物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 61, No. 7 (2012) 070401

# 三类大气基本波动的广义变分原理*

宋君强 曹小群† 朱小谦 张卫民 赵军

( 国防科学技术大学计算机学院, 长沙 410073 )

( 2011 年 7 月 13 日收到; 2011 年 8 月 14 日收到修改稿 )

半反推法是 He 为了寻求数学物理问题的变分原理而提出的, 可避免由拉氏乘子法引起的临界变分现象. 应用半反推法分别获得了动力气象中 Rossby 波、大气声波和重力外波等三类基本大气波动的广义变分原理, 并验证了它们的正确性.

**关键词**: 半反推法, 广义变分原理, Rossby 波, 大气声波

**PACS:** 04.20.Fy, 92.10.hf, 43.28.+h, 47.35.Bb

## 1 引 言

随着电子计算机的广泛应用与基于变分的有限元法和无网格方法的兴起, 变分方法在众多科学和工程领域中得到了广泛研究和应用 [1−15], 因此建立各个学科领域的变分原理便成为当务之急. 与其他近似方法比较, 变分方法结合了以下两个优点：首先能够直观地提供待求问题解的基本物理特征 (包括初边值条件); 其次所获得的解是所有试探函数中最好的. 许多学者针对变分问题的逆问题开展了广泛研究, 即从数学物理问题的场方程出发建立相应的变分原理. 在广义变分原理的研究中, 拉氏乘子法是一种被普遍采用的方法, 缺陷是容易出现临界变分现象 [9]. 何吉欢提出和发展了一种半反推方法 (semi-inverse method)[9−15], 能成功地消除约束, 构造多变量的广义变分原理; 并且避免了运用拉氏乘子法时可能出现的临界变分现象, 已经在许多领域得到了非常成功的应用 [9−15].

大气波动是产生风、雨、雷、电等天气现象的主要原因之一, 诱发大气波动的因素很多, 如大气可压缩性、大气层结、重力、科里奥利力和边界面振荡等 [16]. 由不同原因形成的波动其性质有很大差别. 大气波动的最简单形式有声波、重力外波、惯性波和 Rossby 波等, 它们称为大气中的基本波动 [16]. 鉴于大气波动在物理学和大气科学研究中占有重要位置, 获得其变分原理无论是在理论上还是在实际中都是非常有意义的工作. 本文采用半反推方法对三类大气基本波动 (Rossby 波、大气声波和重力外波) 的控制方程组进行了变分分析, 分别获得了一族广义变分原理, 并对正确性进行了验证. 研究过程表明, 与传统的拉氏乘子法相比, 半反推方法 [9−15] 在构造动力气象问题的广义变分原理时十分简洁、有效和方便.

## 2 Rossby 波的广义变分原理

Rossby 波是大气和海洋大尺度运动中的主要波动. 在旋转地球上, 由于地转参数随纬度的变化会引起相对涡度的变化, 从而产生 $\beta$ 效应. $\beta$ 效应是 Rossby 波在空间中传播的物理机理, 控制 Rossby 波运动的方程可以表示成如下形式 [17]：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \end{aligned} \tag{1}$$

式中柯氏参数表示为 $f \approx f_0 + \beta y$, $\beta$ 表示 $f$ 随纬度的变化率, $u$ 和 $v$ 分别表示纬向和经向运动分量, $\Phi$ 表示位势高度. 对于大气中的 Rossby 波运动, 可以假定运动是水平无辐散的, 即 $u_x + v_y = 0$. 因此可以引入流函数 $\psi$, 它满足

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{2}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 41105063, 61070041) 资助的课题.

