

# 互易定理计算分层半空间上方任意取向偶极子的远区场\*

葛德彪 魏兵<sup>†</sup>

(西安电子科技大学物理系, 西安 710071)

(2011年4月28日收到; 2011年5月20日收到修改稿)

利用互易定理推导了考虑直达波和界面反射波时半空间分层界面上任意取向偶极子在上半空间远区辐射场的解析表达式. 进一步考虑电偶极子距离分界面为某一高度情形, 在考虑直达波和反射波程差基础上导出相应辐射场公式. 辐射场解析表达式中分层半空间 TM 和 TE 波反射系数可以通过连分数方法或传播矩阵法计算获得. 本文推导过程物理概念清晰, 所得解析结果适于计算观察点远离界面情形下偶极子的远区辐射场. 数值计算结果表明, 利用本文结果可以快速分析半空间上方任意取向偶极子的远区辐射场.

**关键词:** 偶极子, 半空间分层介质, 互易定理, 辐射远场

**PACS:** 03.50.-z, 03.50.De, 41.20.-q

## 1 引言

分层半空间上方偶极子的辐射问题是电磁学的基本问题之一<sup>[1-14]</sup>. 随着计算电磁学的发展, 快速地计算出分层半空间上方偶极子的辐射对半空间上方目标散射和辐射问题的分析具有基础性意义. 早在 20 世纪初, Sommerfeld 就对该问题进行了深入研究, 并给出了半空间分层界面附近垂直和水平电偶极子辐射的解析表达式. Sommerfeld 的研究表明, 界面附近电偶极子在上半空间任意点的场由四个部分叠加合成: 1) 直达波; 2) 界面反射波; 3) 侧面波; 4) 吸附表面波. Wait<sup>[3]</sup> 在 20 世纪 80 年代和 Li 等<sup>[4]</sup> 在 21 世纪初的进一步研究表明, 偶极子在上半空间产生的远区场, 当观察点远离分界面时, 直达波和反射波是主要部分. 近年来, 包含半空间复杂目标的电磁散射问题引起人们的关注<sup>[9-14]</sup>.

半空间上方一定空间内电、磁流的辐射问题可以等效成电、磁偶极子的辐射问题. 这样对电、磁流远场辐射特性的研究就可以转化为电、磁偶极子辐射特性的研究. Sommerfeld, Wait 和 Li 等的研究结果适用于近场和远场的情形, 但有关分层半

空间偶极子辐射问题的解析表达式相当复杂, 不利于理解, 在实际应用中也会带来很多不便. 在关心分层半空间上方电偶极子远场, 并且观察点远离半空间界面时 (例如天基雷达对地观测) 可仅考虑直达波和反射波的贡献.

本文首先讨论分层半空间界面上的任意取向电偶极子, 利用互易定理推导了仅考虑直达波和界面反射波时远区辐射场的解析表达式; 进一步考虑电偶极子距离分界面为某一高度情形, 在考虑直达波和反射波程差基础上导出相应辐射场公式; 最后算例给出了地面分层半空间介质下不同高度的倾斜电偶极子辐射特性.

## 2 用互易定理计算半空间上方任意取向电偶极子的远区辐射场

### 2.1 互易定理

设问题  $a$  和  $b$  有相同的介质环境, 但空间源的分布不同, 如图 1. 由互易定理可知

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle, \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61001065) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: bwei@xidian.edu.cn

其中  $\langle a, b \rangle$  为源  $a$  对源  $b$  的反应, 即

$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_a} (\mathbf{J}_a \cdot \mathbf{E}_b - \mathbf{M}_a \cdot \mathbf{H}_b) dV, \quad (2)$$

$\langle a, b \rangle$  则为源  $b$  对于源  $a$  的反应. 若辐射源  $a$  为电偶极子  $\mathbf{Il}$ , 上式简化为  $\langle a, b \rangle = \mathbf{Il} \cdot \mathbf{E}_b$ , 其中  $\mathbf{E}_b$  为电偶极子  $\mathbf{Il}$  所在位置源  $b$  的场. 设源  $b$  为放置在远区的另一个电偶极子, 结合远区辐射场具有平面波特性的, 就可以导出半空间上方任意取向电偶极子的远区辐射场.

