Chetaev 型约束的相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性与 Noether 守恒量*

王肖肖[1)] 孙现亭[2)] 张美玲[1)] 解银丽[1)] 贾利群[1)†]

1) (江南大学理学院, 无锡 214122)

2) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467002)

(2011 年 5 月 21 日收到; 2011 年 7 月 18 日收到修改稿)

研究 Chetaev 型约束的相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性与 Noether 守恒量. 对 Chetaev 型约束的相对运动力学系统 Nielsen 方程的运动微分方程、Noether 对称性定义和判据进行具体的研究, 得到了 Noether 对称性直接导致的 Noether 守恒量的表达式. 最后举例说明结果的应用.

关键词: Chetaev 型约束, 相对运动动力学, Nielsen 方程, Noether 守恒量

PACS: 45.20.Jj, 02.20.Sv

1 引 言

约束力学系统的近代对称性理论主要有三种: Noether 对称性 [1−7]、Lie 对称性 [8−15] 和 Mei 对称性 [16−21]. Noether 理论对约束力学系统的对称性和守恒量理论的发展起到了重大的作用. Noether 对称性是 Hamilton 作用量在无限小变换下的一种不变性. 国内外在 Noether 对称性和守恒量方面开展了卓有成效的研究工作 [22−29]. 目前, 对称性和守恒量的研究主要应用于传统二阶 Lagrange 方程的动力学系统及其广义系统, 例如: Lagrange 系统、Hamilton 系统、Birkhoff 系统、Chaplygin 系统等, 文献 [30] 和 [31] 研究了三阶 Lagrange 方程的对称性和守恒量. 2006 年, 梅凤翔提出了 Lagrange 系统的一类新的对称性 - 弱 Noether 对称性 [32], 并指出弱 Noether 对称性比通常的 Noether 对称性更具一般意义, 有更广泛的应用. 文献 [33] 指出: Nielson 方程与第二类 Lagrange 方程的重要区别在于函数 $\dot{T}$ 的出现. 在某些情形, 计算 $(\partial/\partial\dot{q}_s \mathrm{d}T/\mathrm{d}t)$ 可能比计算 $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t\partial T/\partial\dot{q}_s)$ 要容易些. 如果是这种情形, 运用 Nielson 方程比运用第二类 Lagrange 方程要简单些. 因此, 与 Lagrange 方程相比, Nielsen 方程的 Noether 对称性与 Noether 守恒量的计算, 在这种情况下也会相应的简单一些. 目前, 在 Nielsen 体系的研究中, 尚未见到 Chetaev 型约束的相对运动动力学系统的 Noether 对称性与 Noether 守恒量的研究. 本文将研究 Chetaev 型约束的相对运动力学系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性和由 Noether 对称性直接导致的 Noether 守恒量.

2 系统的微分方程

假设力学系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 来确定, 它的运动受有 g 个彼此相容且独立的双面理想 Chetaev 型约束方程

$$f_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,g) \tag{1}$$

的限制, 约束方程 (1) 加在虚位移 δq_s 上的 Chetaev 条件为

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}\delta q_s=0, \quad (\beta=1,2,\cdots,g), \tag{2}$$

系统的相对运动 Nielsen 方程为

$$\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}L_r}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial L_r}{\partial q_s}=Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}, \quad (s=1,2,\cdots,n). \tag{3}$$

* 国家自然科学基金 (批准号：1142014, 61178032) 资助的课题.

† E-mail: jlq@0000@163.com

方程中 $L_r = L_r(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统相对运动的 Lagrange 函数, $Q_s = Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力, $Q_s^{\dot{\boldsymbol{\omega}}} = -(\dot{\omega}\times m_i\boldsymbol{r}_i')\cdot(\partial\boldsymbol{r}_i'/\partial q_s)$ 为广义回转惯性力 (其中 m_i 为第 i 个质点的质量, $\boldsymbol{r}_i'$ 为第 i 个质点的相对矢径, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ 为载体的角加速度), $\varGamma_s = 2\dot{q}_k\boldsymbol{\omega}\cdot[m_i(\partial\boldsymbol{r}_i'/\partial q_s)\times(\partial\boldsymbol{r}_i'/\partial q_k)]$ 为广义陀螺力 (其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为载体的角速度), $\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为 Lagrange 乘子. 方程 (3) 可表示为

$$N_s(L_r) = Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\quad (s=1,2,\cdots,n),\tag{4}$$

方程 (4) 中 N_s 为 Nielsen 算子

$$N_s = \frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-2\frac{\partial}{\partial q_s},\quad (s=1,2,\cdots,n).\tag{5}$$

设系统 (3) 非奇异, 即 $\det\left(\partial^2L_r/\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_k\right)\neq 0$, 则由方程 (1) 和 (4) 可求出所有的 $\lambda_\beta = \lambda_\beta(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$. 方程 (4) 还可写为

$$N_s(L_r) = Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\varLambda_s,\tag{6}$$

方程 (6) 中

$$\varLambda_s = \varLambda_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}) = \lambda_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s},\quad (s=1,2,\cdots,n)\tag{7}$$

为广义约束反力.

