin{aligned} L + \Delta &= c_w T_w + \left[|U| \cos \theta + \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \right] T_L(b) \\ &= (c_w + |U| \cos \theta) T_L(b). \end{aligned} \quad (75)$$

由 (75) 式, 即可求得 (纯) 前进波的波速 c_w 为

$$c_w = \frac{L}{T_w} = \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) / [1 - \sigma(b)/(2\pi/T_w)]. \quad (76)$$

因此, 由上述所求得的至第三阶解中的 σ_0, f'_2, σ_2 , 即 (25), (45) 与 (73) 式, 代入 (76) 式中, 则可得 (纯) 前进波的周波率 (angular frequency) σ_w 或所谓其分散关系式为^①

$$\begin{aligned} \sigma_w &= 2\pi/T_w = \sigma(b) + k \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \\ &= \left[1 + \frac{1}{64} (9\omega_0^{-4} - 10\omega_0^{-2} \right. \\ &\quad \left. + 9) k^2 H^2 \right] \sigma_0, \end{aligned} \quad (77)$$

(77) 式的 σ_w 恰为文献 [20] 或 [23] 对无流 (纯) 前进波时完全以 Lagrange 方式解析所得的五阶解中至第三阶解^②, 也与 Fenton^[26] 纯以 Euler 方式所得的五阶解中至第三阶解完全相同.

相似地, 对于在原静止等深中, 均匀流中传递的前进重力波流场里, 沿水深 y 轴方向的高程 b 所标注的流体质点, 其具有的质量传输速度 (mass transport velocity) $U_M(b)$ ^③, 与其运动周频率 $\sigma(b) = 2\pi/T_L(b)$ 和 (纯) 前进波的周波率 $\sigma_w = 2\pi/T_w$ 及均匀流速 U 间, 存在有一般性的关系为 (至第三阶解)

$$\begin{aligned} U_M(b) &= U + i \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \\ &= U + \frac{i[\sigma_w - \sigma(b)]}{k}. \end{aligned} \quad (78)$$

最后, 总结本节整个解析可得知, 在原静止水深 d 与均匀流速 U 的水域里, 若传递在其中具有无旋流的自由表面周期性规则的前进重力波, 其波高 H 与周期 $T_w = 2\pi/\sigma_w$ (或波长 $L = 2\pi/k$) 为已知时, 则可由 (77) 式定出其波长 L (或其周期 T_w). 因此, 对 IFSPGWPU 波流场, 在本节完全以 Lagrange 方式解析下, 至第三阶的 Lagrange 流场解, 就可全部被定出; 亦可依相同的解析方式延伸求出更高阶的解, 将于另文论述.

① 见 Chen 等^[23] 中第 22 页第 9 行的 $2\pi/T_L(b)$ 被误打为 $2\pi/T_w(b)$

② 见 Chen 等^[23] 中第 22 页第 15 行的 equation(50) 被误打为 equation(55)

③ 见 Chen 等^[23] 中第 26 页最后一行的 $U_M(b)$ 被误打为 $U_m(b)$

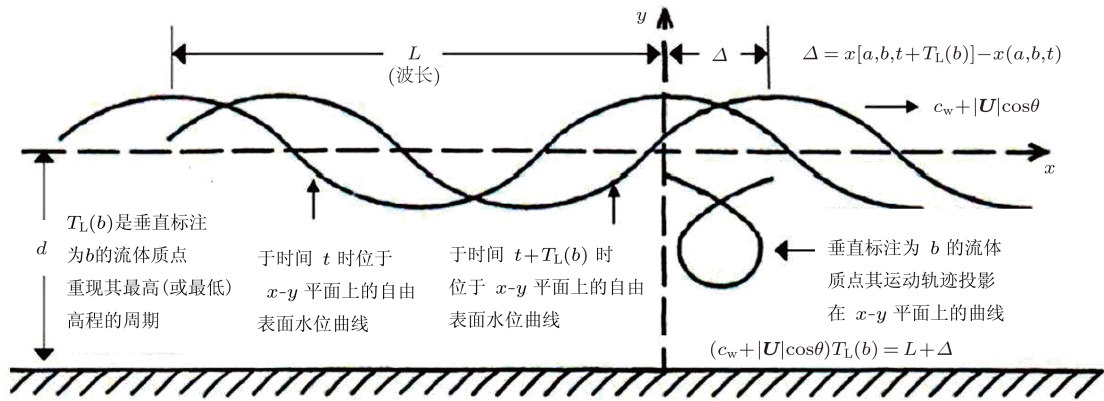


图2 波流场中流体质点的运动轨迹, 投影在前进波的 $x-y$ 平面上的分量曲线与前进波波速的关系示意图 c_w 为前进波的波速, U 为均匀流的流速, θ 为均匀流 U 与前进波波向的夹角

4 验证与波流场特性

4.1 检验

首先, 验证在第二节中根据 (1) 与 (2) 式所给定的标注流体质点参数 (a, b, c) 下, 得到的 IFSPGW-PUC 波流场至第三阶的全 Lagrange 形式解, 是自成一体满足的; 对此需将第三节所得的其解, 再代入 (1) 与 (2) 式中给予确证符合, 结果如下: 1) 由于每阶解都是利用 (1) 式求出的, 当然其至第三阶解是完全满足 (1) 式的; 2) 将其至第三阶解代入 (2) 式中, 并依 (2) 式所示的 b 为常数, $-d \leq b \leq 0$, 则在任意给定时间 t 下有