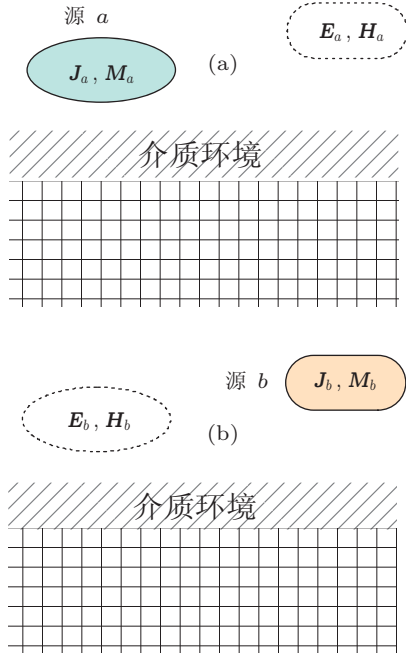


图 1 相同介质环境下的两个电磁问题 (a) 源  $a$  产生的场; (b) 源  $b$  产生的场

## 2.2 半空间介质界面上方任意取向电偶极子的远区场

首先, 设电偶极子位于半空间介质分界面上原点  $O$  处, 沿  $\hat{\mathbf{r}}_0$  方向, 即  $\mathbf{Il} = \hat{\mathbf{r}}_0 \mathbf{Il}$ . 它在球坐标系中的取向为  $\theta_0, \varphi_0$ , 如图 2(a). 欲求远区  $\theta, \varphi$  方向的辐射场, 如图 2(b). 为了求得图 2(b) 中  $P$  点的  $E_\varphi, E_\theta$ , 在该点分别放置电偶极子  $\hat{\varphi} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$  和  $\hat{\theta} I_{\theta b} l_{\theta b}$ . 半空间分界面法向为  $z$  轴, 所以  $\varphi = \text{常数}$  的面为电偶极子  $\hat{\varphi} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$  或  $\hat{\theta} I_{\theta b} l_{\theta b}$  的入射面.

电偶极子  $\hat{\varphi} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$  在  $O$  点的场是直达波和地面反射波之和. 已知电偶极子  $\mathbf{Il}$  在自由空间的远区辐射场为

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{Il}\hat{\mathbf{r}} \times (\hat{\mathbf{l}} \times \hat{\mathbf{r}}) \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad (3)$$

特别地, 在  $\mathbf{r} \perp \mathbf{Il}$  方向上式变为

$$\mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{Il} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \quad (4)$$

即垂直方向的辐射场平行于电偶极子  $\mathbf{Il}$ . 所以电偶极子  $\hat{\varphi} I_{\varphi b} l_{\varphi b}$  在  $O$  点的直达波为

$$\mathbf{E}_{\varphi b1}(O) = +\hat{\varphi} i\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \quad (5)$$

需要注意上述电场垂直于入射面, 反射系数定义为  $R^{\text{TE}} = E^r/E^i$ , 此时经过分界面反射的场为

$$\mathbf{E}_{\varphi b2}(O) = R^{\text{TE}} \mathbf{E}_{\varphi b1}(O); \quad (6)$$

直达波和反射波的合成场为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi b}(O) &= \mathbf{E}_{\varphi b1}(O) + \mathbf{E}_{\varphi b2}(O) \\ &= (1 + R^{\text{TE}}) \mathbf{E}_{\varphi b1}(O) \\ &= \hat{\varphi} (1 + R^{\text{TE}}) i\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (7)$$

由互易定理可知

$$\begin{aligned} \mathbf{Il} \cdot \mathbf{E}_{\varphi b}(O) &= I_{\varphi b} l_{\varphi b} \cdot \mathbf{E}_{\varphi}(P), \\ \hat{\mathbf{r}}_0 \mathbf{Il} \cdot \mathbf{E}_{\varphi b}(O) &= \hat{\varphi} I_{\varphi b} l_{\varphi b} \cdot \hat{\varphi} \mathbf{E}_{\varphi}(P) \\ &= I_{\varphi b} l_{\varphi b} E_{\varphi}(P). \end{aligned} \quad (8)$$

将 (7) 式代入 (8) 式得

$$\begin{aligned} I_{\varphi b} l_{\varphi b} E_{\varphi}(P) &= \hat{\mathbf{r}}_0 \mathbf{Il} \cdot \mathbf{E}_{\varphi b}(O) \\ &= \mathbf{Il} \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\varphi} (1 + R^{\text{TE}}) i\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \\ E_{\varphi}(P) &= \mathbf{Il} \hat{\mathbf{r}}_0 \cdot \hat{\varphi} (1 + R^{\text{TE}}) i\omega\mu \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}. \end{aligned} \quad (9)$$

