修正的 Korteweg de Vries- 正弦 Gordon 方程的 Riemann θ 函数解*

王军民†

(河南财经政法大学数学与信息科学系, 郑州 450002)

(2011 年 8 月 13 日收到; 2011 年 8 月 25 日收到修改稿)

给出椭圆方程的一组 Riemann θ 函数解, 结合它的一个 Backlund 变换, 得到这个椭圆方程的无穷序列 Riemann θ 函数解. 最后利用这个椭圆方程作为辅助方程, 借助于符号计算软件 Mathematica, 得到了修正的 Korteweg de Vries- 正弦 Gordon 方程的无穷序列 Riemann θ 函数解.

关键词: 修正的 Korteweg de Vries- 正弦 Gordon 方程，Backlund 变换，Riemann θ 函数解

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

1 引 言

在物理学领域, 很多物理现象的数学分析都归结为一个特殊的数学模型, 这个模型往往就是一个非线性发展方程, 因此非线性发展方程有着非常重要的作用. 对于非线性发展方程精确解的研究吸引了众多数学和物理学研究者, 并形成了一个重要的研究课题, 即非线性数学物理模型的波动研究. 该课题研究不仅极大地提高了人们对所研究物理现象的认识, 而且也促进了数学方法的发展. 目前, 在非线性发展方程的精确解求解问题上, 已经形成了很多成熟有效的数学方法, 比如反散射方法 [1,2]、Lax 对非线性化方法 [3,4]、齐次平衡法 [5]、双曲函数展开法 [6]、辅助方程法 [7,8] 及其各种推广形式 [9−14]. 利用这些方法, 可以求得非线性发展方程的三角函数解、椭圆函数解、双曲函数解和有理函数解等. 近年来, 有许多学者致力于计算非线性发展方程的 Riemann θ 函数解, 并形成了几种比较成熟的方法, 比如代数曲线方法 [15]、双线性方法 [16−20] 等. 正弦 Gordon 型方程是在非线性光学、等离子体物理学和超导物理等领域中出现的一个数学模型, 它受到众多研究人员的关注, 并得到了诸多研究成果. 修正的 Korteweg de Vries (mKdV)- 正弦 Gordon 方程就是其中的一个数学模型, 它的形式为

$$u_{xt}+\frac{3}{2}u_x^2u_{xx}+u_{xxxx}=\sin u, \tag{1}$$

其中,

$$u_{xt}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\partial t},$$

$u=u(x,t)$ 为波函数. 有很多学者对这个数学模型进行了研究, 例如文献 [21] 基于三角函数辅助方程, 构造了方程 (1) 的有限多个精确解, 文献 [22] 利用三角函数辅助方程和双曲函数辅助方程给出了它的无穷序列精确解.

本文研究如下形式的 mKdV- 正弦 Gordon 方程:

$$u_{xt}+A\left(\frac{3}{2}u_x^2u_{xx}+u_{xxxx}\right)=B\sin u. \tag{2}$$

这里 A 和 B 为实常数. 易见, 方程 (2) 包含以下三种形式: 当 $A=0$, $B=1$ 时, 为正弦 Gordon 方程; 当 $A=1$, $B=0$, $u_x=2v$ 时, 为 mKdV 方程; 当 $A=1$, $B=1$ 时, 为方程 (1).

我们首先给出一个椭圆方程的一组 Riemann θ 函数解, 并构造它的一个 Backlund 变换, 然后得到这个椭圆方程的无穷序列 Riemann θ 函数解, 最

* 河南省自然科学基金 (批准号: 2010A110001) 和河南省基础与前沿研究计划 (批准号: 112300410199) 资助的课题.

† E-mail: wjm1261@sohu.com

后利用这个椭圆方程作为辅助方程, 借助于符号计算软件 Mathematica 得到了数学模型 mKdV- 正弦 Gordon 方程的无穷序列 Riemann θ 函数解.

2 椭圆方程及其 Backlund 变换

在辅助方程求非线性发展方程精确解过程中, 椭圆方程是一种重要的辅助方程, 它起着重要的作用. 一般的椭圆方程形式为

$$\varphi'(\xi)=\sigma\sqrt{\sum_{i=0}^{n}h_i\varphi^i(\xi)},\tag{3}$$

其中, h_i 为常数, $\sigma^2=1$. 在特殊情况下, 方程 (3) 有很多形式的解, 如有理函数解、三角函数解、双曲函数解和椭圆函数解等. 下面给出它的一组 Riemann θ 函数解, 并利用它的一个 Backlund 变换, 构造出它的无穷序列 Riemann θ 函数解.