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{L} \int_x^{x+L} y(a, b, t) dx(a, b, t) \\ &= \frac{1}{L} \int_a^{a+L} \left[b + \sum_{n=1}^3 (g_n + g'_n) \right] \\ &\quad \times \left[1 + \sum_{n=1}^3 \frac{\partial f_n}{\partial a} \right] da \\ &= b + \sum_{n=1}^3 g'_n + \frac{1}{L} \int_a^{a+L} g_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} da, \end{aligned} \quad (79a)$$

此即是由第三节所得的至第三阶解代入 (2) 式中得到的结果, 亦即有

$$g'_1 = g'_3 = 0, g'_2 = -\frac{1}{L} \int_a^{a+L} g_1 \frac{\partial f_1}{\partial a} da. \quad (79b)$$

因此, 证实得到的 IFSPGW-PUC 波流场至第三阶的全 Lagrange 形式解, 是完全满足 (1) 与 (2) 式而自成一体的。

接着, 对 IFSPGW-PUC 流场, 在第三节所求得至第三阶的全 Lagrange 形式流场解, 再举证此解的正确适足性。现引用已得到试验验证的 Chen

等^[23] 的无流 (纯) 前进波时的五阶解结果, 来对它进行检验确证。按照波峰值减波谷值需等于波高, 即 $y(b = 0, ka - \sigma t = 2n\pi) - y(b = 0, ka - \sigma t = (2n + 1)\pi) = H, n \in I$, 则在陈阳益^[20] 或 Chen 等^[23] 的解中所引用的振幅参数 α , 可被转换成至 H^3 阶时为

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\omega_0^{-1}}{2} H - \frac{1}{512} (27\omega_0^{-7} + 3\omega_0^{-5} \\ &\quad + 57\omega_0^{-3} - 55\omega_0^{-1}) k^2 H^3, \end{aligned} \quad (80)$$

将 (80) 式代入陈阳益^[20] 与 Chen 等^[23] 的无流 (纯) 前进波时的五阶解中至第三阶解时, 把 α 转换成以 H 表示的至 H^3 阶次, 则所得的结果与本文的波流解取 $U = 0$ 时的无流 (纯) 前进波情形完全相同。接着, 当 $U \neq 0$ 时, 将 (80) 式中的 $\alpha = \lambda/k$ 代入 Hsu 和 Chen^[15] 的均匀流中前进波的三阶解里, 并取其前进波波向与正 x 轴的夹角 $\theta_1 = 0$, 即取前进波波向为正 x 轴方向下, 则 Hsu 和 Chen^[15] 由 Euler-Lagrange 转换方式所得的结果与本文所得的波流场解亦完全相同。因此, 本文所求得的三阶全 Lagrange 形式的波流场解, 得到应有的正确检验。

4.2 波流场特性

可以明确看出, 由本文所得的 IFSPGW-PUC 波流场的全 Lagrange 形式解, 是可描述出整体流场所有的特性的。如在任一给定的时间 t 下, 取定任一位置 (x, y, z) 处, 则可由本文所得的流场解 x, y, z , 联立来求出此时流至 (x, y, z) 位置处的流体质点 (a, b, c) , 因此, 由 Euler 形式解所展现出为 (x, y, z, t) 函数形式的流场特性, 就可被全部定

出. 故下面将针对 Euler 形式解所无法描述出的流场特性, 特给予论述说明.

1) 自由表面处的压力 $p = 0$ 可在每阶解中被完全地满足.

2) 流体质点的运动周期 (motion period) $T_L(b)$ 或其运动周频率 (motion angular frequency) $\sigma(b) = 2\pi/T_L(b)$, 由 (77) 式, 其至第三阶次量为

$$\begin{aligned} \sigma(b) &= 2\pi/T_L(b) = \sigma_w - k \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \\ &= \sigma_0 + \sigma_2(b) \end{aligned} \quad (81)$$

将 (25), (45) 及 (77) 式代入 (81) 式中可得知, 因波流场中的流体质点会随着场中的前进波起伏运动而前进漂移, 且与自由表面前进波场的特性相同, 随波的前进漂移量在自由表面处最大, 而随着水深向下做指数函数 (exponential function) 式递减, 至底床处为最小. 因此, 造成波流场中的所有流体质点的运动周期 $T_L(b)$ 皆大于前进波的周期 $T_w = 2\pi/\sigma_w$, 且在自由表面 $b = 0$ 处的 $T_L(0)$ 为最长; 而在自由表面下的流体质点的运动周期 $T_L(b)$, 也随着流体质点所在的原静止深度 b 做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最短. 以上所述的特性, 会随着波浪尖锐度 H/L 的增大及相对水深 d/L 的变小而加剧, 如图 3 所示.

3) 流体质点的漂移速度 (drift velocity) 或其质量传输速度 (mass transport velocity) $U_M(b)$, 由 (78) 式其至第三阶次量为

$$\begin{aligned} U_M(b) &= U + i \frac{\partial}{\partial t} f'_2(b, \sigma_0 t) \\ &= U + i[\sigma_w - \sigma(b)]/k \\ &= U + i[1 - T_w/T_L(b)]c_w. \end{aligned} \quad (82)$$

为方便且清楚描述起见, 将 (82) 式中的均匀流流速 U 扣掉, 即以 $U_M(b) - U$ 所剩下的流体质点的漂移速度来说明, 很明显, 此量所具有的特性恰如同流体质点的运动周期 $T_L(b)$ 一样, 其于自由表面 $b = 0$ 处的流体质点为最大, 而在自由表面下的流体质点, 会随着流体质点所在的原静止深度 b 做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最小, 此特性亦会随着波浪尖锐度 H/L 的增大及相对水深 d/L 的变小而加剧, 如图 4 所示. 当 $U = 0$ 时, (82) 式恰为文献 [20] 和 [23] 所得的 (纯) 前进波时, 且其中的 $\partial f'_2/\partial t$ 等于 Longuet-Higgins^[27] 以 Euler-Lagrange 转换方式所求的解.

