

带有扰动非线性源的多孔介质方程的 近似泛函分离变量*

吉飞宇 张顺利†

(西北大学数学系, 西安 710069)

(2011 年 7 月 18 日收到; 2011 年 12 月 21 日收到修改稿)

讨论了带有扰动非线性源的多孔介质方程的近似泛函分离变量问题, 给出了该类方程容许近似泛函分离变量解的完全分类. 举例阐述了近似泛函分离变量解的求解步骤, 获得了分类方程的近似泛函分离变量解.

关键词: 多孔介质方程, 近似广义条件对称, 近似泛函分离变量法

PACS: 02.30.Jr, 02.20.Sv, 02.30.Ik

1 引言

分离变量法在偏微分方程的约化和求解等方面起着重要作用, 它是研究线性方程常用的有效手段之一. 几十年来, 关于非线性偏微分方程的研究, 也出现了若干分离变量法, 其中包括微分 Stäckel 矩阵法、几何方法、形式分离变量法、多线性分离变量法、泛函分离变量法和导数相关泛函分离变量法等. 这些方法的广泛运用^[1-12], 丰富和拓展了非线性数学物理方法.

另一方面, 许多来自物理学、力学和大气动力学等学科中依赖于小参数的非线性方程 (或称为扰动方程) 引起人们的关注. Baikov 等^[13]在这一方向率先研究了扰动方程的近似 Lie 点对称、近似 Bäcklund 变换和近似守恒律等. 此后, 对扰动系统的研究变得日益活跃. 目前, 研究扰动方程已有不少方法, 如近似 Lie 对称方法、近似条件对称方法、近似势对称方法、近似广义条件对称方法、同伦映射法和扰动方程初值问题的对称约化法等^[14-22].

然而, 至今尚未见到对扰动方程的泛函分离变量问题的研究. 本文提出近似泛函分离变量法理论,

然后应用于带有扰动非线性源的多孔介质方程

$$u_t = (A(u)u_x^n)_x + \epsilon F(u) \quad (n \neq 1).$$

给出该类方程容许近似泛函分离变量解的完全分类, 求出分类方程的近似泛函分离变量解.

2 近似对称理论和近似泛函分离变量

设 $[E]$ 是一个带有小参数 ϵ 的 k 阶微分系统, 参数 ϵ 扰动到一阶项, 即

$$\begin{aligned} & E^\beta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}; \epsilon) \\ & \equiv E_0^\beta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \\ & + \epsilon E_1^\beta(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}) \\ & = 0 \quad (\beta = 1, 2, \dots, q), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$, $E_i^\beta (i = 0, 1)$ 是相关变量的光滑函数, $u_{(i)} (i = 1, \dots, k)$ 表示所有 i 阶偏导数. 关于 x^i 的全导数算子表示为

$$\begin{aligned} D_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} + u_i^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \\ &+ u_{ij}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha} + \dots \quad (i = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10671156) 和陕西省自然科学基金 (批准号: SJ08A05) 资助的课题.

† E-mail: zhangshunli@nwu.edu.cn

定义 1 如果

$$\chi^{[k]}(E^\beta)|_{[W] \cap [E]} = O(\epsilon^2), \quad (2)$$

则算子

$$\begin{aligned} \chi = & \sum_{i=1}^n \xi^i(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}; \epsilon) \frac{\partial}{\partial x^i} \\ & + \sum_{\alpha=1}^m \eta^\alpha(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)}; \epsilon) \frac{\partial}{\partial u^\alpha} \end{aligned} \quad (3)$$

称为系统 (1) 的一阶近似广义条件对称. 这里

$$\begin{aligned} \chi &= X_0 + \epsilon X_1, \\ \chi^{[k]} &= X_0^{[k]} + \epsilon X_1^{[k]}, \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $X_b (b=0, 1)$ 为广义条件对称,

$$\begin{aligned} X_b &= \xi_b^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta_b^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \\ X_b^{[k]} &= X_b + \zeta_{b,i}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_i^\alpha} + \zeta_{b,i_1 i_2}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2}^\alpha} \\ &\quad + \dots + \zeta_{b,i_1 i_2 \dots i_k}^\alpha \frac{\partial}{\partial u_{i_1 i_2 \dots i_k}^\alpha}. \end{aligned} \quad (5)$$