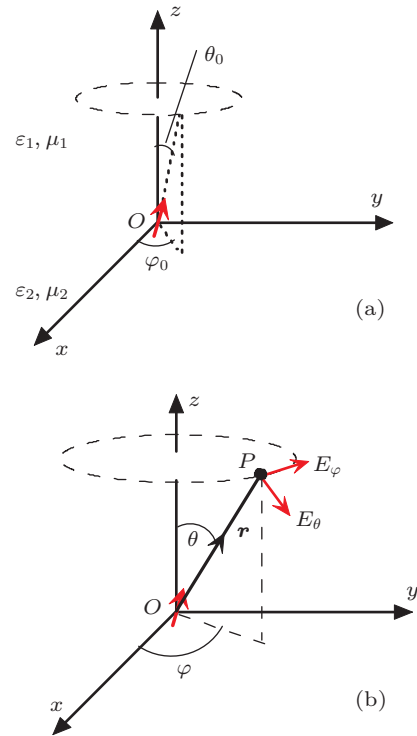


图 2 半空间介质分界面处的任意取向电偶极子 (a) 电偶极子取向  $(\theta, \varphi_0)$ ; (b) 观察点方位  $(\theta, \varphi)$

(9) 式中的标量积可以写为

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}} &= (\hat{\boldsymbol{x}} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \hat{\boldsymbol{z}} \cos \theta_0) \\ &\quad \times (-\hat{\boldsymbol{x}} \sin \varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \varphi) \\ &= \sin \theta_0 \sin (\varphi_0 - \varphi),\end{aligned}\quad (10)$$

所以,

$$\begin{aligned}E_\varphi(P) &= -Il\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}(1 + R^{\text{TE}})i\omega\mu\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ &= \sin \theta_0 \sin (\varphi_0 - \varphi)(1 + R^{\text{TE}}) \\ &\quad \times i\omega\mu Il\frac{\exp(ikr)}{4\pi r},\end{aligned}\quad (11)$$

(11) 式是位于界面上坐标原点任意取向偶极子远场  $\varphi$  方向场量的表达式. 注意:  $E_\varphi(P)$  和  $\theta$  关系包含在反射系数中.

同样, 电偶极子  $\hat{\boldsymbol{\theta}}I_{\theta b}l_{\theta b}$  在  $O$  点的直达波为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\theta b1}(O) &= +\hat{\boldsymbol{\theta}}i\omega\mu I_{\theta b}l_{\theta b}\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ &= (\hat{\boldsymbol{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \theta \sin \varphi - \hat{\boldsymbol{z}} \sin \theta) \\ &\quad \times i\omega\mu I_{\theta b}l_{\theta b}\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}.\end{aligned}\quad (12)$$

注意上述电场平行于入射面, 反射系数定义为  $R^{\text{TM}} = H^r/H^i$ ,  $H^r, H^i$  同相时, 电场垂直分量  $E_z^r, E_z^i$  也同相; 但是电场平行于界面的分量  $E_{x,y}^r, E_{x,y}^i$  却彼此反相. 所以经过分界面反射的电场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\theta b2}(O) &= R^{\text{TM}}(-\hat{\boldsymbol{x}} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\boldsymbol{y}} \cos \theta \sin \varphi \\ &\quad - \hat{\boldsymbol{z}} \sin \theta)i\omega\mu I_{\theta b}l_{\theta b}\frac{\exp(ikr)}{4\pi r};\end{aligned}\quad (13)$$

直达波和反射波的合成场为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_{\theta b}(O) &= \boldsymbol{E}_{\theta b1}(O) + \boldsymbol{E}_{\theta b2}(O) \\ &= [(1 - R^{\text{TM}})(\hat{\boldsymbol{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \theta \sin \varphi) \\ &\quad - (1 + R^{\text{TM}})\hat{\boldsymbol{z}} \sin \theta] \\ &\quad \times i\omega\mu I_{\theta b}l_{\theta b}\frac{\exp(ikr)}{4\pi r}.\end{aligned}\quad (14)$$

同样由互易定理可得

$$\begin{aligned}Il \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(O) &= I_{\theta b}l_{\theta b} \cdot \boldsymbol{E}_\theta(P) \\ \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(O) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}I_{\theta b}l_{\theta b} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}E_\theta(P) \\ &= I_{\theta b}l_{\theta b}E_\theta(P).\end{aligned}\quad (15)$$