4) 流体质点对其运动周期平均高程, 即所谓的流体质点的 Lagrangian mean level $\bar{\eta}_L(b)$, 其至第三

阶次量为

$$\begin{aligned} 0 \leq \bar{\eta}_L(b) &= \frac{1}{T_L} \int_0^{T_L} (y - b) dt \\ &= g'_2(b) \neq \frac{1}{T_w} \int_0^{T_w} (y - b) dt, \end{aligned} \quad (83)$$

此恰等于无流 (纯) 前进波的情形, 所关联到的流体质点运动量的导述与物理意义, 已被文献 [23] §4.4 中或由本文 (79a), (79b) 两式明确地予以说明, 即由于流体质点随前进波有前进漂移, 使得其运动一个周期 $T_L(b)$ 期间, 其运动轨迹在原静止水深 $\bar{y} = b$ 的上下位移分量总和大于零之故. 这如同流体质点的运动周期 $T_L(b)$ 一样, (83) 式所示的流体质点的 Lagrange 平均高程, 在自由表面 $b = 0$ 处为最高, 而在自由表面下则是随着流体质点所在的原静止深度 b 做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最小等于零. 当然, 此特性亦随着波浪尖锐度 H/L 的增大及相对水深 d/L 的减小而加剧, 如图 5 所示. (83) 式恰为文献 [20] 与 [23] 所得的 (纯) 前进波情况, 且当在 $d \rightarrow \infty$ 取 $b = 0$ 时, 其正好等于 Longuet-Higgins^[28] 以 Euler-Lagrange 转换方式仅得出深海中在自由表面处的值.

5) 流体质点的运动轨迹, 由第三节所得的 IFSPGWPU C 波流场至第三阶的全 Lagrange 形式解, 为

$$\begin{aligned} x &= a + |U|t \cos \theta + \sum_{n=1}^3 (f_n + f'_n), \\ y &= b + \sum_{n=1}^3 (g_n + g'_n), \\ z &= c + |U|t \sin \theta. \end{aligned} \quad (84)$$

由流体质点的运动轨迹解即可完全描述出流场的所有特性, 是 Lagrange 形式的流场解所具有的独特显著优点. 虽然对于在均匀等深水中, 当无流 $U = 0$ 时的自由表面周期性规则前进重力波流场里, 其流体质点的运动轨迹 (x, y) , 至第三阶解已由文献 [20], 及在试验验证下至第五阶解也由文献 [23] 所描述. 但是对于在等深 d 的均匀流 $U \neq 0$ 中, 其流体质点的运动轨迹不仅变为三维空间的时空摆动曲线, 且其特性除与前进波的波高 H 周期 T_w 及流体质点所在的原静止深度 b 有关外, 亦会受到均匀流的流速大小 $|U|$ 与其流向 θ 的影响而不同. 因此, 对 IFSPGWPU C 波流场中的流体质点的运动轨迹特性, 本小节将以 (84) 式的解, 分别以均匀流 U 沿前进波波向的正 x 轴方向具有的的正的和负的分量, 即分别以 $|U| \cos \theta > 0$

与 $|\mathbf{U}| \cos \theta = 0$ 及 $|\mathbf{U}| \cos \theta < 0$ 等三种情况, 来对其详述. 又因其在 z 轴方向上的分量是仅随时间 t 呈线性的位移, 难以在平面图上清楚明确地展现其特性, 故将其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线图标出, 即可了解其详情. 如以下对在原静止深度 b 的流体质点的运动轨迹的描述, $-d \leq b \leq 0$.

在此情况下, 波流场中流体质点的运动轨迹的摆动幅度, 在自由表面 $b = 0$ 处为最大, 而随

在 $b < 0$ 愈深处做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最小. 其中, 当流体质点恰在波谷断面处时的 x 轴方向的速度分量为负值时, 即

$$x_t = |\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = (2j+1)\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)] < 0, \quad j \in I, -d \leq b \leq 0, \quad (85a)$$

(A) $|\mathbf{U}| \cos \theta > 0$ 的情况

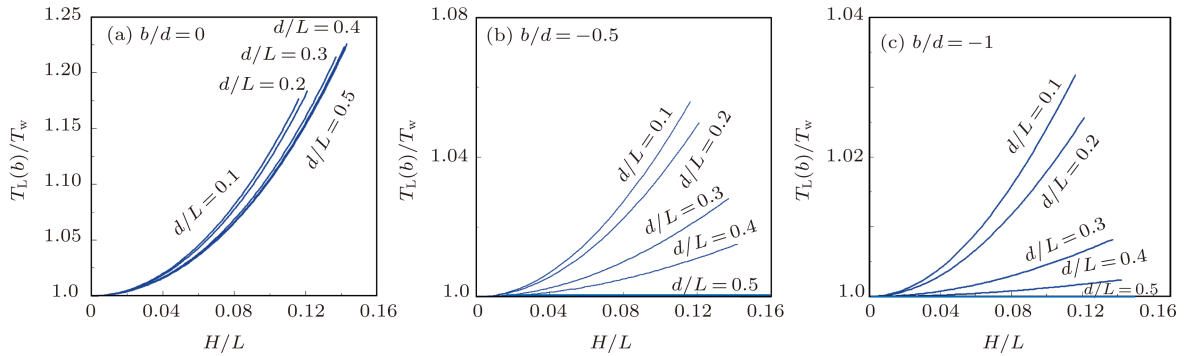


图3 IFSPGWPU C 波流场中, 无因次化的流体质点的运动周期 $T_L(b)/T_w$, 随其所在的深度 b/d 及波浪尖锐度 H/L 与相对水深 d/L 的变化关系