这里 ξ_b^i 和 η_b^α 均为 $(x, u, u_{(1)}, \dots, u_{(k)})$ 的函数, 且

$$\begin{aligned} \zeta_{b,i_1 i_2 \dots i_s}^\alpha &= D_{i_1} D_{i_2} \dots D_{i_s} (W_b^\alpha) \\ &\quad + \xi_b^j u_{j i_1 i_2 \dots i_s}^\alpha \quad (s=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 W_b^α 称为特征标, 定义为

$$W_b^\alpha = \eta_b^\alpha - \xi_b^j u_j^\alpha \quad (\alpha=1, 2, \dots, m). \quad (7)$$

此外, 在 (2) 式中, $[W]$ 表示不变曲面条件及其各阶导数, 即

$$\begin{aligned} W_0^\alpha + \epsilon W_1^\alpha &= (\eta_0^\alpha - \xi_0^i u_i^\alpha) + \epsilon(\eta_1^\alpha - \xi_1^i u_i^\alpha) \\ &= O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\partial_{i_1} \dots \partial_{i_s} (W_0^\alpha + \epsilon W_1^\alpha) = O(\epsilon^2), \quad (9)$$

其中 $\partial_{i_s} = \partial/\partial x^{i_s} (i_s=1, 2, \dots, n)$. $[E]$ 是扰动系统 (1) 的解流形.

假设系统 (1) 容许一阶近似广义条件对称 χ , 解 u 满足 $[W] \cap [E]$, 则在由 χ 产生的单参数子群下,

$$u \approx U_0^\alpha + \epsilon U_1^\alpha \quad (10)$$

是系统 (1) 的一个近似不变解. 通过联立求解不变曲面条件 (8), (9) 式和系统 (1) 便可确定近似解.

特别地, 对于扰动的 $(1+1)$ 维非线性演化方程, 有定义 2.

定义 2 对于演化向量场

$$V = \eta \frac{\partial}{\partial u} \equiv \eta(x, t, u; \epsilon) \frac{\partial}{\partial u} \quad (11)$$

和扰动非线性演化方程

$$u_t = K(x, t, u; \epsilon), \quad (12)$$

如果

$$V^{(k)}(u_t - K(x, t, u; \epsilon))|_{[W] \cap [E]} = O(\epsilon^2), \quad (13)$$

则称 (11) 式为方程 (12) 的一阶近似广义条件对称. 这里 $V^{(k)}$ 表示 (11) 式的 k 阶延长结构, K 和 η 是 $x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots$ 的可微函数, $[W]$ 是 $\eta = O(\epsilon^2)$ 及其关于 x 的所有全导数集合, 即 $D_x^i \eta = O(\epsilon^2) (i=0, 1, 2, \dots)$.

命题 1 如果存在一个函数 $S = S(x, t, u, \eta)$, 使得

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + [K, \eta] = S(x, t, u, \eta) + O(\epsilon^2), \quad (14)$$

$$S(x, t, u, O(\epsilon^2)) = O(\epsilon^2),$$

则方程 (12) 容许一阶近似广义条件对称 (11) 式. 这里 $[K, \eta] = \eta' K - K' \eta$, 其中 $\eta' K, K' \eta$ 分别表示沿 K, η 方向的 Fréchet 导数; $S(x, t, u, \eta)$ 是 $x, t, u, u_1, \dots, \eta, D_x \eta, D_x^2 \eta, \dots$ 的解析函数.

从 (14) 式可以导出, 当且仅当

$$D_t \eta|_{[W] \cap [E]} = O(\epsilon^2), \quad (15)$$

方程 (12) 容许近似广义条件对称 (11) 式.

定义 3 如果存在函数 f, g, ψ, ϕ, ω 和 θ 满足

$$\begin{aligned} f(u) + \epsilon g(u) &= \psi(x) + \phi(t) \\ &\quad + \epsilon(\omega(x) + \theta(t)) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (16)$$

则称 $u = u(x, t; \epsilon)$ 为方程 (12) 的近似泛函分离变量解.

为了表述简洁, 此处暂记 $f \equiv f(u), g \equiv g(u)$. 假定 $|\epsilon f'/g'| < 1$, 对 (16) 式两端关于 x, t 进行微分, 且同除以 $g' + \epsilon f'$, 然后按 ϵ 的幂级数展开, 可得

$$u_{xt} + \left[(\ln(f'))' + \epsilon \left(\frac{g'}{f'} \right)' \right] u_x u_t = O(\epsilon^2), \quad (17)$$

其中函数的上标撇号表示对 u 求导数. 于是, 我们有下面的结论.