一般的 Riemann θ 函数定义 [23] 为

$$\begin{aligned}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{bmatrix}(z;\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\Big[&\pi\mathrm{i}\tau\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)^2\\ &+2\Big(n+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(z+\frac{\varepsilon^*}{2}\Big)\Big],\end{aligned}\tag{4}$$

其中, $\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon^*\end{bmatrix}$ 为二维向量, n 为整数. 它在热传导和 Fourier 环等物理研究中有重要的应用.

定理1 若 $n=4, \sigma=1, h_1=h_3=0$, 则椭圆方程 (3) 变为

$$[\varphi'(\xi)]^2=h_0+h_2\varphi^2(\xi)+h_4\varphi^4(\xi).\tag{5}$$

它有如下形式的 Riemann θ 函数解: 当

$$h_4=-h_0=-\vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(0),$$
$$h_2=\vartheta_2^4(0)-\vartheta_4^4(0)$$

时, 就有

$$\varphi_{13}(\xi)=\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_3(\xi)}.$$

当

$$h_4=h_0=\vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(0),$$
$$h_2=-(\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0))$$

时, 就有

$$\varphi_{14}(\xi)=\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_4(\xi)}.$$

当

$$h_4=h_0=\vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(0),$$
$$h_2=\vartheta_3^4(0)+\vartheta_4^4(0)$$

时, 就有

$$\varphi_{12}(\xi)=\frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_2(\xi)}.$$

当

$$h_4=h_0=-\vartheta_2^2(0)\vartheta_3^2(0),$$
$$h_2=\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0)$$

时, 就有

$$\varphi_{23}(\xi)=\frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_3(\xi)}.$$

当

$$h_4=-h_0=\vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(0),$$
$$h_2=\vartheta_4^4(0)-\vartheta_2^4(0)$$

时, 就有

$$\varphi_{24}(\xi)=\frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_4(\xi)}.$$

当

$$h_4=h_0=\vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(0),$$
$$h_2=-(\vartheta_3^4(0)+\vartheta_4^4(0))$$

时, 就有

$$\varphi_{34}(\xi)=\frac{\vartheta_3(\xi)}{\vartheta_4(\xi)}.$$

这里,

$$\vartheta_1(z)=\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(z;\tau),$$
$$\vartheta_2(z)=\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(z;\tau),$$
$$\vartheta_3(z)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(z;\tau),$$
$$\vartheta_4(z)=\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(z;\tau).$$

定理2 椭圆方程 (5) 具有下列形式的 Backlund 变换:

$$(\overline{\varphi}(\xi))^2=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2(\xi)},\tag{6}$$

其中

$$\Delta=h_2^2-4h_0h_4.$$

若 $\varphi(\xi)$ 是椭圆方程 (5) 的一个解, 那么 $\overline{\varphi}(\xi)$ 是它的一个新解.

根据以上两个定理, 我们可以得到椭圆方程 (5) 的无穷序列 Riemann θ 函数解, 表示如下:

$$\begin{aligned}\varphi_{13,0}(\xi) &=\varphi_{13}(\xi) = \frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_3(\xi)},\\ (\varphi^2_{13,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{13,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{13,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{7}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= -h_0 = -\vartheta_4^2(0)\vartheta_2^2(0),\\ h_2 &= \vartheta_2^4(0)-\vartheta_4^4(0),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{14,0}(\xi) &=\varphi_{14}(\xi) = \frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_4(\xi)},\\ (\varphi^2_{14,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{14,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{14,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{8}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= h_0 = \vartheta_3^2(0)\vartheta_2^2(0),\\ h_2 &= -(\vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0)),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{12,0}(\xi) &=\varphi_{12}(\xi) = \frac{\vartheta_1(\xi)}{\vartheta_2(\xi)},\\ (\varphi^2_{12,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{12,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{12,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{9}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= h_0 = \vartheta_4^2(0)\vartheta_3^2(0),\\ h_2 &= \vartheta_3^4(0)+\vartheta_4^4(0),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{23,0}(\xi) &=\varphi_{23}(\xi) = \frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_3(\xi)},\\ (\varphi^2_{23,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{23,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{23,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{10}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= h_0 = -\vartheta_2^2(0)\vartheta_3^2(0),\\ h_2 &= \vartheta_2^4(0)+\vartheta_3^4(0),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{24,0}(\xi) &=\varphi_{24}(\xi) = \frac{\vartheta_2(\xi)}{\vartheta_4(\xi)},\\ (\varphi^2_{24,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{24,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{24,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= -h_0 = \vartheta_2^2(0)\vartheta_4^2(0),\\ h_2 &= \vartheta_4^4(0)-\vartheta_2^4(0),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_{34,0}(\xi) &=\varphi_{34}(\xi) = \frac{\vartheta_3(\xi)}{\vartheta_4(\xi)},\\ (\varphi^2_{34,n+1}(\xi))^2 &=\frac{2h_0+(h_2+\sqrt{\Delta})\varphi^2_{34,n}(\xi)}{h_2+\sqrt{\Delta}+2h_4\varphi^2_{34,n}(\xi)},\end{aligned}\tag{12}$$