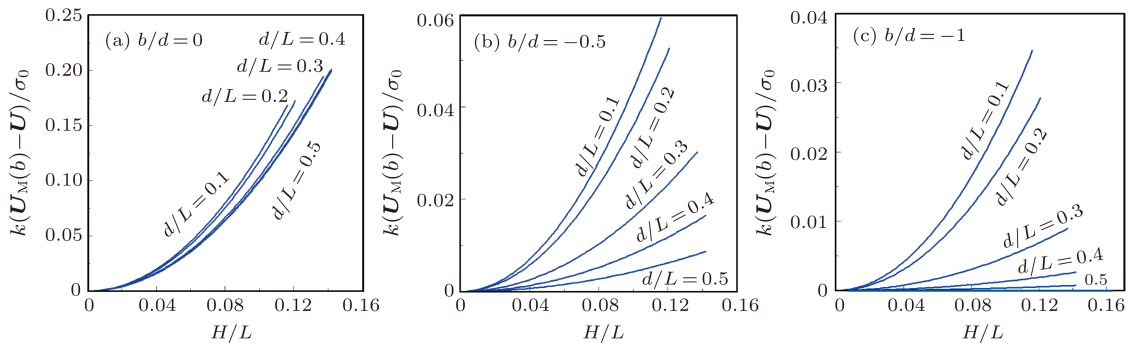


图4 IFSPGWPU C 波流场中, 扣掉均匀流 \mathbf{U} 下的无因次化的流体质点的质量传输速度 $k(\mathbf{U}_M(b) - \mathbf{U})/\sigma_0$, 随其所在的深度 b/d 及波浪尖锐度 H/L 与相对水深 d/L 的变化关系

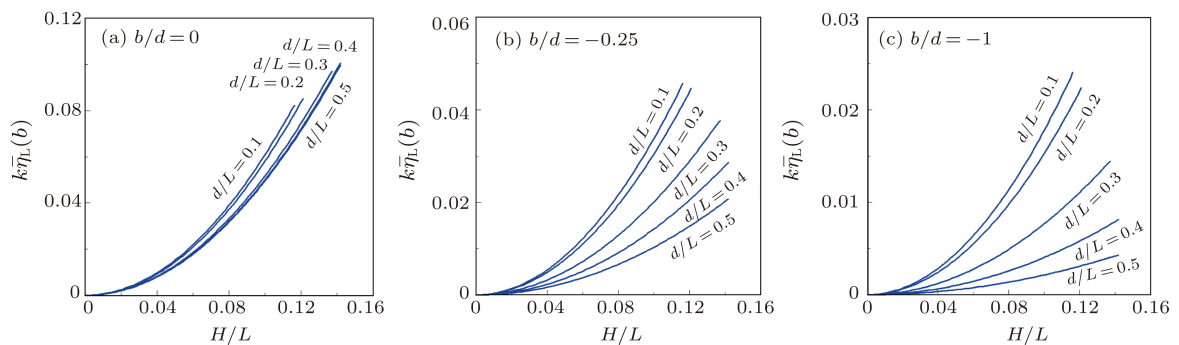


图5 IFSPGWPU C 波流场中, 无因次化的流体质点的 Lagrange 平均高程 $k\bar{\eta}_L(b)$, 随其所在的深度 b/d 及波浪尖锐度 H/L 与相对水深 d/L 的变化关系

则此流体质点在波谷到达时的前后, 仍具有负 x 轴方向的位移分量, 因此, 其运动轨迹为三维空间周期性的扁长辐螺旋状曲线 (like the prolate helix), 其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状如图 6(a) 所示. 而当

$$x_t = |\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = (2j + 1)\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)] = 0, \\ j \in I, -d \leq b \leq 0, \quad (85b)$$

则此流体质点于波谷到达时的瞬间, 并没有 x 轴方向的位移分量的产生, 因此, 其三维空间周期性螺旋曲线的运动轨迹, 投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状, 是恰在波谷断面处为一尖点朝下的滚轮线 (like the cycloid) 如图 6(b) 所示. 再者, 当

$$x_t = |\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = (2j + 1)\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)] > 0, \\ j \in I, -d \leq b \leq 0, \quad (85c)$$

则此流体质点随时都具有正 x 轴方向的位移分量, 因此, 其运动轨迹为三维空间周期性的短辐螺旋状曲线 (like the curtate helix), 其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状如图 6(c) 所示.

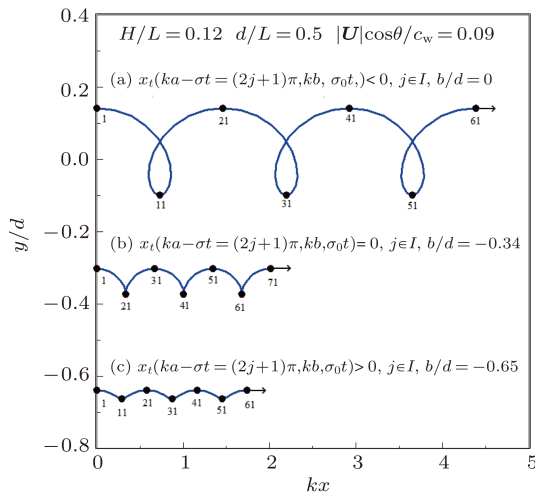


图 6 在均匀流在前进波波向有同向流速分量的波流场中, 流体质点的运动轨迹投影在前进波波向的 $x-y$ 平面上的分量曲线形状的变化 (曲线中的黑点表示质点恰在波峰与波谷断面处)

当然, 在均匀流沿其中的前进波的波向有同向的流速分量时, 即在 $|\mathbf{U}| \cos \theta > 0$ 的情况, 由 (85a), (85c) 两式所示的两种不同的流体质点的运动轨迹形状, 依均匀流与波浪情况的不同, 可能会分别单独出现在各不同情况的波流场中, 亦可能同时出现

在同一波流场中 (此时也包括 (85b) 式). 现以后者为例, 并将它们投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线图标出, 以便清楚比较, 如图 6 所示.