定理 1 当且仅当容许近似广义条件对称

$$\begin{aligned} V &= \eta \frac{\partial}{\partial u} \\ &\equiv (u_{xt} + (p(u) + \epsilon q(u)) u_x u_t) \frac{\partial}{\partial u}, \end{aligned} \quad (18)$$

方程 (12) 有形如 (16) 式的近似泛函分离变量

解.这里

$$\begin{aligned} p(u) &= (\ln(f'))', \\ q(u) &= \left(\frac{g'}{f'}\right)'. \end{aligned} \quad (19)$$

为了具体说明近似泛函分离变量法, 以下主要讨论带有扰动非线性源的 (1+1) 维多孔介质方程

$$u_t = (A(u)u_x^n)_x + \epsilon F(u) \quad (n \neq 1), \quad (20)$$

其中 $A(u)$ 和 $F(u)$ 都是 u 的非零待定函数, ϵ 是小参数. 首先, 对方程 (20) 容许近似广义条件对称

$$\eta = u_{xt} + (p(u) + \epsilon q(u))u_x u_t \quad (21)$$

进行完全分类; 其次, 通过例子给出构造分类定理中所列方程的近似泛函分离变量解的主要步骤.

现在利用文献 [17] 中提出的近似广义条件对称算法, 结合一阶近似广义条件对称 (21) 式, 对方程 (20) 进行完全分类. 由近似广义条件对称条件 (15) 式, 通过直接计算可知, 当且仅当

$$\begin{aligned} D_t \eta|_{[W] \cap [E]} &= \epsilon [\Omega_0 u_x^{3n-1} u_{xx}^2 \\ &\quad + (\Omega_1 u_x^{3n+1} + \Omega_2 u_x^{2n}) u_{xx} \\ &\quad + \Omega_3 u_x^{3n+3} + \Omega_4 u_x^{2n+2}] \\ &\quad + A_0 u_x^{3n-1} u_{xx}^2 + A_1 u_x^{3n+1} u_{xx} \\ &\quad + A_2 u_x^{3n+3} \\ &= O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (22)$$

可得方程 (20) 容许一阶近似广义条件对称 (21) 式. 这里 $\Omega_i \equiv \Omega_i(u)$, $A_j \equiv A_j(u)$ ($i = 0, 1, \dots, 4; j = 0, 1, 2$) 由函数 $A(u)$, $F(u)$, $p(u)$, $q(u)$ 及其关于 u 的导数构成. (22) 式可分解为下述超定方程组:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -n(2n+1)qA^2A' - 2n^3(q' - 2pq)A^3 \\ &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= -nqA^2A'' - (3n+1)qA(A')^2 \\ &\quad - 2n(2nq' + (1-4n)pq)A^2A' \\ &\quad - n^2(q'' - 2(pq' + p'q))A^3 \\ &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= (2n+1)F(AA'' - (A')^2) \\ &\quad - (nF' + (3n+1)pF)AA' \\ &\quad + n[F'' + npF' + ((1-2n)p' \\ &\quad + (3n-1)p^2)F] \\ &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \Omega_3 &= -qAA'A'' - q(A')^3 \\ &\quad - 2(nq' + (1-2n)pq)A(A')^2 \\ &\quad + (2(pq' + p'q) - q'')A^2A' \\ &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Omega_4 &= FAA''' - (pA + A')FA'' - (F' + 2pF)(A')^2 \\ &\quad + (2pp' - p'')FA^2 \\ &\quad + [F'' + npF' + ((1-2n)p' \\ &\quad + (3n-2)p^2)F]AA' \\ &= O(\epsilon), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} A_0 &= n(2n+1)A(AA'' - (A')^2 - pAA') \\ &\quad + 2n^3(p^2 - p')A^3 \\ &= O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= nA^2A''' + ((n+1)A' - npA)AA'' \\ &\quad - ((2n+1)A' + (3n+1)pA)(A')^2 \\ &\quad + (4n(p^2 - p') - p^2)A^2A' + n^2(2pp' - p'')A^3 \\ &= O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= AA'A''' - (pA + A')A'A'' \\ &\quad - [pA' - (2n(p^2 - p') - p^2)A](A')^2 \\ &\quad + n(2pp' - p'')A^2A' \\ &= O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (30)$$

其中上标撇号表示对 u 的相应阶导数.