将 (14) 式代入 (15) 式得到

$$\begin{aligned}I_{\theta b}l_{\theta b}E_\theta(P) &= \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(O), \\ E_\theta(P) &= Il\hat{\boldsymbol{r}}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(O)/(I_{\theta b}l_{\theta b}) \\ &= Il(\hat{\boldsymbol{x}} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \hat{\boldsymbol{y}} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \hat{\boldsymbol{z}} \cos \theta_0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\times \left[ (1 - R^{\text{TM}})(\hat{\boldsymbol{x}} \cos \theta \cos \varphi + \hat{\boldsymbol{y}} \cos \theta \sin \varphi) \right. \\ &\quad \left. - \hat{\boldsymbol{z}}(1 + R^{\text{TM}}) \sin \theta \right] i\omega\mu\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ &= \left[ (1 - R^{\text{TM}}) \sin \theta_0 \cos \theta \cos (\varphi_0 - \varphi) \right. \\ &\quad \left. - (1 + R^{\text{TM}}) \cos \theta_0 \sin \theta \right] i\omega\mu Il\frac{\exp(ikr)}{4\pi r},\end{aligned}\quad (16)$$

(16) 式是位于界面上坐标原点任意取向偶极子远场  $\theta$  方向场量的表达式. 由 (11) 和 (16) 式, 作为特例可以得到和地面垂直  $\theta_0 = 0$  及水平  $\theta_0 = \pi/2$  电偶极子的远区辐射场.

### 2.3 半空间介质界面上方高度 $h$ 处任意取向电偶极子的远区场

当电偶极子位于距离地面高度为  $h$  的任一点时, 在用互易定理分析其辐射场时需要注意两点: 其一, 由于电偶极子位于图 3 中  $A$  点, 而不是  $O$  点, 互易定理 (8) 和 (15) 式改写为

$$\begin{aligned}Il \cdot \boldsymbol{E}_{\varphi b}(A) &= I_{\varphi b}l_{\varphi b} \cdot \boldsymbol{E}_\varphi(P), \\ \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\varphi b}(A) &= \hat{\boldsymbol{\varphi}}I_{\varphi b}l_{\varphi b} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}\boldsymbol{E}_\varphi(P) \\ &= I_{\varphi b}l_{\varphi b}E_\varphi(P), \\ Il \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(A) &= I_{\theta b}l_{\theta b} \cdot \boldsymbol{E}_\theta(P), \\ \hat{\boldsymbol{r}}_0 Il \cdot \boldsymbol{E}_{\theta b}(A) &= \hat{\boldsymbol{\theta}}I_{\theta b}l_{\theta b} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}E_\theta(P) \\ &= I_{\theta b}l_{\theta b}E_\theta(P),\end{aligned}\quad (17)$$

其次, 在将  $P$  点电偶极子  $I_b l_b = \hat{\boldsymbol{\theta}}I_b l_b$  辐射到达  $A$  点的直达波和地面反射波相加时, 需要考虑二者之间的程差  $\Delta = AB - AD$ , 如图 3. 分两种情形, 如果  $\theta > 45^\circ$ , 如图 3(a), 其中角度  $\psi = 90^\circ - \theta$ ,  $\xi = 90^\circ - 2\psi$ , 所以

$$AB = \frac{h}{\sin \psi} = \frac{h}{\cos \theta},\quad (18)$$

$$\begin{aligned}AD &= AB \sin \xi = \frac{h}{\cos \theta} \sin (90^\circ - 2\psi) \\ &= \frac{h \cos 2\psi}{\cos \theta} = \frac{-h \cos 2\theta}{\cos \theta},\end{aligned}\quad (19)$$

$$\begin{aligned}\Delta &= AB - AD = \frac{h}{\cos \theta} - \frac{-h \cos 2\theta}{\cos \theta} \\ &= \frac{h(1 + \cos 2\theta)}{\cos \theta}.\end{aligned}\quad (20)$$

当  $45^\circ < \theta < 90^\circ$  时  $\cos 2\theta < 0$ , 但 (20) 式中  $\Delta > 0$ .

如果  $\theta < 45^\circ$ ,  $\cos 2\theta > 0$ , 如图 3(b), 注意图 3(b) 中角度  $\psi = 90^\circ - \theta$ ,  $\xi = 90^\circ - 2\theta$ , 有

$$AB = \frac{h}{\sin \psi} = \frac{h}{\cos \theta},\quad (21)$$

$$BD = AB \sin \xi = \frac{h}{\cos \theta} \sin (90^\circ - 2\theta)$$

$$= \frac{h \cos 2\theta}{\cos \theta}, \quad (22)$$

$$\Delta = AB + BD = \frac{h}{\cos \theta} + \frac{h \cos 2\theta}{\cos \theta} = \frac{h(1 + \cos 2\theta)}{\cos \theta}, \quad (23)$$

(21), (22), (23) 式和 (18), (19), (20) 式一致.