方程 (6) 为 Chetaev 型非完整系统相对运动方程 (1) 和 (3) 相应的完整系统相对运动方程. Chetaev 型非完整系统相对运动方程可在完整系统相对运动方程的解中找到. 只要运动的初始条件满足 Chetaev 型非完整系统相对运动约束方程, 则完整系统相对运动方程 (6) 的解就给出非完整系统相对运动方程 (1) 和 (3) 的运动, 由方程 (6) 可解出所有的广义加速度, 记作

$$\ddot{q}_s = \alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad (s=1,2,\cdots,n).\tag{8}$$

3 系统方程的Noether对称性和Noether守恒量

引入时间和广义坐标的无限小变换方程

$$\begin{aligned}&t^* = t+\Delta t,\quad q_s^*(t^*) = q_s(t)+\Delta q_s,\\&(s=1,2,\cdots,n),\end{aligned}\tag{9}$$

方程 (9) 可展开为

$$\begin{aligned}t^* =& t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\quad q_s^*(t^*) = q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\&(s=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{10}$$

方程 (10) 中 ε 为无限小参数, ξ_0 和 ξ_s 为无限小变换生成元. Hamilton 作用量在上述无限小变换下的不变性为 Noether 对称性.

Noether 理论 [31] 指出, 如果存在规范函数 $G_{\mathrm{N}} = G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$, 使无限小变换生成元 ξ_0, ξ_s 满足 Noether 等式

$$\begin{aligned}&L_r\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L_r)+(Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\varLambda_s)\\&\times(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}} = 0,\end{aligned}\tag{11}$$

其中 $X^{(1)} = \xi_0\dfrac{\partial}{\partial t}+\xi_s\dfrac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\dfrac{\partial}{\partial\dot{q}_s}$, 则对称性是相应的完整系统 (6) 的 Noether 对称性. 如果还满足限制方程

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0) = 0,\tag{12}$$

则对称性是非完整系统 (1) 和 (3) 的 Noether 对称性.

判断 Noether 对称性的另一方法是无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 使 Killing 方程 [34]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial L_r}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\xi_s\\&+\left(L_r-\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\partial\xi_0}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\&+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\left(\frac{\partial\xi_s}{\partial t}+\frac{\partial\xi_s}{\partial q_k}\dot{q}_k\right)\\&+(Q_s+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+\varLambda_s)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)\\=&-\frac{\partial G_{\mathrm{N}}}{\partial t}-\frac{\partial G_{\mathrm{N}}}{\partial q_k}\dot{q}_k\left(L_r-\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\dot{q}_s\right)\frac{\partial\xi_0}{\partial\dot{q}_k}\\&+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}\frac{\partial\xi_s}{\partial\dot{q}_k} = -\frac{\partial G_{\mathrm{N}}}{\partial\dot{q}_k}\\&(s,k=1,2,\cdots,n).\end{aligned}\tag{13}$$

有解. 式 (11) 和方程 (12), (13) 称为 Noether 对称性的判据. 对 Chetaev 型约束的相对运动动力学系统而言, 由Noether 对称性可直接导致Noether守恒量.

命题 如果无限小变换生成元 ξ_0,ξ_s 满足 Noether 等式 (11) 和限制方程 (12) 或 Killing 方程 (13) 有解, 则 Chetaev 型非完整约束相对运动动力学系统 (1) 和 (3) 的 Noether 对称性直接导致 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}} = L_r\xi_0+\frac{\partial L_r}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}} = \mathrm{const}.\tag{14}$$

如果仅满足 (11) 式, 但不满足 (12) 式, 则 (13) 式为相应完整系统 (6) 的 Noether 守恒量.