通过求解关于未知函数 $A(u)$, $F(u)$, $p(u)$ 和 $q(u)$ 的超定方程组 (23)—(30), 最终可获得方程 (20) 容许近似广义条件对称 (21) 式, 即具有形如 (16) 式的近似泛函分离变量解的完全分类.

定理 2 设 $A(u)F(u) \neq 0$, 若扰动方程

$$u_t = (A(u)u_x^n)_x + \epsilon F(u) \quad (n \neq 1) \quad (31)$$

等价于下面五种情形之一中的方程, 则具有形如 (16) 式的近似泛函分离变量解.

情形 1

$$\begin{aligned} u_t &= c_1 u^{-\frac{6n^2}{4n+1}} u_x^{n-1} u_{xx} \\ &\quad - c_1 \frac{6n}{4n+1} u^{-\frac{6n^2}{4n+1}-1} u_x^{n+1} \\ &\quad + \epsilon (c_2 u + c_3 u^{-\frac{n(2n-1)}{4n+1}}), \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \eta &= u_{xt} + (-u^{-1} + \epsilon c_4 u^{-\frac{2n-1}{4n+1}}) u_x u_t \\ &= O(\epsilon^2) \quad (c_4 \neq 0). \end{aligned} \quad (33)$$

情形 2

$$u_t = c_1 n u^\alpha u_x^{n-1} u_{xx} + c_1 \alpha u^{\alpha-1} u_x^{n+1}$$

$$+\epsilon(c_2u + c_3u^{\alpha+n}) \\ \left(\alpha \neq -\frac{6n}{4n+1}, 0\right), \quad (34)$$

$$\eta = u_{xt} - u^{-1}u_xu_t \\ = O(\epsilon^2). \quad (35)$$

情形 3

$$u_t = c_1nu_x^{n-1}u_{xx} + \epsilon(c_2u + c_3u^n), \quad (36)$$

$$\eta = u_{xt} + (-u^{-1} + \epsilon c_4u^{-2})u_xu_t \\ = O(\epsilon^2). \quad (37)$$

情形 4

$$u_t = c_1nu_x^{n-1}u_{xx} + \epsilon(c_2u + c_3), \quad (38)$$

$$\eta = u_{xt} + \epsilon c_4u_xu_t \\ = O(\epsilon^2) \quad (c_4 \neq 0). \quad (39)$$

情形 5

$$u_t = (A(u)u_x^n)_x + \epsilon F(u), \quad (40)$$

$$\eta = u_{xt} + p(u)u_xu_t \\ = O(\epsilon^2). \quad (41)$$

$A(u)$, $F(u)$ 和 $p(u)$ 满足

$$p' - p^2 + c_1A = 0, \quad (42)$$

$$(2n+1)(AA'' - (A' + pA)A') \\ - 2n^2(p' - p^2)A^2 \\ = 0, \quad (43)$$

$$AF'' + (npA - A')F' \\ + (p'A + nAp^2 - Ap^2 - pA')F \\ = 0. \quad (44)$$

这里 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为任意常数, $c_1(|c_2| + |c_3|) \neq 0$.

3 近似泛函分离变量解

通过以下步骤可以建立定理 2 中所列方程的近似泛函分离变量解: 首先, 从定理 2 情形之一中 η 的表示式 (即一阶近似广义条件对称) 与 (21) 式相比较可得 $p(u)$ 和 $q(u)$ 的值, 代入 (19) 式可确定 $f(u)$ 和 $g(u)$ 的表达式; 其次, 把 $u = u_0 + \epsilon u_1$ 代入定理 2 该情形相应方程和对应的 (16) 式, 均展开为 ϵ 的幂级数, 保留 ϵ 的一阶近似, 得到一个确定方程组, 借助分离变量法可得含有未知函数 $\psi(x)$, $\phi(t)$, $\omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 的常微分方程组, 以确定函数 $\psi(x)$, $\phi(t)$, $\omega(x)$ 和 $\theta(t)$; 最后, 将上述结果代

入 (16) 式并求解 u , 可获得原方程的近似泛函分离变量解的显式表示.

下面举例说明求解步骤.

算例 1 方程 (36) 的近似泛函分离变量解.