† E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

再引进涡度定义式 $\zeta=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}$, 结合 (2) 式则涡度可以进一步表示成 $\zeta=\Delta\psi$. 利用上面的关系式可以从方程组 (1) 式变形得到控制 Rossby 波运动的涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0, \tag{3}$$

研究目标是建立一个广义变分公式, 要求是其 Euler-Lagrange 方程满足方程组 (3). 为达到此目标, 将使用何吉欢提出的半反推方法 [9−15] 来构造描述大气 Rossby 波运动的涡度方程 (3) 式的广义变分原理

$$J=\iiint L\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t, \tag{4}$$

式中的 $L$ 是试拉格朗日函数, $\mathrm{d}\Omega=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 如果引进 $\psi(t,x,y)=G_t(t,x,y)$, 则 (3) 式进一步转化成

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta G)+\beta\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial x}=0. \tag{5}$$

通过观察方程 (5) 式的左端, 可以首先假设 $L$ 具有如下公式：

$$L=\frac{1}{2}\left[(1-\alpha_1)G\frac{\partial^4 G}{\partial t^2\partial x^2}+\alpha_1\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial x}\right)^2 +(1-\alpha_2)G\frac{\partial^4 G}{\partial t^2\partial y^2}+\alpha_2\left(\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial y}\right)^2\right]+F, \tag{6}$$

式中的权重因子 $\alpha_i(i=1,2)$ 是实数区间 $[0,1]$ 之间的任意常数. $F$ 是一个关于 $G$ 及其导数的待定函数, 一般存在各种选择来构造试拉格朗日函数, 有关例子可以在文献 [9—15] 中找到. 现在考虑 $L$ 关于 $G$ 的驻值条件, 有

$$\frac{\partial L}{\partial G}+\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial G_{tx}}\right)+\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial G_{ttxx}}\right) +\frac{\partial^2}{\partial t\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial G_{ty}}\right)+\frac{\partial^4}{\partial t^2\partial y^2}\left(\frac{\partial L}{\partial G_{ttyy}}\right)+\frac{\delta F}{\delta G}=0, \tag{7}$$

其中 $\dfrac{\delta F}{\delta G}$ 称为 $F$ 关于 $G$ 的何氏变分导数 [9−15], 定义如下：

$$\frac{\delta F}{\delta G}=\frac{\partial F}{\partial G}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial G_x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial G_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial G_{xx}}+\cdots.$$

由 (6) 式和 (7) 式有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\Delta G)+\frac{\delta F}{\delta G}=0. \tag{8}$$

构造待定函数 $F$ 的目的是使方程 (8) 式等价于方程 (5) 式. 因此将 (5) 式代入 (8) 式中有

$$\frac{\delta F}{\delta G}-\beta\frac{\partial^2 G}{\partial t\partial x}=0. \tag{9}$$

根据有关的变分原理, 容易从 (9) 式推导和构造出待定函数 $F$ 的表达式

$$F=\frac{\beta}{2}[(1-\gamma)GG_{tx}-\gamma G_tG_x], \tag{10}$$

其中权重因子 $\gamma$ 是实数区间 $[0,1]$ 之间的任意常数. 将 (10) 式代入 (6) 式, 则得到试拉格朗日函数最终的表达式

$$L=\frac{1}{2}[(1-\alpha_1)GG_{ttxx}+\alpha_1G_{tx}^2+(1-\alpha_2)GG_{ttyy} +\alpha_2G_{ty}^2]+\frac{\beta}{2}[(1-\gamma)GG_{tx}-\gamma G_tG_x]. \tag{11}$$

将上式代入 (4) 式中, 则进一步得到控制大气 Rossby 波运动的涡度方程的广义变分原理公式

$$J=\frac{1}{2}\iiint[(1-\alpha_1)GG_{ttxx}+\alpha_1G_{tx}^2 +(1-\alpha_2)GG_{ttyy}+\alpha_2G_{ty}^2+(1-\gamma)\beta GG_{tx} -\gamma\beta G_tG_x]\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t. \tag{12}$$

在 (11) 和 (12) 式中, $\alpha_1$, $\alpha_2$ 和 $\gamma$ 是实数区间 $[0,1]$ 之间任意大小的权重参数. (12) 式实际上是大气 Rossby 波以 $G_t=\psi$ 为约束的亚广义变分原理.