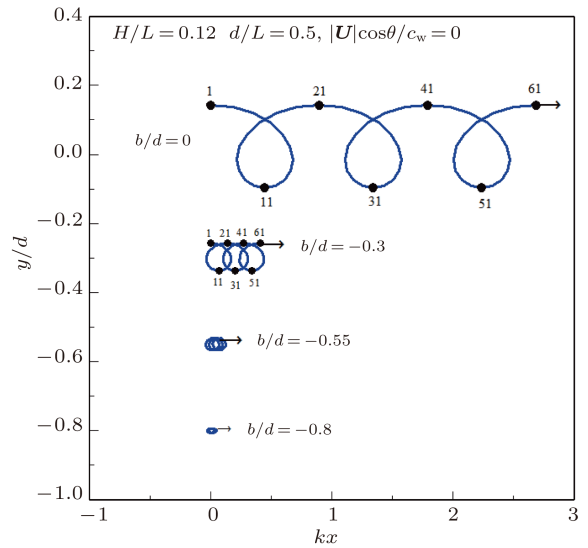


图 7 在均匀流在前进波波向无流速分量的波流场中, 流体质点的运动轨迹投影在前进波波向的 $x-y$ 平面上的分量曲线形状的变化 (曲线中的黑点表示质点恰在波峰与波谷断面处)

(B) $|\mathbf{U}| \cos \theta = 0$ 的情况

在此情况下, 波流场中流体质点的运动轨迹的摆动幅度, 如同 $|\mathbf{U}| \cos \theta > 0$ 的情况, 在自由表面 $b = 0$ 处为最大, 而随在 $b < 0$ 愈深处时做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最小. 其中, 当 $|\mathbf{U}| = 0$ 时, 则退化 (纯) 前进波的情况, 此时流体质点的运动轨迹皆为二维空间周期性的扁长辐状余摆线 (like the prolate trochoid); 而当 $|\mathbf{U}| \neq 0, \cos \theta = 0$ 时, 则流体质点的运动轨迹为三维空间周期性的扁长辐螺旋状曲线, 且其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状正好为 (纯) 前进波情况, 如图 7 所示.

(C) $|\mathbf{U}| \cos \theta < 0$ 的情况

在此情况下的波流场中, 流体质点的运动轨迹在水深 y 轴方向的摆动幅度, 于自由表面 $b = 0$ 处为最大, 而随在 $b < 0$ 愈深处时做指数函数式递减, 至底床 $b = -d$ 处为最小; 至于其在前进波波向传递的 x 轴方向的摆动幅度, 以恰在波峰断面处具 x 轴方向速度分量为零的流体质点, 所在的原静止深度 $b = b_0$ 处作为基准线, 向上即在 $b > b_0$ 处, 则为在正 x 轴方向随 b 值向上做指数函数式递增, 至自由表面 $b = 0$ 处, 而向下即在 $b < b_0$ 处则反之, 是在负 x 轴方向随 b 值向下做指数函数式递增, 至底床 $b = -d$ 处. 因此, 在此情况下的波

流场中流体质点的运动轨迹的特性,与之前所述的在 $|\mathbf{U}| \cos \theta \geq 0$ 两种情况下,会有很大的差异,甚至会出现打圈与倒反的现象.如以下对此情况的波流场中流体质点的运动轨迹的描述.当

$$|\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 f'_{nt}(kb, \sigma_0 t) > 0, \\ -d \leq b \leq 0, \quad (86a)$$

则此时的流体质点的运动轨迹,虽仍是三维空间周期性的扁长辐螺旋状曲线,但是其在前进波波向的正 x 轴方向上的辐长,已被反向流速 $|\mathbf{U}| \cos \theta$ 挤短了,其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状如图 8(a) 所示.而当

$$|\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 f'_{nt}(kb, \sigma_0 t) = 0, \quad -d \leq b \leq 0, \quad (86b)$$

则此时的流体质点因前进波所衍生的向前漂移量,已被反向流速 $|\mathbf{U}| \cos \theta$ 完全抵消掉了,造成其三维空间周期性螺旋曲线的运动轨迹,投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状,为一长轴在 x 轴上的椭圆状的封闭曲线,如图 8(b) 所示.而当

$$\sum_{n=1}^3 f'_{nt}(kb, \sigma_0 t) < -|\mathbf{U}| \cos \theta \\ < \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = 2j\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)], \\ j \in I, \quad -d \leq b \leq 0, \quad (86c)$$

则此时的流体质点恰在波谷断面处时,所具有的负 x 轴方向的流速分量大小,已大于其恰在波峰断面处时所具有的非零的正 x 轴方向的流速分量,故其在波峰到达前后,仍具有较小的正 x 轴方向的位移分量;因此,造成其运动轨迹为三维空间周期性的倒扁长辐螺旋状曲线 (like the turned prolate helix),即 (85a) 式所示的曲线的倒反,其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状如图 8(c) 所示.而当

$$x_t = |\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = 2j\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)] = 0, \\ j \in I, \quad -d \leq b \leq 0, \quad (86d)$$