证明 Hamilton 作用量定义为 Lagrange 函数 $L_r = L_r(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 在时间区间 $[t_1,t_2]$ 上的积分,

表示为

$$S(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} L_r(t, \boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\,\mathrm{d}t, \tag{15}$$

其中 γ 为某曲线. 在变换 (10) 下, 曲线 γ 变换为邻近曲线 γ^*, 相应的 Hamilton 作用量变换为

$$S(\gamma^*) = \int_{t_1^*}^{t_2^*} L_r(t^*, \boldsymbol{q}^*, \dot{\boldsymbol{q}}^*)\,\mathrm{d}t^*. \tag{16}$$

作用量 S 的变分 ΔS 为差 $S(\gamma^*) - S(\gamma)$ 的相对 ε 的主线性部分. 根据全变分与等时变分之间关系的公式 [31], 有

$$\Delta S = \delta S + \dot{S}\Delta t, \tag{17}$$

以及

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} [\Delta L_r + L_r(\Delta t)^{\cdot}]\,\mathrm{d}t. \tag{18}$$

于是有

$$\begin{aligned}\Delta S &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)\mathrm{d}t + L_r\Delta t,\\ &= \int_{t_1}^{t_2} \bigg[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_r\Delta t + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s\right)\\ &\quad + \left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s\bigg]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{19}$$

以及

$$\begin{aligned}\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \bigg[&L_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta t) + \frac{\partial L_r}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial L_r}{\partial q_s}\Delta q_s\\ &+ \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\Delta \dot{q}_s\bigg]\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{20}$$

将 (10) 式代入 (19) 式, 并注意到

$$\delta q_s = \Delta q_s - \dot{q}_s\Delta t = \varepsilon(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0), \tag{21}$$

得到

$$\begin{aligned}\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon\bigg[&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_r\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\bar{\xi}_s\right)\\ &+ \left(\frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}\right)\bar{\xi}_s\bigg]\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{22}$$

其中 $\bar{\xi}_s = \xi_s - \dot{q}_s\xi_0$. 因给定的无限小变换 (9) 式和 (10) 式满足 (11) 式, 即无限小变换是系统的广义准对称变换, 故有

$$\Delta S = -\int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Delta G) + (Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s)\delta q_S\right]\mathrm{d}t. \tag{23}$$

考虑到 (22) 式, 以及 ε 的独立性和积分区间 $[t_1, t_2]$ 的任意性, 得到

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[L_r\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}}]\\ &+ \left(2\frac{\partial L_r}{\partial q_s} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + Q_s + Q_s^{\dot{\omega}} + \varGamma_s + \varLambda_s\right)\\ &\times(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) = 0.\end{aligned} \tag{24}$$

将 (6) 式代入 (24) 式得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[L_r\xi_0 + \frac{\partial L_r}{\partial \dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + G_{\mathrm{N}}\right] = 0. \tag{25}$$

积分之便得守恒量 (14), 证毕.

4 算例

如图 1 所示, 载体 (图中未画出) 以匀角速度 ω 绕竖直轴做定轴转动, 转轴固结一管子OA, 管内有一原长等于管长、劲度系数为 k 的弹簧, 弹簧一端固连于 A 点, 另一端连接一质量为 m 的小球. 不计重力, 试研究小球相对载体的 Noether 对称性和 Noether 守恒量. 图中坐标系 O—$q_1q_2q_3$ 与载体固连.

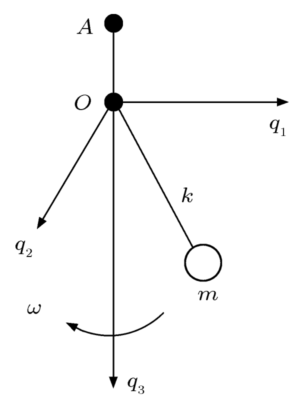

图 1 小球位形示意

设小球所受 Chetaev 型约束方程和小球的相对运动动力学函数分别为

$$\begin{aligned}f &= \dot{q}_2 - t\dot{q}_1 = 0,\\ L_r &= \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(q_1^2 + q_2^2)\\ &\quad - \frac{1}{2}k(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2),\\ \varGamma_1 &= 2m\omega\dot{q}_2, \varGamma_2 = -2m\omega\dot{q}_1, \varGamma_3 = 0,\\ Q_s &= 0,\ Q_s^{\dot{\omega}} = 0 \quad (s = 1, 2, 3).\end{aligned} \tag{26}$$

由方程 (3) 可得

$$\begin{aligned}m\ddot{q}_1 &= -kq_1 + m\omega^2 q_1 + 2m\omega\dot{q}_2 - \lambda t,\\ m\ddot{q}_2 &= -kq_2 + m\omega^2 q_2 - 2m\omega\dot{q}_1 + \lambda,\\ m\ddot{q}_3 &= -kq_3.\end{aligned} \tag{27}$$