下面验证获得的控制大气 Rossby 波运动的涡度方程广义变分原理 (12) 式的正确性, 求泛函表达式 (12) 关于 $G$ 的驻值条件, 则得到下面的 Euler-Lagrange 方程：

$$\delta G: G_{ttxx}+G_{ttyy}+\beta G_{tx}=0, \tag{13}$$

其中 $\delta G$ 表示 $G$ 的一阶变分. 将 $G_t=\psi$ 和 $\Delta\psi=\psi_{xx}+\psi_{yy}$ 依次代入上式, 得到 $(\Delta\psi)_t+\beta\psi_x=0$, 说明方程 (13) 与 (3) 式是等价的. 从而证明了上面获得的关于大气 Rossby 波运动的广义变分原理的正确性.

对于 (12) 式, 如果令所有权重参数 ($\alpha_1$, $\alpha_2$ 和 $\gamma$) 分别为 0 和 1, 则很容易求得 Rossby 波运动两个特殊形式的广义变分原理

$$J_1=\frac{1}{2}\iiint(GG_{ttxx}+GG_{ttyy}+\beta GG_{tx})\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t, \tag{14}$$

$$J_2=\frac{1}{2}\iiint(G_{tx}^2+G_{ty}^2-\beta G_tG_x)\mathrm{d}\Omega\mathrm{d}t. \tag{15}$$

(15) 式中的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}(G_{tx}^2+G_{ty}^2)-\frac{1}{2}\beta G_t G_x. \tag{16}$$

如果利用 $G_t=\psi$ 和 (2) 式, (16) 式右端第一项实际上可表示为 Rossby 波的动能项：$\frac{1}{2}(\psi_x^2+\psi_y^2)=\frac{1}{2}(u^2+v^2)$, 而第二项 $\frac{1}{2}\beta G_t G_x$ 为波动位能. 因此 (16) 式中 $L$ 的物理含义是动能与位能之差, 与分析力学中 Lagrange 函数的意义是一致的, 有关文献采用其他方法也求得了 (16) 式 [17]. 而本文的研究结果表明：采用何氏半反推法可以求得地球物理流体中 Rossby 波更广泛形式的广义变分原理, 而其他方法求得的广义变分原理只是一种特殊形式.

## 3 大气声波的广义变分原理

声波是由于大气可压缩性所引起的. 当一部分空气受到压缩时, 其四周空气也相继被压缩, 这种压缩过程的传播即形成声波. 为了突出研究大气可压缩性引起的声波, 暂不考虑科里奥利力的作用和大气层结的影响. 如果只考虑声波在 $x$ 方向的传播, 即 $u\neq 0, v=w=0$, 则描写一维声波的控制方程组可以写为 [18]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial \rho'}{\partial t}+\rho_0\frac{\partial u}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial p'}{\partial t}=c_{\mathrm{s}}^2\frac{\partial \rho'}{\partial t},\end{aligned} \tag{17}$$

式中 $\rho_0$ 是基本大气密度, 仅是高度 $z$ 的函数, 即 $\rho_0=\rho_0(z)$; $\rho'$ 和 $p'$ 分别表示由声波运动引起的大气密度和气压的变化量; $u$ 和 $c_{\mathrm{s}}$ 分别表示空气质点速度和声波波速. 将方程组 (17) 中的第二和第三式合并, 则方程组 (17) 可改写为 [18]

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x}=0,\\&\frac{\partial p'}{\partial t}+\rho_0 c_{\mathrm{s}}^2\frac{\partial u}{\partial x}=0.\end{aligned} \tag{18}$$

引入一个特殊函数 $\varPhi$, 定义如下：

$$\varPhi_x=\rho_0 u,\ \ \varPhi_t=-p'. \tag{19}$$

类似地, 可以引入另外一个特殊函数 $\varPi$, 定义如下：

$$\varPi_x=p',\ \ \varPi_t=-\rho_0 c_{\mathrm{s}}^2 u. \tag{20}$$

如果采用 (19) 式, 则方程组 (18) 中的第一个等式自动满足, 本部分的目标是建立一个广义变分公式, 而它的 Euler-Lagrange 方程满足方程组 (18) 的第一个等式及方程组 (19) 式. 为了达到此目的, 这里将使用何吉欢提出的半反推方法 [9−15] 来构造大气声波运动方程 (18) 式的广义变分公式

$$J(u,p',\varPhi)=\iint L_1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{21}$$