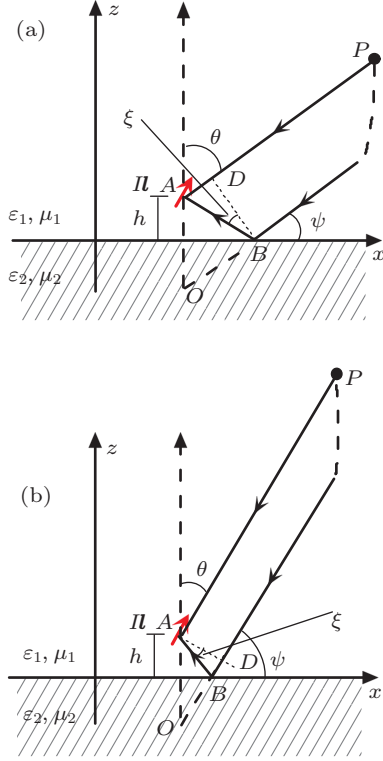


图3 距离分界面为 $h$ 的电偶极子 (a)  $\theta > 45^\circ$ ; (b)  $\theta < 45^\circ$

由于上述程差, 地面反射波比直达波具有时间延迟, 相位差为  $\exp(i2\pi\Delta/\lambda) = \exp(ik\Delta)$ , 将 (23) 式代入得时间延迟的相位差为

$$\exp(ik\Delta) = \exp\left[ik\left(\frac{h}{\cos \theta} + \frac{h \cos 2\theta}{\cos \theta}\right)\right]. \quad (24)$$

在求  $A$  点合成场时, 应当是  $A$  点的直达波和地面反射波之和. 对于电场  $\varphi$  分量, (7) 式应修改为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\varphi b}(A) &= \mathbf{E}_{\varphi b1}(A) + \mathbf{E}_{\varphi b2}(A) \\ &= [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TE}}] \mathbf{E}_{\varphi b1}(A) \\ &= \hat{\varphi} [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TE}}] \\ &\quad \times i\omega\mu I_{\varphi b} l_{\varphi b} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (25)$$

注意 (25) 式中  $r$  是从电偶极子所在位置到观察点的位置矢量. 如果记从坐标原点  $O$  到观察点的位置矢量为  $r_0$ , 则  $r = r_0 - r'$  (如图 4 所示), 按照远区场近似,

$$r = |r_0 - r'| = \sqrt{(r_0 - r')^2}$$

$$\simeq r_0 - r' \cdot \hat{r}_0 = r_0 - h \cos \theta' \quad (26)$$

其中  $r'$ ,  $h$  和  $\theta'$  分别为偶极子位置矢量、电偶极子距地面高度和  $r'$  与  $r_0$  的夹角. 于是 (25) 式中相对于坐标原点  $O$  的球面波因子改写为

$$\frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \approx \frac{\exp[ik(r_0 - h \cos \theta')]}{4\pi r_0}. \quad (27)$$

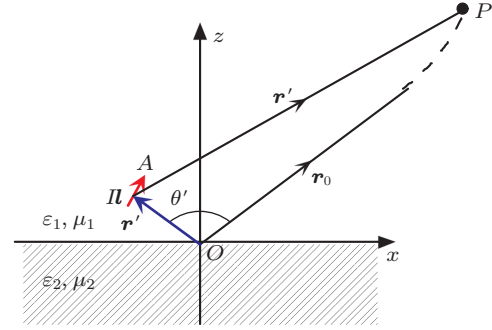


图4 位置矢量以坐标原点  $O$  为参考点

计算远区场  $\phi$  分量  $E_\phi(P)$ .  $A$  点合成场 (25) 式代入互易定理 (17) 式可得远区场, 将 (11) 式修改为

$$\begin{aligned} E_\varphi(P) &= Il \hat{r}_0 \cdot \mathbf{E}_{\varphi b}(A) / (I_{\varphi b} l_{\varphi b}) \\ &= -Il \hat{r}_0 \cdot \hat{\varphi} [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TE}}] \\ &\quad \times i\omega\mu \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ &= \sin \theta_0 \sin(\varphi_0 - \varphi) [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TE}}] \\ &\quad \times i\omega\mu Il \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (28)$$

其中时间延迟的相位差如 (24) 式, 相对于坐标原点  $O$  的球面波因子如 (27) 式.