则此时的流体质点在波峰断面处,并没有 x 轴方向的位移分量的产生,因此,其三维空间周期性螺旋曲线的运动轨迹,投影在 $x-y$ 平面上的分量曲

线形状,其恰在波峰断面处为一尖点朝上的倒滚轮状线 (like the turned cycloid),如图 8(d) 所示,即是 (85b) 式所示的曲线的倒反.而当

$$x_t = |\mathbf{U}| \cos \theta + \sum_{n=1}^3 [f_{nt}(ka - \sigma t = 2j\pi, kb) + f'_{nt}(kb, \sigma_0 t)] < 0, \\ j \in I, \quad -d \leq b \leq 0, \quad (86e)$$

则此时的流体质点随时皆具负 x 轴方向的位移分量,因此,其运动轨迹为三维空间周期性的倒短辐螺旋状曲线,其投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状如图 8(e) 所示,即 (85c) 式所示的曲线的倒反.

如同对 $|\mathbf{U}| \cos \theta > 0$ 情况的描述一样,在均匀流沿其中的前进波的波向有反向流速分量时,即在 $|\mathbf{U}| \cos \theta < 0$ 的情况下,由 (86a)—(86e) 式所示的五种不同的流体质点的运动轨迹形状,不管在什么波流条件下会出现多少个不同形状,现以它们都同时会出现在同一波流场中为例,并将它们投影在 $x-y$ 平面上的分量曲线形状图标出,以便清楚比较,如图 8 所示.

(D) $|\mathbf{U}| \cos \theta = -c_w$ 的情况

此为特殊情况,尤其当 $|\mathbf{U}| = c_w, \theta = \pi$ 时,就是传统对均匀等深水中自由表面周期性规则前进重力波研究时,常引入的稳定性运动 (steady motion).但其原因在于此稳定性运动的流场里,(2) 式所示的波长平均高程 $\bar{y} = b$ 线上下起伏的波形曲线 (wave-form curve), $-d \leq b = \text{常数} \leq 0$,与以此高程所标注的流体质点的运动轨迹形状之间的关系,说明如下.

由本文所得的至第三阶解,在 $|\mathbf{U}| \cos \theta = -c_w$ 时,即可由 (45), (81) 及 (84) 三式的应用,得到此情况的波流场中流体质点的运动轨迹为

$$kx = (ka - \sigma t) + \sum_{n=1}^3 k f_n(ka - \sigma t, kb), \\ ky = kb + \sum_{n=1}^3 k [g'_n(kb) + g_n(ka - \sigma t, kb)], \\ kz = kc + k|\mathbf{U}|t \sin \theta, \quad (87)$$

由 (87) 式在 $b = \text{常数}$ 时, $-d \leq b \leq 0$,给定时间 $t = \text{固定常数}$ 时,连续改变 a 与 c 值,则可得在波长平均高程 $\bar{y} = b$ 在线下起伏的周期性波形曲线;而当 a 与 c 皆取为固定常数时,连续改变时间 t ,则可得与所得的波形曲线相同形式的流体质点 (a, b, c) 的运动轨迹线,其均为三维空间周期性的倒短辐螺旋状曲线,且整个波流场中所有的流体质点皆如此.同时,在 $\theta = \pi$ 时的二维空间的 $x-y$ 平面中,则此

二条曲线变成同一条曲线,如图9所示.因此,此时所言的前进波流场就在加上流速恰等于波速的反向均匀流下,使之成为稳定性运动流场.对此稳定性运动流场,虽由 Euler 方式可方便地呈现出其固定在空间中的流场解;但对于流体质点随着时间沿着波形曲线的运动情形,则需以 Lagrange 形式解来描述.

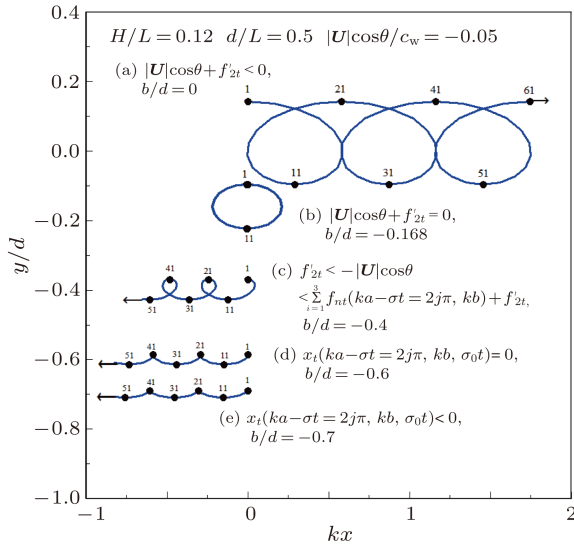


图8 均匀流在前进波波向有反向流速分量的波流场中,流体质点的运动轨迹投影在前进波波向的 $x-y$ 平面上的分量曲线形状的变化(曲线中的黑点表示质点恰在波峰与波谷断面处)

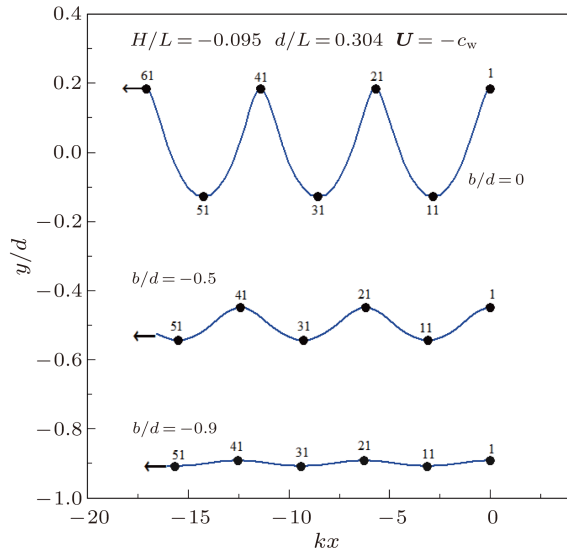


图9 前进波在流速恰等于其波速的反向均匀流中的稳定性波流场里,流体质点沿波形曲线的运动轨迹(曲线中的黑点表示质点恰在波峰与波谷断面处)