式中的 $L_1$ 是试拉格朗日函数, 由下面的公式定义：

$$L_1=p'\varPhi_t+\rho_0 c_{\mathrm{s}}^2 u\varPhi_x+F_1, \tag{22}$$

式中的 $F_1$ 是一个只与 $u$ 和 $p'$ 及它们导数有关的待定函数, 且与特殊函数 $\varPhi$ 不相关. 一般存在各种选择来构造试拉格朗日函数, 有关例子可以在文献 [9—15] 中找到. (22) 式所表示的试拉格朗日函数具有一个明显的优点, 其关于 $\varPhi$ 的驻值条件

$$\frac{\partial L_1}{\partial \varPhi}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \varPhi_x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial \varPhi_t}\right)=0, \tag{23}$$

可以导出方程组 (18) 中的第二个等式. 现在分别考虑 $L_1$ 关于 $u$ 和 $p'$ 的驻值条件, 有

$$\frac{\partial L_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial u_t}\right)+\frac{\delta F_1}{\delta u}=0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial p'}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L_1}{\partial p'_x}\right)-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L_1}{\partial p'_t}\right)+\frac{\delta F_1}{\delta p'}=0. \tag{25}$$

(24) 和 (25) 式中的 $\frac{\delta F_1}{\delta u}$ 和 $\frac{\delta F_1}{\delta p'}$ 分别称为 $F_1$ 关于 $u$ 和 $p'$ 的何氏变分导数 [9−15], 定义如下：

$$\frac{\delta F_1}{\delta u}=\frac{\partial F_1}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial u_x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial u_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F_1}{\partial u_{xx}}+\cdots,$$

$$\frac{\delta F_1}{\delta p'}=\frac{\partial F_1}{\partial p'}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F_1}{\partial p'_x}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial F_1}{\partial p'_t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial F_1}{\partial p'_{xx}}+\cdots.$$

由 (22), (24) 和 (25) 三个等式容易导出下面的两式：

$$\rho_0 C_{\mathrm{s}}^2\varPhi_x+\frac{\delta F_1}{\delta u}=0, \tag{26}$$

$$\varPhi_t+\frac{\delta F_1}{\delta p'}=0. \tag{27}$$

构造待定函数 $F_1$ 的目的是使方程 (26) 和 (27) 等价于 (19) 式中的场方程. 因此将 (19) 式代入 (26) 和 (27) 式有

$$\frac{\delta F_1}{\delta u}=-\rho_0^2 C_{\mathrm{s}}^2 u, \tag{28}$$

$$\frac{\delta F_1}{\delta p'}=p', \tag{29}$$

从而得到

$$F_1 = (p'^2 - \rho_0^2 C_s^2 u^2)/2. \tag{30}$$

将 (30) 式代入 (22) 式, 再将 (22) 式代入 (21) 式, 则得到一维大气声波运动方程的广义变分原理公式

$$J(u,h,\varPhi) = \iint [p'\varPhi_t + \rho_0 c_s^2 u \varPhi_x + (p'^2 - \rho_0^2 C_s^2 u^2)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{31}$$

下面验证一维大气声波方程组广义变分原理 (31) 式的正确性, 分别求泛函表达式 (31) 关于 $\varPhi$, $u$ 和 $p'$ 的驻值条件, 得到下面的 Euler-Lagrange 方程组:

$$\begin{aligned}
&\delta\varPhi:\ -p'_t - \rho_0 C_s^2 u_x = 0,\\
&\delta u:\ \rho_0 C_s^2 \varPhi_x - \rho_0^2 C_s^2 u = 0,\\
&\delta p':\ \varPhi_t + p' = 0,
\end{aligned} \tag{32}$$