计算远区场  $\theta$  分量  $E_\theta(P)$ .  $A$  点合成场应当是  $A$  点的直达波和地面反射波之和, (14) 式应修改为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\theta b}(A) &= \mathbf{E}_{\theta b1}(A) + \mathbf{E}_{\theta b2}(A) \\ &= \{[1 - \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \\ &\quad \times (\hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi) \\ &\quad - [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \hat{z} \sin \theta\} \\ &\quad \times i\omega\mu I_{\theta b} l_{\theta b} \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (29)$$

代入互易定理 (17) 式可得远区场, 将 (16) 式第二式修改为

$$\begin{aligned} E_\theta(P) &= Il \hat{r}_0 \cdot \mathbf{E}_{\theta b}(A) / (I_{\theta b} l_{\theta b}) \\ &= (\hat{x} \sin \theta_0 \cos \varphi_0 + \hat{y} \sin \theta_0 \sin \varphi_0 + \hat{z} \cos \theta_0) \\ &\quad \times \{ [1 - \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (\hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi) \\ & - \hat{z} [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \sin \theta \} \\ & \times i\omega\mu Il \frac{\exp(ikr)}{4\pi r} \\ = & \left\{ [1 - \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \sin \theta_0 \cos \theta \right. \\ & \times \cos(\varphi_0 - \varphi) \\ & \left. - [1 + \exp(ik\Delta) R^{\text{TM}}] \cos \theta_0 \sin \theta \right\} \\ & \times i\omega\mu Il \frac{\exp(ikr)}{4\pi r}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中时间延迟的相位差如 (24) 式, 相对于坐标原点  $O$  的球面波因子如 (27) 式.

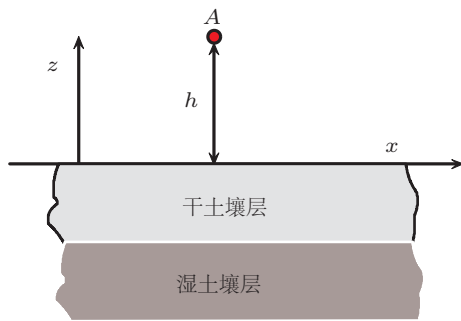


图5 分层半空间上方的偶极子

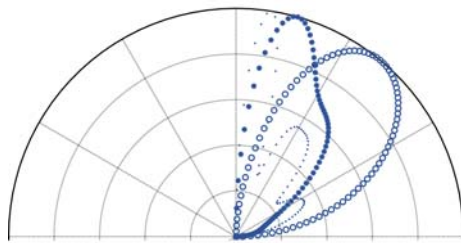


图6 半空间上方垂直偶极子的辐射方向图随偶极子高度的变化情况

### 3 数值结果

半空间分层介质上方偶极子的辐射方向如图 5 所示, 下半空间由干土壤层 ( $\epsilon_r = 4.0$ ,  $\sigma = 10^{-5}(S/m)$ , 厚度 1 m) 和湿土壤层  $\epsilon_r = 10.0$ ,  $\sigma = 10^{-3}(S/m)$  组成, 上半空间为真空. 偶极子位于半空间界面上方高度为  $h$  处, 电磁波频率为 6 MHz. 电偶极子  $Il = 0.002 \text{ A}\cdot\text{m}$ , 计算得到地面上方  $0 < \theta < 90^\circ$ ,  $0 < \varphi < 360^\circ$  的辐射场  $\sqrt{|E_\varphi|^2 + |E_\theta|^2}$  方向图 (用最大值归一). 图 6 是垂直偶极子 (偶极子取向垂直于半空间界面) 距地面不同高度时的归一化辐射方向图 (截面最大值归

一); 图 7 是水平偶极子 (偶极子取向平行于半空间界面) 距地面不同高度时的归一化辐射方向图 (截面最大值归一). 图 7(a),(b) 分别垂直于和平行于偶极子取向截面的情形. 图 6 和图 7 中圆圈、米字、圆点分别表示偶极子距地面高度为 0 m, 40 m 80 m 时的情形. 图 8(a)—(c) 为半空间上方 80 m 处水平、垂直以及偶极子取向为  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  时的立体辐射方向图.