6) 烟线 (streakline), 可由固定空间位置 (x, y, z) , 及给定一个时间 t_1 , 在均匀流流速 $|\mathbf{U}|$ 与流向 θ 及水深 d , 波高 H , 周期 T_w (或波长

L) 已知的情况下, 由 (84) 式来反求出当时间 t_1 恰在此 (x, y, z) 位置处的流体质点 (a, b, c) , 再将此 (a, b, c) 代回 (84) 式中算出其在时间 $t > t_1$ 时的位置 (x_1, y_1, z_1) ; 依此类推连续改变给定的时间 t_1 , 就可求得 t 时所有流经此固定位置 (x, y, z) 处的流体质点的位置的连线, 即为其烟线. 对于 IFSPGW-PUC 波流场, 其三维空间的烟线形式, 如同上述所言的其流体质点的运动轨迹曲线形式.

5 结论

综观本文对三维空间等深水中, 无旋性自由表面周期性规则前进重力波传递在均匀流中的波流场的整个解析论述的结果, 得出结论如下.

在满足质量守恒取一波长的流体质点的运动位移的波长平均高程时, 得到流体质点以其在原静止水中时的位置 (a, b, c) 为标注参数下, 完全由 Lagrange 方式的参数控制方程式, 在完全满足自由表面处的压力 $p = 0$ 下, 已解出此波流场至第三阶的全 Lagrange 形式解; 其中存在于流势中的波流交互作用效应亦被得出, 使得波流场中的压力不受均匀流的影响. 同时, 得到无法被 Euler 形式解所直接描述的流体质点的运动特性, 包括大于前进波周期的流体质点的运动周期、与其受前进波所衍生的前进漂移速度、它们间的关系、及流体质点对其运动周期平均的高程与成因等, 这些特性具有从自由表面处起, 随流体质点所在的高程向下做指数函数式递减至底床处; 再者, 随均匀流的流向流速而变的流体质点的三维空间螺旋曲线式的运动轨迹及烟线, 亦一并被呈现出.

当均匀流在前进波波向有同向的流速分量时, 此时波流场中三维空间螺旋曲线式的流体质点的运动轨迹的形状, 是被流体质点恰在波谷断面处时其沿前进波波向的速度分量所主宰, 其投影在前进波起伏的平面中的分量曲线形状是, 当此速度分量大于零时的扁长辐形的余摆线; 等于零时为恰在波谷断面处具尖点朝下的滚轮状线; 而小于零时则变成短辐形的余摆线. 当均匀流流向与前进波传递方向垂直时, 此时波流场中流体质点的运动轨迹, 皆为三维空间扁长辐形的螺旋曲线, 其投影在前进波起伏平面中的分量曲线形状, 完全与(纯)前进波时相同. 以上均是具净向前进波波向的流体质点的运动轨迹线, 其摆动幅度皆从自由表面处起随流体质点所在的深度, 向下做指数函数式递减至底床处.

而当均匀流在前进波波向有反向的流速分量

时, 此时的波流场中, 流体质点的三维空间螺旋曲线式的运动轨迹形状, 受到流体质点的质量传输速度与其在波峰断面处时沿前进波波向的速度分量两者所掌控, 其投影在前进波起伏平面中的分量曲线形状为: 当流体质点的质量传输速度沿前进波波向分别为正向与零时, 则其形状分别为朝波向前进的缩短的扁长辐形余摆线与椭圆形封闭曲线; 当流体质点的质量传输速度沿前进波波向为反向, 而其在波峰断面处时沿前进波波向的速度分量分别为正向、零与反向时, 则其形状分别为反波向前进的倒扁长辐形余摆线, 在波峰断面处成尖点朝上的倒滚轮状线和倒短辐形余摆线. 此时的流体质点的运动轨迹在水深方向的摆动幅度, 亦从自由表面处起

随流体质点所在的深度, 向下做指数函数式递减至底床处; 但是于前进波的波向, 则以恰在波峰到达时的流体质点沿前进波波向的速度分量为零时为界, 沿前进波波向大于零的则向上以指数函数式递增至自由表面处, 小于零的则向下递增至底床处. 至于反向均匀流速恰等于(纯)前进波的波速时, 此时就是所谓的稳定性运动流场, 其成因及此时流体质点沿着固定在空间中的波形曲线上的运动情形, 也一并被详细地说明.

对于此波流场中, 流经任一固定点的烟线形式, 其恰似流体质点的运动轨迹形状, 亦被描述.

上述 IFSPGWPU 的波流场的这些特性, 当均匀流速为零时, 则退化为(纯)前进波流场.