式中的 $\delta\varPhi$, $\delta u$ 和 $\delta p'$ 分别表示 $\varPhi$, $u$ 和 $p'$ 的一阶变分. 由 (32) 式中第三个等式有 $\varPhi_t = -p'$, 由 (32) 式中第一、二式分别有 $\dfrac{\partial p'}{\partial t} + \rho_0 c_s^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ 和 $\varPhi_x = \rho_0 u$, 从而说明方程组 (32) 与 (19) 式和 (18) 中第二式是等价的. 从而证明了上面获得的大气一维声波方程组的广义变分原理是正确的.

如果引入的是 (20) 式中的特殊函数 $\varPi$, 类似地可以得到大气一维声波方程组的另一个广义变分原理公式

$$J(u,p',\varPi) = \iint [\rho_0 u \varPi_t + p'\varPi_x + (\rho_0^2 C_s^2 u^2 - p'^2)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{33}$$

如果分别求泛函方程 (33) 式关于 $\varPi$, $u$ 和 $p'$ 的驻值条件, 则得到下面形式的 Euler-Lagrange 方程组:

$$\begin{aligned}
&\delta\varPi:\ -(\rho_0 u)_t - p'_x = 0,\\
&\delta u:\ \rho_0 \varPi_t + \rho_0^2 C_s^2 u = 0,\\
&\delta p':\ \varPi_x - p' = 0,
\end{aligned} \tag{34}$$

式中的 $\delta\varPi$, $\delta u$ 和 $\delta p'$ 分别表示 $\varPi$, $u$ 和 $p'$ 的一阶变分. 易知方程组 (34) 与 (20) 式和 (18) 式中第一个等式是等价的. 从而证明了上面获得的大气一维声波方程组的广义变分原理 (33) 式是正确的. 综上所述, 本小节利用何氏半反推法 [9—15] 得到了大气一维声波运动方程组 (18) 式的两个广义变分原理, 并通过从泛函方程导出的 Euler-Lagrange 方程组与原来方程之间的一致性, 证明了获得的两个广义变分原理的正确性.

## 4 重力外波的广义变分原理

重力波是大气在重力作用下产生的一种波动, 它的产生与垂直运动相联系. 重力波又分为重力外波和重力内波. 重力外波是指处于大气上下边界 (如自由面及下边界) 的空气, 受到垂直扰动以后, 偏离平衡位置, 在重力作用下产生的波动. 它发生在边界面上, 离扰动边界越远, 波动越不显著. 与一维声波类似, 仅考虑重力外波在 $x$ 方向的传播, 则描写一维重力外波的控制方程组为 [18]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial \phi'}{\partial t} + c_g^2 \frac{\partial u}{\partial x} = 0,
\end{aligned} \tag{35}$$

式中的 $c_g$ 表示重力外波波速, $\phi'$ 表示由重力外波运动引起的位势变化, $u$ 表示空气质点速度. 引入一个特殊函数 $\varPhi$, 定义如下:

$$\varPhi_x = u,\ \ \varPhi_t = -\phi'. \tag{36}$$

类似地, 也可以引入另外一个特殊函数 $\varPi$, 定义如下:

$$\varPi_x = \phi',\ \ \varPi_t = -c_g^2 u. \tag{37}$$

如果采用 (36) 式, 则方程组 (35) 中的第一式自动满足, 本部分的目标是建立一个广义变分原理公式, 且要求它的 Euler-Lagrange 方程满足一维重力外波方程组 (35) 的第二式及方程组 (36) 式. 为了避免拉格朗日乘子法引起的临界变分现象, 这里采用何吉欢提出的半反推方法 [9−15] 来构造下面形式的广义变分公式:

$$J(u,\phi',\varPhi) = \iint L_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{38}$$