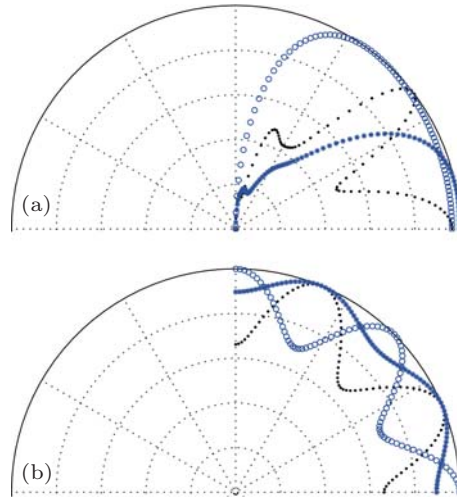


图7 半空间上方水平偶极子的辐射方向图随偶极子高度的变化情况 (a) 垂直于偶极子取向的截面; (b) 平行于偶极子取向的截面

由上述的计算结果可见, 半空间上方偶极子的辐射方向图与偶极子取向及偶极子距地面高度均有关系. 随着偶极子距地面高度的增加, 辐射方向图的波瓣数目也增加.

### 4 结论

本文利用互易定理给出了分层半空间上方任意取向电偶极子远区辐射场的解析表达式. 对于分层介质 (不存在理想导体界面), 电偶极子和磁偶极子的远区辐射场具有对偶性质, 因而可以通过对偶关系得到半空间上方磁偶极子的远区辐射场. 在电、磁偶极子的远场表达式中包含有反射系数, 在均匀半空间情形可以利用 Fresnel 公式获得界面的反射系数; 在分层半空间情形则可以通过连分数方法或传播矩阵法计算获得反射系数. 本文推导过程物理概念清晰, 所得结果是复杂解析结果在观察点远离界面情形下的良好近似. 数值计算结果表明, 利用本文结果可以快速地得到半空间上方任意取向偶极子的远区辐射场.