首先, 直接从近似广义条件对称 (37) 式看出

$$p(u) = -u^{-1}, \quad (45) \\ q(u) = c_4u^{-2}.$$

把 (45) 式代入 (19) 式, 解得

$$f(u) = s_2 \ln(u) + s_1, \quad (46) \\ g(u) = s_3 \ln(u) + c_4s_2u^{-1} + s_4,$$

其中 $s_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 为任意常数, 且 $s_2s_3 \neq 0$. 再把 (46) 式代入 (16) 式, 得

$$s_2 \ln(u) + s_1 + \epsilon(s_3 \ln(u) + c_4s_2u^{-1} + s_4) \\ = \psi(x) + \phi(t) + \epsilon(\omega(x) + \theta(t)) + O(\epsilon^2). \quad (47)$$

其次, 把 $u = u_0 + \epsilon u_1$ 代入方程 (36) 和 (47) 式, 并展开成 ϵ 的幂级数, 比较等式两端 ϵ^0 和 ϵ^1 的系数, 得到下列关系式:

$$u_{0t} - c_1nu_{0x}^{n-1}u_{0xx} = 0, \quad (48)$$

$$u_{1t} - c_1nu_{0x}^{n-1}u_{1xx} \\ - c_1n(n-1)u_{1x}u_{0x}^{n-2}u_{0xx} \\ - c_3u_0^n - c_2u_0 = 0, \quad (49)$$

$$s_2 \ln(u_0) + s_1 - \psi(x) - \phi(t) = 0, \quad (50)$$

$$(s_3 \ln(u_0) - \omega(x) - \theta(t) + s_4)u_0 \\ + s_2(u_1 + c_4) = 0. \quad (51)$$

从 (50) 和 (51) 式中解出 u_0 和 u_1 , 再把它们代入 (48) 和 (49) 式, 借助分离变量法, 可得下列用以确定 $\psi(x)$, $\phi(t)$, $\omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 的常微分方程组:

$$c_1ns_2^{1-n}(\psi'(x))^{n-1}(s_2\psi''(x) \\ + (\psi'(x))^2) \exp\left(\frac{(n-1)(\psi(x) - s_1)}{s_2}\right) = \mu, \quad (52)$$

$$s_2\phi'(t) \exp\left(\frac{(1-n)\phi(t)}{s_2}\right) = \mu, \quad (53)$$

$$s_2^4 [c_1ns_2^{-2-n}(\psi'(x))^n (s_2^2\omega''(x) + 2s_2\omega'(x)\psi'(x) \\ - s_3(\psi'(x))^2) + c_3\psi'(x)] \\ \times \exp\left(\frac{(n-1)(\psi(x) - s_1)}{s_2}\right) \\ + [\mu(s_2(\omega(x) - s_4) - s_3(\psi(x) \\ + s_2 - s_1))(n-1) + \nu]\psi'(x) \\ + (n-1)\mu s_2^2\omega'(x) = 0, \quad (54)$$

$$s_2^3 (\theta'(t) - c_2 s_2) \exp \left(\frac{(1-n)\phi(t)}{s_2} \right) - (n-1)\mu (s_2 \theta(t) - s_3 \phi(t)) + \nu = 0, \quad (55)$$

其中 μ, ν 是任意常数, 且 $\mu \neq 0$.

求解上述方程组 (52)—(55), 可知 $\psi(x), \phi(t), \omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 满足

$$\begin{aligned} & \int^{\psi(x)} s_2^{\frac{1-n}{1+n}} [(n+1)(2c_1 n)^{-1} \mu \\ & \times \left(\exp \left(\frac{2\xi - k_3 s_2}{s_2} \right) - 1 \right)]^{-\frac{1}{n+1}} \\ & \times \exp \left(\frac{(n+1)\xi + s_1(1-n) - k_3 s_2}{s_2(n+1)} \right) d\xi \\ & = x + k_4, \\ \phi(t) &= \frac{s_2}{n-1} \ln \left[\frac{s_2^2}{\mu(1-n)(t+k_1)} \right], \\ & s_2^4 [c_1 n s_2^{-2-n} (\psi'(x))^n (s_2^2 \omega''(x) \\ & + 2s_2 \omega'(x) \psi'(x) - s_3 (\psi'(x))^2) + c_3 \psi'(x)] \\ & \times \exp \left(\frac{(n-1)(\psi(x) - s_1)}{s_2} \right) \\ & + [\mu(s_2(\omega(x) - s_4) - s_3(\psi(x) \\ & + s_2 - s_1))(n-1) + \nu] \psi'(x) \\ & + (n-1)\mu s_2^2 \omega'(x) \\ & = 0, \\ \theta(t) &= [2^{-1} c_2 s_2 t^2 + (c_2 k_1 s_2 + (\nu + \mu s_2 s_3) \\ & \times ((n-1)\mu s_2)^{-1}) t + k_1 s_3 (n-1)^{-1} + k_2] \\ & \times (t+k_1)^{-1} + \frac{s_3}{n-1} \ln \left[\frac{s_2^2}{\mu(1-n)(t+k_1)} \right], \end{aligned}$$