式中的 $L_2$ 是试拉格朗日函数, 由下面的公式定义:

$$L_2 = \phi'\varPhi_t + c_g^2 u \varPhi_x + F_2(\phi', u), \tag{39}$$

式中的 $F_2$ 是一个与 $\varPhi$ 无关, 只与 $u$ 和 $\phi'$ 及它们的导数有关的待定函数, 一般存在各种选择来构造试拉格朗日函数, 有关例子可以在文献 [9—15] 中找到. (39) 式表示的试拉格朗日函数的优点是其关于 $\varPhi$ 的驻值条件

$$\frac{\partial L_2}{\partial \varPhi} - \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial L_2}{\partial \varPhi_t}\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial L_2}{\partial \varPhi_x}\Big) = 0, \tag{40}$$

可以导出方程组 (35) 中的第二式. 现在分别考虑 $L_2$ 关于 $\phi'$ 和 $u$ 的驻值条件, 分别得到

$$\varPhi_t + \frac{\delta F_2}{\delta \phi'} = 0, \tag{41}$$

$$c_{\mathrm{g}}^2\varPhi_x+\frac{\delta F_2}{\delta u}=0, \tag{42}$$

其中 $\dfrac{\delta F_2}{\delta u}$ 和 $\dfrac{\delta F_2}{\delta \phi'}$ 分别称为 $F_2$ 关于 $u$ 和 $\phi'$ 的何氏变分导数, 与第三部分中的定义相同. 我们构造待定函数 $F_2$ 的目的是使方程 (41) 和 (42) 式将转化为 (36) 式中的两个场方程. 因此, 将 (36) 式分别代入 (41) 式和 (42) 式中, 则得到

$$\frac{\delta F_2}{\delta \phi'}=\phi', \tag{43}$$

$$\frac{\delta F_2}{\delta u}=-c_{\mathrm{g}}^2u. \tag{44}$$

因为 $\delta F_2=\dfrac{\delta F_2}{\delta\phi'}\delta\phi'+\dfrac{\delta F_2}{\delta u}\delta u$, 所以从上面的两个等式可以构造出下面形式的待定函数 $F_2$：

$$F_2=(\phi'^2-c_{\mathrm{g}}^2u^2)/2. \tag{45}$$

将 (45) 式代入 (39) 式, 然后将 (39) 式代入 (38) 式, 则得到描述一维重力外波方程组的广义变分原理公式

$$J(u,\phi',\varPhi)=\iint[\phi'\varPhi_t+c_0^2u\varPhi_x+(\phi'^2-c_g^2u^2)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{46}$$

下面验证获得的一维重力外波方程组广义变分原理 (46) 式的正确性, 分别求泛函方程 (46) 关于 $\varPhi$, $u$ 和 $\phi'$ 的驻值条件, 则得到下面的 Euler-Lagrange 方程组：

$$\begin{aligned}&\delta\varPhi:\ -\phi'_t-(c_{\mathrm{g}}^2u)_x=0,\\&\delta u:\ c_0^2\varPhi_x-c_{\mathrm{g}}^2u=0,\\&\delta\phi':\ \varPhi_t+\phi'=0.\end{aligned} \tag{47}$$

易知, 方程组 (47) 式与 (36) 式和 (35) 式中第二个等式是等价的. 从而证明所获得的大气一维重力外波方程组的广义变分原理公式 (46) 是正确的.

如果引入的是 (37) 式中的特殊函数 $\varPi$, 则得到大气一维重力外波方程组的另外一个广义变分原理公式

$$J(u,\phi',\varPi)=\iint[u\varPi_t+\phi'\varPi_x+(c_g^2u^2-\phi'^2)/2]\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{48}$$

分别求泛函方程 (48) 式关于 $\varPi$, $u$ 和 $\phi'$ 的驻值条件, 则得到下面形式的 Euler-Lagrange 方程组：

$$\begin{aligned}&\delta\varPi:\ -u_t-\phi'_x=0,\\&\delta u:\ \varPi_t+c_{\mathrm{g}}^2u=0,\\&\delta\phi':\ \varPi_x-\phi'=0.\end{aligned} \tag{49}$$

易知 (49) 式表示的 Euler-Lagrange 方程组与 (37) 式和 (35) 中第一个方程是等价的. 综上所述, 本部分利用何氏半反推法 [9–15] 得到了大气一维重力外波方程组的两个广义变分原理公式 (46) 和 (48), 并通过从泛函方程导出的 Euler-Lagrange 方程与原来方程之间的一致性, 证明了获得的两个广义变分原理的正确性.