其中,

$$\begin{aligned}h_4 &= h_0 = \vartheta_3^2(0)\vartheta_4^2(0),\\ h_2 &= -(\vartheta_3^4(0)+\vartheta_4^4(0)),\\ \Delta &= h_2^2-4h_0h_4.\end{aligned}$$

3 mKdV- 正弦 Gordon 方程的无穷序列 Riemann θ 函数解

我们将椭圆方程 (5) 作为辅助方程, 利用它的无穷序列 Riemann θ 函数解, 并借助于符号计算软件 Mathematica, 求出 mKdV- 正弦 Gordon 方程 (2) 的无穷序列 Riemann θ 函数解. 为此, 考虑变换

$$u = 2\mathrm{arctan}V(\xi),\tag{13}$$

其中 $\xi = x+ct$. 将变换 (13) 式代入到 mKdV– 正弦 Gordon 方程 (2) 中, 得到

$$\begin{aligned}&6cV''V^4+6AV^{(4)}V^2-4cV'^2V^5\\ &-48AV'^4V^3\\ &-8cV'^2V^3-12AV''^2V^5\\ &+24AV'^4V+2cV''V^6\\ &-2BV^7-12AV'^2V''+6AV^{(4)}V^4\\ &+2AV^{(4)}-6BV^5-6BV^3\\ &-32AV'''V^3V'-16AV'''V^5V'\\ &+72AV''V^4V'^2+60AV''V^2V'^2\\ &-16AV'''VV'-4cV'^2V\\ &-24AV''^2V^3+6cV''V^2+2AV^{(4)}V^6\\ &-12AV''^2V+2cV''-2BV=0.\end{aligned}\tag{14}$$

根据齐次平衡原则, 假设方程 (14) 具有形式解

$$V = b_0+b_1\varphi(\xi),\tag{15}$$

其中 b_0, b_1 是任意常数. 将 (15) 式代入方程 (14), 并利用椭圆方程 (5), 可以得到一个关于 $\varphi^i(\xi)\varphi^j(\xi)$ 的代数方程, 令其系数为零, 就可得到一个关于 b_0, b_1

和 h_0, h_2, h_4 的代数方程组. 设 b_0, b_1, c 为待求变量, 借助于符号计算软件 Mathematica, 最后得到一组解

$$\begin{aligned} & b_0 = 0, \\ & b_1 = \pm\frac{1}{2}\frac{\sqrt{-2h_0(h_2 \pm \sqrt{h_2^2 - 4h_0h_4})}}{h_0}, \\ & c = \frac{\mp Ah_2\sqrt{\Delta} + B - 2Ah_2^2}{2h_2 \pm \sqrt{\Delta}}, \end{aligned} \tag{16}$$

其中, $\Delta = h_2^2 - 4h_0h_4$, h_0, h_2, h_4 为任意常数.