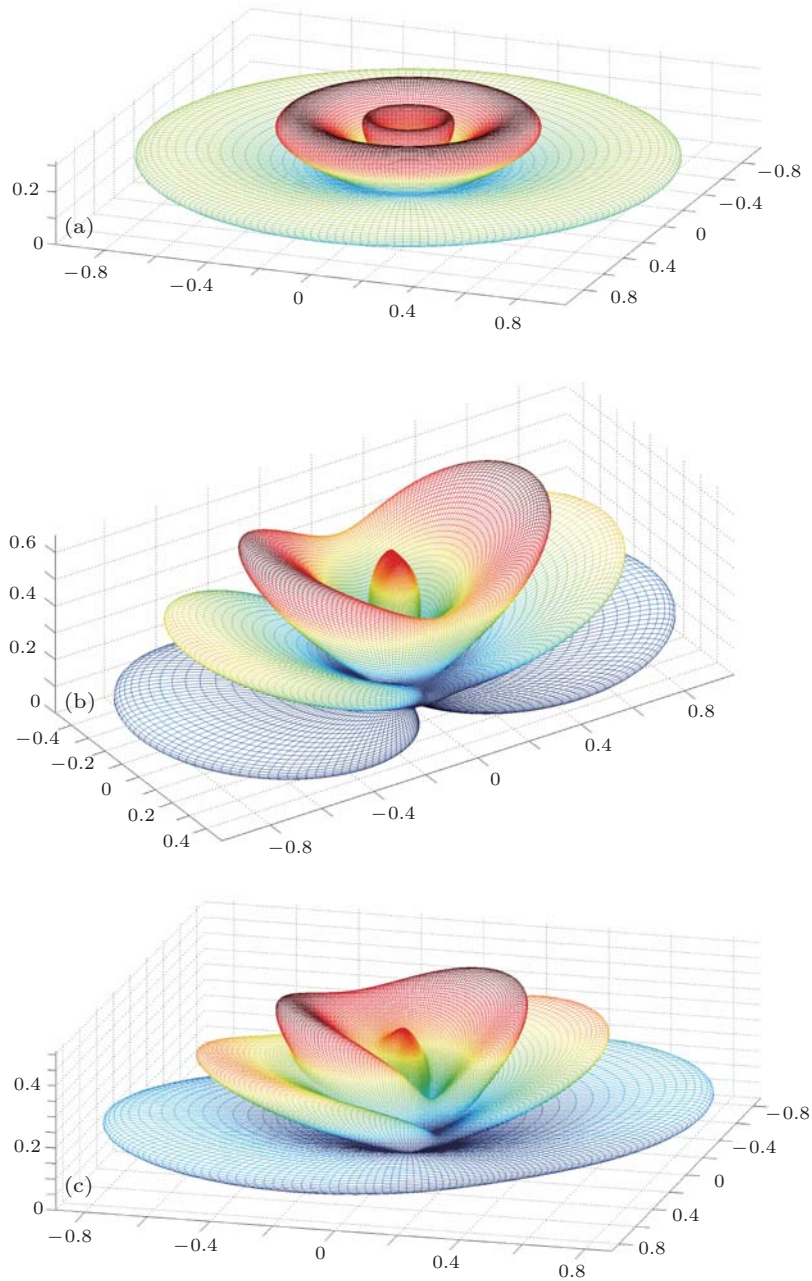


图 8 半空间上方 80 m 处偶极子的立体辐射方向图 (a) 垂直偶极子; (b) 水平偶极子; (c) 取向为  $\theta_0 = \pi/4$ ,  $\varphi_0 = \pi/4$  的偶极子

- |  |   |
|--|---|
| <p>[1] Jackson J D 1999 <i>Classical Electrodynamics</i> (3rd Ed.) (New York: John Wiley &amp; Sons)</p> <p>[2] Kong J A 2002 <i>Electromagnetic Wave Theory</i> (Beijing: Higher Education Press, EMW Publishing)</p> <p>[3] Wait J R 1985 <i>Electromagnetic Wave Theory</i> (New York: Harper &amp; Row Publishers)</p> <p>[4] Li K 2009 <i>Electromagnetic Fields in Stratified Media</i> (Hangzhou: Zhejiang University Press, Springer Publishing)</p> | <p>[5] Ge D B, Wei B 2011 <i>Electromagnetic Wave Theory</i> (Beijing: Science Press) (in Chinese) [葛德彪, 魏兵 2011 电磁波理论 (科学出版社)]</p> <p>[6] Stratton J A 1941 <i>Electromagnetic Theory</i> (New York: McGraw-Hill)</p> <p>[7] Kraus J D, Fleisch D A 1999 <i>Electromagnetics with Applications</i> (5th Ed.) (New York: McGraw-Hill)</p> <p>[8] Zhang S J 2009 <i>Engineer Electromagnetic Theory</i> (Beijing: Sci-</p> |
|--|---|

- ence Press) [张善杰 2009 工程电磁理论 (科学出版社)]
- [9] Yang T M, Xie Y J, Wang P, Yang R 2007 *Chinese J. Geophysics* **50** 605 (in Chinese) [杨同敏, 谢拥军, 王鹏, 杨锐 2007 地球物理学报 **50** 605]
- [10] Fan Z H, Liu J Q, Hu Y Q, Chen R S 2010 *Chin. J. Computation Physics* **27** 95 (in Chinese) [樊振宏, 刘金权, 胡云琴, 陈如山 2010 计算物理 **27** 95]
- [11] Zhang X Y, Sheng X Q 2007 *Chinese J. Radio Science* **22** 952 (in Chinese) [张晓燕, 盛新庆 2007 电波科学学报 **22** 952]
- [12] Li X F, Xie Y J, Wang P, Yang R 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2930 (in Chinese) [李晓峰, 谢拥军, 王鹏, 杨锐 2008 物理学报 **57** 2930]
- [13] Wang R, Guo L X, Wang A Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3179 (in Chinese) [王蕊, 郭立新, 王安琪 2010 物理学报 **59** 3179]
- [14] Ye H X, Jin Y Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4579 (in Chinese) [叶红霞, 金亚秋 2009 物理学报 **58** 4579]

# Calculating far field of an arbitrarily oriented electric dipole located above layered half space using reciprocity theorem\*

Ge De-Biao    Wei Bing<sup>†</sup>

(Department of Physics Xidian University, Xi'an 710071 China)

(Received 28 April 2011; revised manuscript received 20 May 2011)

## Abstract

Based on the reciprocity theorem, the far field formulation of an arbitrarily oriented electric dipole located at the interface of the layered half space is deduced. Then, considering the optical path difference between directed wave and reflected wave, the formula of the electric dipole located above the interface of the layered half space is discussed. The TE and the TM reflection coefficients of the layered half space can be calculated by the propagation matrix method or the continued fraction method. The present method, in which the deduction process possesses concise physics concept, is suitable for calculating the radiated field of an electric dipole when the observation point is away from the interface. The numerical results show that using our method the far radiation field of an arbitrarily oriented electric dipole located above the interface of layered half space can be quickly analyzed.

**Keywords:** electric dipole, layered half space, reciprocity theorem, far radiated field

**PACS:** 03.50.-z, 03.50.De, 41.20.-q

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61001065) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China

<sup>†</sup> E-mail: bwei@xidian.edu.cn