## 5 结 论

半反推法是何吉欢为了寻求数学物理问题的变分原理而提出的, 可避免由拉氏乘子法引起的临界变分现象, 在众多领域已经有许多成功的应用 [9–15]. 本文应用半反推法分别获得了大气 Rossby 波、一维声波和一维重力外波等三类大气基本波动的广义变分原理, 并验证了它们的正确性. 利用获得的广义变分原理公式, 既可以在基于变分的有限元方法和其他变分方法中直接应用, 也可以研究大气波动的运动规律, 因此具有重要意义.


[1] Zhang L, Huang S X, Liu Y D, Zhong J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2889 (in chinese)[张亮, 黄思训, 刘宇迪, 钟剑 2010 物理学报 **59** 2889]

[2] Wang Y G, Cai Q F, Huang S X 2010 *Acta Phys.Sin.* **59** 4359(in Chinese) [王业桂, 蔡其发, 黄思训 2010 物理学报 **59** 4359]

[3] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 1063

[4] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 249

[5] Li G C, Mei F X 2006 *Chin. Phys.* **15** 2496

[6] Fu J L, Dai G D 2007 *Chin. Phys.* **16** 570

[7] Shi S Y, Fu J L, Chen L Q 2008 *Chin. Phys.* B **17** 385

[8] Huang S X, Zhao X F, Sheng Z 2009 *Chin. Phys.* B **18** 5084

[9] He J H 1997 *Int. J. Turbo. Jet-Eng.* **14** 23

[10] He J H 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 797

[11] He J H 2001 *Int. J. Nonlin. Sci. Numer.* **2** 309

[12] He J H 2005 *Phys. Lett.* A **335** 182

[13] He J H 2007 *Phys. Lett.* A **371** 39

[14] He J H 2008 *Int. J. Modern. Phys.* B **22** 3487

[15] He J H, Lee E W M 2009 *Phys. Lett.* A **373** 1644

[16] Lü M Z, Peng Y Q 1990 *Dynamical Meteorology* (Beijing: Meteorology Press) p25 (in Chinese) [吕美仲, 彭永清 1990 动力气

象 (北京: 气象出版社) 第 25 页]
[17] Huang S X, Wu R S 2001 *Methods of Mathematical Physics in Atmospheric Science* (Beijing: China Meteorologica Press) p154 [黄思训, 伍荣生 2001 大气科学中的数学物理问题 (北京: 气象出版社) 第 154 页]
[18] Li C Y, Liu S K, Chen J B 2005 *Introduction of Dynamical Meteorology* (Beijing: China Meteorologica Press) p45 [李崇银, 刘式适, 陈嘉滨 2005 动力气象学导论 (北京: 气象出版社) 第 45 页]

# Generalized variational principles for three kinds of atmospheric waves*

Song Jun-Qiang Cao Xiao-Qun† Zhu Xiao-Qian Zhang Wei-Min Zhao Jun

( *School of Computer Science, National University of Defense Technology, Changsha* 410073, *China* )

( Received 13 July 2011; revised manuscript received 14 August 2011, China )

**Abstract**

The semi-inverse method is proposed by He to establish generalized variational principles for mathematical and physical problems, in which the variational crisis brought by the Lagrange multiplier method can be eliminated. with He's semi-inverse method, a family of variational principles is constructed for Rossby wave, atmospheric acoustic wave and gravity wave respectively. The obtained variational principles have also proved correct.

**Keywords:** He's semi-inverse method, generalized variational principle, Rossby wave, atmospheric acoustic wave
**PACS:** 04.20.Fy, 92.10.hf, 43.28.+h, 47.35.Bb

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41105063, 61070041).

† E-mail: caoxiaoqun@nudt.edu.cn