综合变换 (13) 式和解 (15) 式, 以及椭圆方程 (5) 的无穷序列 Riemann θ 函数解 (7)—(12) 式, 可以得到 mKdV- 正弦 Gordon 方程 (2) 的无穷序列 Riemann θ 函数解, 表示如下 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$:

$$\begin{aligned} u_{13,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{13,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{17}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{13,n}(\xi)$ 则由 (7) 式确定.

$$\begin{aligned} u_{14,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{14,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{18}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{14,n}(\xi)$ 则由 (8) 式确定.

$$\begin{aligned} u_{12,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{12,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{19}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{12,n}(\xi)$ 则由 (9) 式确定.

$$\begin{aligned} u_{23,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{23,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{20}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{23,n}(\xi)$ 则由 (10) 式确定.

$$\begin{aligned} u_{24,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{24,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{21}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{24,n}(\xi)$ 则由 (11) 式确定.

$$\begin{aligned} u_{34,n}(x,t) &= \arctan b_1\varphi_{34,n}(\xi), \\ \xi &= x - ct, \end{aligned} \tag{22}$$

其中, b_1, c 由 (16) 式确定, 而 $\varphi_{34,n}(\xi)$ 则由 (12) 式确定.

4 结 论

Rieman θ 函数在数学物理方面有着广泛的应用, 寻找非线性发展方程的 Rieman θ 函数解有着重要的意义. 本文首先利用椭圆方程的一组 Rieman θ 函数解及其 Backlund 变换, 构造了它的无穷序列 Rieman θ 函数解, 并将这个椭圆方程作为辅助方程, 借助于符号计算软件 Mathematica, 研究了有重要物理意义的 mKdV- 正弦 Gordon 方程, 最终得到了它的无穷序列 Rieman θ 函数解. 这些解将有助于物理工作者解释一些重要的物理现象. 本文构造非线性发展方程的 Rieman θ 函数解的方法简单实用, 可以很方便地用于构造其他数理模型的 Rieman θ 函数解.

[1] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1967 *Phys. Rev. Lett.* **19** 1095

[2] Gardner C S, Greene J M, Kruskal M D, Miura R M 1974 *Commun. Pure Appl. Math.* **27** 97

[3] Cao C W, Wu Y T, Geng X G 1999 *J. Math. Phys.* **40** 3948

[4] Cao C W, Geng X G, Wu Y T 1999 *J. Phys.* A **32** 8059

[5] Wang M L 1995 *Phys. Lett.* A **199** 169

[6] Parkes E J, Duffy B R 1996 *Comput. Phys. Commun.* **98** 288

[7] Fan E G 2000 *Phys. Lett.* A **277** 212

[8] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵, 张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]

[9] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]

[10] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) [石玉仁, 吕克璞, 段文山, 洪学仁, 赵金宝 2003 物理学报 **52** 267]

[11] Liu S K, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068 (in Chinese) [刘式适, 傅遵涛, 刘式达, 赵强 2001 物理学报 **50** 2068]

[12] Zhao S L, Zhang D J, Ji J 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 020201

[13] Wang J M 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 030202

[14] Wang J M, Yang X 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 090202

[15] Wang J M, Ji J 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1407

[16] Geng X G, Cao C W 2001 *Nonlinearity* **14** 1433

[17] Nakamura A 1979 *J. Phys. Soc. Jpn.* **47** 1701

[18] Nakamura A 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **48** 1365

[19] Fan E G, Hon Y C 2008 *Phys. Rev.* E **78** 036607

[20] Ma W X, Zhou R G, Gao L 2009 *Mod. Phys. Lett.* A **21** 1677

[21] Zhao H 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 1013

[22] Taogetusang 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070203 (in Chinese) [套格

图桑 2011 物理学报 **60** 070203]
[23] Lawden D F 1989 *Elliptic Functions and Applications* (Berlin: Springer-Verlag) p496

Riemann θ function solutions to modified Korteweg de Vries-sine-Gordon equation*

Wang Jun-Min†

(*Department of Mathematics and Information Science, Henan University of Finance and Law, Zhengzhou* 450002*, China*)

(Received 13 August 2011; revised manuscript received 25 August 2011)

Abstract

Based on some Riemnan theta function solutions to a elliptical equation, together with its Backlund transformation, infinite sequences Riemann θ function solutions are derived, then regarding this elliptical equation as an auxiliary equation, with the help of computer software (Mathematica), infinite sequences Riemann θ function solutions to the modified Korteweg de Vries sine-Gordon equation are obtained.

Keywords: modified Korteweg de Vries-sine-Gordon equation, Backlund transformation, Riemann θ function solutions

PACS: 02.30.Ik, 02.30.Jr

* Project supported by the Natural Science Foundation of Henan Province, China (Grant No. 2010A110001) and the Basic and Advanced Research Program of Henan Province, China (Grant No. 112300410199).

† E-mail: wjm1261@sohu.com