- [1] Longuet-Higgins M S, Stewart R W 1960 *J. Fluid Mech.* **8** 565
- [2] Longuet-Higgins M S, Stewart R W 1961 *J. Fluid Mech.* **10** 529
- [3] Jonsson I G, Skougaard C, Wang J D 1970 *Proc. 12th Coastal Eng. Conf.* (New York: ASCE) **1** 489
- [4] Jonsson I G 1978 *J. Hydraul. Res.* **16** (3) 223
- [5] Jonsson I G, Brink-Kjaer O, Thomas G P 1978 *J. Fluid Mech.* **87** 401
- [6] Peregrine D H 1976 *Adv. Appl. Mech.* **16** 9
- [7] Thomas G P 1981 *J. Fluid Mech.* **110** 457
- [8] Thomas G P 1990 *J. Fluid Mech.* **216** 505
- [9] Chen Y Y, Juang W J 1990 *Proceeding of the 12th Ocean Engineering Conference in Taiwan* (Taiwan: The Taiwan Society of Ocean Engineering) p248 (in Chinese) [陈阳益, 庄文杰 1990 第十二届海洋工程研讨会论文集 (台湾: 台湾海洋工程学会) 第 248 页]
- [10] Baddour R E, Song S W 1990 *Ocean Engng.* **17** 551
- [11] Chang H K, Chen Y Y 1993 *Harbour Technology* **8** 24 (in Chinese) [张宪国, 陈阳益 1993 港湾技术 **8** 24]
- [12] Groeneweg J, Battjes J 2003 *J. Fluid Mech.* **478** 325
- [13] Musumeci R E, Cavallo L, Foti E, Scandura P 2006 *J. Geophys. Res.* **111** c07019
- [14] Olabarrieta M, Medina P, Castanedo S 2010 *Coastal Engineering* **57** 643
- [15] Hsu H C, Chen Y Y, Li M S, Tseng W J 2009 *Acta Oceanol. Sin.* **28** 89
- [16] Chen Y Y, Hsu H C 2005 *Proceeding of the 27th Ocean Engineering Conference in Taiwan.* (The Taiwan Society of Ocean Engineering) p63 (in Chinese) [陈阳益, 许弘菡 2005 第二十七届海洋工程研讨会论文集 (台湾: 台湾海洋工程学会) 第 63 页]
- [17] Chen Y Y, Hsu H C 2009a *Acta Physica Sinica* **58** 40 (in Chinese) [陈阳益, 许弘菡 2009a 物理学报 **58** 40]
- [18] Chen Y Y, Hsu H C 2009b *Acta Physica Sinica* **58** 3657 [陈阳益, 许弘菡 2009b 物理学报 **58** 3637]
- [19] Chen Y Y, Hsu H C 2009 *Ocean Engineering* **36** 747
- [20] Chen Y Y 1994a *Proceeding of the 12th Ocean Engineering Conference in Taiwan* (Taiwan: The Taiwan Society of Ocean Engineering) A1 (in Chinese) [陈阳益 1994a 第十六届海洋工程研讨会论文集 (台湾: 台湾海洋工程学会) A1]
- [21] Chen Y Y 1994b *Proceeding of the 12th Ocean Engineering Conference in Taiwan.* (The Taiwan society of Ocean Engineering.) (in Chinese) A30 [陈阳益 1994b 第十六届海洋工程研讨会论文集 (台湾: 台湾海洋工程学会) A30]
- [22] Chen Y Y, Hsu H C 2009d *China Physics B* **18** 1
- [23] Chen Y Y, Hsu H C, Chen G Y 2010 *Fluid Dyn. Res.* **42** 1
- [24] Lamb H 1932 *Hydrodynamics* (6th Ed.) (London: Cambridge University Press)
- [25] Pierson W J 1962 *J. Geophys. Res.* **67** 3151
- [26] Fenton J D 1985 *J. Waterways Port Coastal Ocean Eng.* **3** 216
- [27] Longuet-Higgins M S 1987 *J. Fluid Mech.* **179** 547
- [28] Longuet-Higgins M S 1986 *J. Fluid Mech.* **173** 683

The irrotational progressive gravity waves propagating on uniform currents in Lagrangian analysis and experiments Part 1. Theoretical analysis

Chen Yang-Yih^{1)2)†} Hsu Hung-Chu³⁾ Chang Hsien-Kuo⁴⁾

1) (*Department of Marine Environment and Engineering, National Sun Yat-Sen University, Kaohsiung 804, Taiwan, China*)

2) (*Department of Hydraulic and Ocean Engineering, National Cheng Kung University, Tainan 701, Taiwan, China*)

3) (*Research Center of Ocean Environment and Technology, National Cheng Kung University, Tainan 701, Taiwan, China*)

4) (*Department of Civil Engineering, National Chiao Tung University, Hsinchu 300, Taiwan, China*)

(Received 31 December 2010; revised manuscript received 16 May 2011)

Abstract

A third-order Lagrangian solutions is found directly by the full Lagrangian parametric governing equations, with the parameters of identifying each water particle which is obtained in mass conservation from taking the wavelength-averaged level of the vertical displacement of water particles along the direction of the wave propagation and is just the position of particle in the original still water, for the irrotational free surface progressive gravity waves propagating on uniform current in the three dimension. It is found that the effect of wave-current interaction is occurred in Lagrangian velocity potential, so that the pressure is not affected by the uniform current in the wave-current field. The drift velocity, Lagrangian mean level of particle and its motion period longer than the wave period which are exponentially decreasing with the depth of particle's level and the pathlines of particle and the streakline are then all presented, these are to be excluded in Eulerian solution. Furthermore, the forms of the helical pathlines of particles varying with the direction and speed of the uniform current are appeared to be turned from the wave velocity and current velocity component in co-direction to in anti-direction, even become into a closed orbit. The special case when the wave-current field is at the steady motion is also interpreted its consequential characteristics. The present solution can be reduced to that of the pure progressive waves as no current exists.

Keywords: particle trajectory, drift velocity, particle's motion period, Lagrangian mean level

PACS: 47.35.Bb, 47.27.Wg, 47.50.Ef

† E-mail: yichen@mail.nsysu.edu.tw