其中 $k_i (i=1, 2, 3, 4)$ 是任意常数.

最后, 把得到的 $\psi(x), \phi(t), \omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 代入 (50) 和 (51) 式, 从中解出 u_0 和 u_1 , 于是我们得到了对应于 (16) 式的近似泛函分离变量解 $u = u_0 + \epsilon u_1$. 假定 $\psi'(x)\phi'(t)\omega'(x)\theta'(t) \neq 0$, 以便排除近似泛函分离变量解的平凡形式.

类似地, 应用上述近似泛函分离变量法可得到下面例子中相应的结果.

算例 2 方程 (32) 有满足形如 (16) 式的近似泛函分离变量解, 其中

$$\begin{aligned} f(u) &= h_2 \ln(u) + h_1, \\ g(u) &= h_3 \ln(u) + \frac{1}{4} \left(\frac{4n+1}{n+1} \right)^2 c_4 h_2 u^{\frac{2(n+1)}{4n+1}} + h_4. \end{aligned}$$

$\psi(x), \phi(t), \omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 应满足

$$[2c_1 h_2^{1-n} (\psi'(x))^n +$$

$$\begin{aligned} & \times \exp \left(\frac{(n+1)(1-2n)(\psi(x) - h_1)}{(4n+1)h_2} \right) \\ & - (4n+1)\sigma \exp \left(\frac{2(n+1)(\psi(x) - h_1)}{(4n+1)h_2} \right) \Big] \end{aligned}$$

$$\frac{2(n+1)}{(4n+1)^{\frac{4n+1}{4n+1}}} + \beta = 0,$$

$$\begin{aligned} \phi(t) &= -Q h_2 \ln \left[\frac{Q h_2^2}{\sigma(t+m_1)} \right], \\ & c_1 h_2^{2-n} K(x) [h_2^2 (4n+1) \omega''(x) \\ & - (2n-1) \psi(x) (2h_2 \omega'(x) - h_3 \psi(x))] \\ & + (4n+1) [c_3 h_2^4 H(x) + \sigma Q^{-1} (h_3 (\psi(x) - h_1) \\ & - h_2 (\omega(x) - h_4))] \psi'(x) \\ & + \sigma h_2 (n-1) (4n+1) (h_2 \omega'(x) \\ & - h_3 \psi'(x)) + R^{-1} \gamma \end{aligned}$$

$$= 0,$$

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \frac{3}{4} \beta c_4 h_2 \sigma^{-1} (2n+3)^{-1} (n+1)^{-2} \\ & \times (4n+1)^{\frac{1-2n}{4n+1}} (G(t))^{\frac{-2}{2n+1}} + Q h_3 \ln(G(t)) \\ & + [(2^{-1} c_2 h_2 (t+2m_1) \\ & - Q \gamma (\sigma R h_2 (4n+1))^{-1}) t \\ & + m_2] (t+m_1)^{-1} - Q h_3. \end{aligned}$$

这里函数

$$\begin{aligned} K(x) &= H(x) (\psi'(x))^n, \\ H(x) &= \exp \left(\frac{h_1 - \psi(x)}{Q h_2} \right), \\ G(t) &= \frac{Q h_2^2}{\sigma(t+m_1)}, \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4n+1}{(n+1)(2n+1)}, \\ R &= 4c_1^{1/(1-2n)} (n+1)^2 \\ & \times [6^{6n^2} n^{2n(12n^2+4n+1)} \\ & \times (4n+1)^{2(5n^2-2n-1)}]^{1/((2n-1)(4n+1))}. \end{aligned}$$

$\beta, \gamma, \sigma, m_i, h_j (i=1, 2; j=1, 2, 3, 4)$ 是任意常数, 且 $\sigma h_2 \neq 0$.