由 (26) 式第一式和 (27) 式可解得

$$\lambda = 2m\omega\dot{q}_1 + \frac{m\dot{q}_1 + (k - m\omega^2)(q_2 - q_1 t)}{1 + t^2}. \tag{28}$$

于是, 系统的微分方程为

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}_1 &= -(k - m\omega^2)\frac{q_1 + q_2 t}{1+t^2} - \frac{m\dot{q}_1 t}{1+t^2},\\
m\ddot{q}_2 &= -(k - m\omega^2)\frac{q_1 t + q_2 t^2}{1+t^2} + \frac{m\dot{q}_1}{1+t^2},\\
m\ddot{q}_3 &= -kq_3.
\end{aligned}
\tag{29}
$$

Noether 等式 (11) 给出

$$
\begin{aligned}
&\Big[\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2+\dot{q}_3^2)+\frac{1}{2}m\omega^2(q_1^2+q_2^2)\\
&-\frac{1}{2}k(q_1^2+q_2^2+q_3^2)\Big]\dot{\xi}_0+\xi_1(m\omega^2 q_1-kq_1)\\
&+\xi_2(m\omega^2 q_2-kq_2)-\xi_3 kq_3+m\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)\\
&+m\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0)+m\dot{q}_3(\dot{\xi}_3-\dot{q}_3\dot{\xi}_0)\\
&+\Big\{2m\omega\dot{q}_2-2m\omega\dot{q}_1 t\\
&-\frac{[m\dot{q}_1+(k-m\omega^2)(q_2-q_1 t)]t}{1+t^2}\Big\}\\
&\times(\xi_1-\dot{q}_1\xi_0)+\frac{m\dot{q}_1+(k-m\omega^2)(q_2-q_1 t)}{1+t^2}\\
&\times(\xi_2-\dot{q}_2\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}=0.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

取无限小变换生成元为

$$\xi_0=\xi_1=\xi_2=0, \xi_3=\dot{q}_3. \tag{31}$$

$$\xi_0=\xi_3=0,\ \xi_1=\dot{q}_1,\ \xi_2=\dot{q}_2. \tag{32}$$

将 (31) 式和 (32) 式分别代入 (30) 式可得

$$G_{\mathrm{N}}=\frac{k}{2}q_3^2-\frac{1}{2}m\dot{q}_3^2, \tag{33}$$

$$G_{\mathrm{N}}=\frac{1}{2}(k-m\omega^2)(q_1^2+q_2^2)-\frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2). \tag{34}$$

无限小变换生成元 (31) 和 (32) 还满足限制方程 (12), 所以对称性是非完整系统 (1) 和 (3) 的 Noether 对称性.

将 (31) 式和 (33) 式代入 (14) 式, 得到 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=\frac{1}{2}m\dot{q}_3^2+\frac{k}{2}q_3^2=\mathrm{const}, \tag{35}$$

将 (32) 式和 (34) 式代入 (14) 式, 得到 Noether 守恒量

$$
\begin{aligned}
I_{\mathrm{N}} &= \frac{1}{2}m(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2)+\frac{1}{2}m(k-m\omega^2)(q_1^2+q_2^2)\\
&=\mathrm{const}.
\end{aligned}
\tag{36}
$$

由于系统所受的约束是不稳定约束, 因此得到的这两个守恒量 (35) 和 (36) 虽然和能量有关, 但并不说明系统在运动过程中能量守恒, 这是两个广义能量积分.

5 结 论

本文给出了 Chetaev 型约束的相对运动力学系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性的定义和判据, 研究了 Chetaev 型约束的相对运动动力学系统 Nielsen 方程的 Noether 对称性和 Noether 守恒量. 主要结果是 Noether 对称性的判据 (11), (12), (13) 以及 Noether 守恒量的表达式 (14). 本文结果和方法可推广到非 Chetaev 型约束的相对运动力学系统和其他力学体系 (如 Lagrange 体系和 Appell 体系). 因此, 本文研究结论具有普遍的理论和实际意义.