算例 3 方程 (34) 有满足形如 (16) 式的近似泛函分离变量解, 其中

$$\begin{aligned} f(u) &= b_2 \ln(u) + b_1, \\ g(u) &= b_4 \ln(u) + b_3. \end{aligned}$$

$$(i) \text{ 当 } \alpha \neq -\frac{6n}{4n+1}, 0, 1-n \text{ 时, } \psi(x), \phi(t),$$

$\omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 应满足

$$\begin{aligned}
 & c_1 b_2^{1-n} (\psi'(x))^{n-1} (n b_2 \psi''(x) \\
 & + N (\psi'(x))^2) \exp\left(\frac{M(\psi(x) - b_1)}{b_2}\right) + \rho \\
 & = 0, \\
 \phi(t) &= \frac{b_2}{M} \ln \left[\frac{b_2^2}{\rho M(t + a_1)} \right], \\
 & b_2^4 [c_1 b_2^{-n-2} (\psi'(x))^n (n b_2^2 \omega''(x) \\
 & + N \psi'(x) (2 b_2 \omega'(x) - b_4 \psi'(x))) \\
 & + c_3 \psi'(x)] \\
 & \times \exp\left(\frac{M(\psi(x) - b_1)}{b_2}\right) \\
 & - [\rho M (b_2 (\omega(x) - b_3) - b_4 (\psi(x) - b_1)) \\
 & + \rho b_2 b_4 (n - 1) - l] \\
 & \times \psi'(x) - (n - 1) \rho b_2^2 \omega'(x) \\
 & = 0, \\
 \theta(t) &= [2^{-1} b_2 c_2 t^2 + (b_2 c_2 a_1 \\
 & + (b_2 b_4 \rho + l) (b_2 \rho M)^{-1}) t \\
 & + b_4 a_1 M^{-1} + a_2] \\
 & \times (t + a_1)^{-1} + \frac{b_4}{M} \ln \left[\frac{b_2^2}{\rho M(t + a_1)} \right],
 \end{aligned}$$

其中 $M = N - 1$, $N = \alpha + n$.

(ii) 当 $\alpha = 1 - n$ 时, $\psi(x)$, $\phi(t)$, $\omega(x)$ 和 $\theta(t)$ 应满足

$$\begin{aligned}
 & c_1 b_2^{1-n} (\psi'(x))^{n-1} [b_2 n \psi''(x) + (\psi'(x))^2] + \rho \\
 & = 0, \\
 \phi(t) &= -b_2^{-1} \rho t + v_1, \\
 & c_1 b_2^{2-n} (\psi'(x))^n (b_2^2 n \omega''(x) + 2 b_2 \psi'(x) \omega'(x) \\
 & - b_4 (\psi'(x))^2) - b_2^2 \rho (n - 1) \omega'(x) \\
 & - b_2 (b_4 \rho - c_3 b_2^3 - b_4 n \rho - l) \psi'(x) \\
 & = 0, \\
 \theta(t) &= (b_2 c_2 + b_2^{-3} l) t + v_2,
 \end{aligned}$$

其中 $\rho, l, a_i, v_i, b_j (i = 1, 2; j = 1, 2, 3, 4)$ 是任意常数, 且 $\rho b_2 b_4 \neq 0$.

算例 4 方程 (38) 有满足形如 (16) 式的近似泛函分离变量解, 其中

$$\begin{aligned}
 f(u) &= r_2 u + r_1, \\
 g(u) &= \frac{1}{2} c_4 r_2 u^2 \\
 &+ (c_4 r_1 + r_3) u + r_4. \\
 \psi(x), \phi(t), \omega(x) \text{ 和 } \theta(t) \text{ 应满足} \\
 \psi(x) &= n(n+1)^{-1} (r_2)^{1-\frac{1}{n}} \\
 & \frac{1}{(k c_1^{-1})^{\frac{1}{n}} (x + l_3)^{1+\frac{1}{n}}} + l_4, \\
 \phi(t) &= k t + l_1, \\
 & c_1 n (\psi'(x))^n (r_2 \omega''(x) - c_4 (\psi'(x))^2) \\
 & - (k c_4 (n - 1) - c_2 r_2) r_2^{n-1} \psi(x) \psi'(x) \\
 & + k r_2^n (n - 1) \omega'(x) - (b - c_3 r_2^2 \\
 & + c_2 r_1 r_2 + k r_3 (n - 1)) r_2^{n-1} \psi'(x) \\
 & = 0, \\
 \theta(t) &= 2^{-1} k (c_2 - c_4 k r_2^{-1} (n - 1)) t^2 \\
 & + [(b - c_4 l_1 k (n - 1)) r_2^{-1} + c_2 l_1] t \\
 & + l_2,
 \end{aligned}$$

其中 $b, k, r_i, l_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是任意常数, 且 $k r_2 \neq 0$.

4 结 论

本文建立了求解扰动非线性演化方程的近似泛函分离变量法, 给出了带有扰动非线性源的多孔介质方程容许形如 (16) 式的近似泛函分离变量解的完全分类. 通过例子阐述了构造近似泛函分离变量解的主要步骤, 获得了分类方程的近似泛函分离变量解. 在某种程度上, 近似泛函分离变量法丰富了非线性数学物理方法, 促进了扰动理论 and 对称理论的进一步结合. 该方法还可用于寻求其他类型的扰动非线性演化方程的各种形式的近似泛函分离变量解, 可得到一些其他方法无法获得的结果.

[1] Olver P J 1993 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Springer) p75

[2] Qian X M, Lou S Y 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 721 (in Chinese) [钱贤民, 楼森岳 1996 物理学报 **45** 721]

[3] Gu S L, Zhang H B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5594 (in Chinese) [顾书龙, 张宏斌 2006 物理学报 **55** 5594]

[4] Jia L Q, Cui J C, Zhang Y Y, Luo S K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 16 (in Chinese) [贾利群, 崔金超, 张耀宇, 罗绍凯 2009 物理学

- 报 58 16]
- [5] Kalnins E G, Miller W 1985 *J. Math. Phys.* **26** 2168
- [6] Dolye P W, Vassiliou P J 1998 *Int. J. Nonlinear Mech.* **33** 315
- [7] Cao C W 1990 *Sci. China A* **33** 528
- [8] Lou S Y 2000 *Phys. Lett. A* **277** 94
- [9] Qu C Z, Zhang S L, Liu R C 2000 *Physica D* **144** 97
- [10] Zhang S L, Lou S Y, Qu C Z 2003 *J. Phys. A* **36** 12223
- [11] Zhang J F, Xu C Z, He B G 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3652 (in Chinese) [张解放, 徐昌智, 何宝钢 2004 物理学报 **53** 3652]
- [12] Shen S F 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1011 (in Chinese) [沈守枫 2006 物理学报 **55** 1011]
- [13] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H 1989 *Math. USSR Sb.* **64** 427
- [14] Fushchich W I, Shtelen W M 1989 *J. Phys. A* **22** L887
- [15] Mahomed F M, Qu C Z 2000 *J. Phys. A* **33** 343
- [16] Kara A H, Mahomed F M, Qu C Z 2000 *J. Phys. A* **33** 6601
- [17] Zhang S L, Qu C Z 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 527
- [18] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛, 林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
- [19] Li J N, Zhang S L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 030201
- [20] Shi L F, Zhou X C 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2915 (in Chinese) [石兰芳, 周先春 2010 物理学报 **59** 2915]
- [21] Zhou X C, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2173 (in Chinese) [周先春, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2010 物理学报 **59** 2173]
- [22] Ye W C, Li B, Wang J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030207 (in Chinese) [叶望川, 李彪, 王佳 2011 物理学报 **60** 030207]

Approximate functional variable separation for the porous medium equation with perturbed nonlinear source*

Ji Fei-Yu Zhang Shun-Li[†]

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710069, China)

(Received 18 July 2011; revised manuscript received 21 December 2011)

Abstract

The approximate functional variable separation for the porous medium equation with perturbed nonlinear source is studied. Complete classification of the perturbed equation which admits approximate functional separable solutions is obtained. The main solving procedure for the approximate functional variable separation approach is shown by way of examples, and the corresponding approximate functional separable solutions to the resulting equations are then constructed.

Keywords: porous medium equation, approximate generalized conditional symmetry, approximate functional variable separation approach

PACS: 02.30.Jr, 02.20.Sv, 02.30.Ik

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10671156) and the Natural Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. SJ08A05).

[†] E-mail: zhangshunli@nwu.edu.cn