[1] Noether A E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Li Y, Fang J H, Zhang K J 2010 *Journal of Dynamics and Control* **8** 300 (in Chinese) [李燕, 方建会, 张克军 2010 动力学与控制学报 **8** 300]

[3] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2005 *Commun. Theor. Phys.* **43** 193

[4] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Applied Mathematics and Mechanics* **23** 47 (in Chinese)[陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔 2002 应用数学和力学 **23** 47]

[5] Zhou Y X 2010 *Journal of Zaozhuang University* **27** 6 (in Chinese) [周玉霞 2010 枣庄学院学报 **27** 6]

[6] Zhang Y, Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2419 (in Chinese) [张毅, 梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2419]

[7] Fu J L, Nie N M, Huang J F 2009 *Chin. Phys.* B **18** 2634 (in Chinese)

[8] Luo S K 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2463

[9] Luo S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **57** 5580 (in Chinese) [罗绍凯 2007 物理学报 **57** 5580]

[10] Luo S K, Huang F J, Lu Y B 2004 *Chin. Phys.* **13** 2182

[11] Jia L Q, Cui J C, Zhang Y Y, Luo S K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 16 (in Chinese) [贾利群, 崔金超, 张耀宇, 罗绍凯 2009 物理学报 **58** 16]

[12] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔, 尚玫 2000 物理学报 **58** 16]

[13] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2007 *Chin. Phys.* **16** 3176

[14] Luo S K 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 2463

[15] Jia L Q, Zhang Y Y, Zheng S W 2007 *Journal of Ynunan University* **29** 589 (in Chinese) [贾利群, 张耀宇, 郑世旺 2007 云南大学学报 **29** 589]

[16] Mei F X 2000 *Journal of Beijing Institute of Technology* **9** 120 (in Chinese) [梅凤翔 2000 北京理工大学学报 **9** 120]

[17] Jia L Q, Luo S K, Zhang Y Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2006 (in Chinese) [贾利群, 罗绍凯, 张耀宇 2008 物理学报 **57** 2006]

[18] Zheng S W, Xie J F, Chen X W, Du X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59**

5209 (in Chinese) [郑世旺, 解加芳, 陈向炜, 杜雪莲 2010 物理学报 **59** 5209]

[19] Yang X F, Jia L Q, Cui J C, Luo S K 2010 *Chin. Phys.* B **19** 030305

[20] Jia L Q, Xie J F, Luo S K 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1560

[21] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[22] Djukic D S, Vujanovic B 1975 *Acta Mechanica* **23** 17

[23] Bahar L Y, Kwatry H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech*. **22** 125

[24] Li Z P 1981 *Acta Phys. Sin.* **20** 1659 (in Chinese) [李子平 1981 物理学报 **20** 1659]

[25] Li Z P 1991 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **24** 4261

[26] Li Z P 1993 *Classical and Quantum Constrained Systems and Symmetry* (Beijing: Beijing industrial university Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京: 北京工业大学出版社)]

[27] Dong W S, Huang B X, Fang J H 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010204

[28] Xia L L, Shan L F 2010 *Chin. Phys.* B **19** 090302

[29] Luo S K 2007 *Chin. Phys.* **16** 3182

[30] Shi Y, Fu R, Ma S J 2007 *Journal of University of Science and Technology of Suzhou* (Natural Science Edition) **24** 34 (in Chinese)[施勇, 傅蓉, 马善钧 2007 苏州科技学院学报 (自然科学版) **24** 34]

[31] Ma S J, Liu M P, Huang P T 2005 *Chin. Phys.* **14** 244

[32] Mei F X, Shui X P 2006 *Journal of Beijing Institute of Technology* **26** 285 (in Chinese) [梅凤翔, 水小平 2006 北京理工大学学报 **26** 285]

[33] Mei F X 1985 *Foundations of Mechanics of Nonholonomic Systems* (Beijing: Beijing Institute of Industrial Press) (in Chinese) [梅凤翔 1985 非完整系统力学基础 (北京: 北京工业学院出版社)]

[34] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京: 科学出版社)]

Noether symmetry and Noether conserved quantity of Nielsen equation in a dynamical system of the relative motion with nonholonomic constraint of Chetaev′s type *

Wang Xiao-Xiao[1)] Sun Xian-Ting[2)] Zhang Mei-Ling[1)]
Xie Yin-Li[1)] Jia Li-Qun[1)†]

1) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi* 214122, *China*)

2) (*School of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan* 467002, *China*)

(Received 21 May 2011; revised manuscript received 18 July 2011)

Abstract

Noether symmetry and Noether conserved quantity of Nielsen equation in a dynamical system of the relative motion with nonholonomic constraint of Chetaev's type are studied. The differential equation of motion of Nielsen equation for the system, the definition and the criterion of Noether symmetry, and the expression of Noether conserved quantity deduced directly from Noether symmetry for the system are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: nonholonomic constraint of Chetaev's type, dynamics of the relative motion, Nielsen equation, Noether conserved quantity

PACS: 45.20.Jj, 02.20.Sv

∗ Project supported by the National Natural Secince Foundation of China (Grant Nos. 11142014, 61178032).

† E-mail: jlq@0000@163.com