

弹性力学的插值型重构核粒子法*

李中华¹⁾ 秦义校^{2)†} 崔小朝¹⁾

1) (太原科技大学应用科学学院, 太原 030024)

2) (太原科技大学机械工程学院, 太原 030024)

(2011年8月6日收到; 2011年12月26日收到修改稿)

采用具有离散点插值特性的重构核粒子法形函数, 较精确地重构弹性体变形的位移试函数, 再与弹性力学最小势能原理相结合, 形成新的分析弹性力学平面问题的插值型重构核粒子法. 由于插值型重构核粒子法形函数具有点插值特性和不低于核函数的高阶光滑性, 因而既克服了多数无网格方法处理本质边界条件的困难, 也保证了较高的数值精度. 与早期的无网格方法相比, 本方法具有精度高、解题规模较小、可直接施加边界条件等优点. 通过对典型弹性力学问题数值模拟, 验证了所提方法的有效性和正确性.

关键词: 插值型重构核粒子法, 弹性力学, 最小势能原理, 无网格方法

PACS: 02.60.-x, 02.60.Cb, 46.25.-y

1 引言

近年来发展较快的无网格方法^[1-5]是工程问题数值方法研究的热点之一^[6-8]. 无网格方法采用基于点的近似, 在处理不连续、断裂力学和大变形等问题时可以完全抛开网格重构, 节约了分析时间, 同时保证了计算精度.

1995年, Liu等^[9]分析了光滑粒子法用于有限域时存在着不满足一致性条件和边界精度差的问题, 利用函数的积分重构理论, 基于 Galerkin 法提出了重构核粒子法 (RKPM), 并应用于流体动力学、微机械、结构声学和大变形等诸多领域的数值计算. 1996年, Liu等^[10]又利用小波分析的尺度伸缩平移、多分辨率等特点, 提出了多尺度 RKPM 和小波粒子法, 并实现了该方法的自适应分析. 文献 [11] 也将 RKPM 应用于非线性结构的大变形分析. 文献 [12,13] 提出了移动最小二乘 RKPM 和重构核的分级单位分解方法. 2000年, 文献 [14] 对 RKPM 进行了改进, 并应用于不可压缩的有限弹性体分析. 2001年, 文献 [15] 讨论了 RKPM 的误差分析. 2003年, 文献 [16] 讨论了 RKPM 的节点插值性质. 文献 [17-25] 也对包括 RKPM 在内的无网格方法进行了研究. 2006年, 文献 [26] 提出了弹

性力学和势问题的重构核粒子边界无单元法. 2008年, 文献 [27,28] 提出了弹性力学和瞬态热传导问题的复变量 RKPM. 以上这些 RKPM 的研究, 推动了科学与工程问题数值计算方法的发展. 但是, 早期的无网格方法形函数不具有 Kronecker δ 函数特性, 一般通过拉格朗日乘子法、罚函数法等来实现边界条件的处理, 这样在一定程度上就会使精度受损, 而且加大了计算量和计算时间.

本文在充分讨论罕被采用的具有全域高阶光滑性和离散点插值特性的插值型重构核粒子法 (IRKPM) 数学特性的基础上, 与弹性力学最小势能原理相结合形成了弹性力学平面问题的插值型重构核粒子法 (interpolating reproducing kernel particle method for elastic mechanics), 其本质边界条件可像有限元方法一样方便施加, 避免了处理边界条件的困难. 所提出的方法具有直接列式、解题规模小和精度高的特点. 最后, 通过数值算例分析验证了本文方法的正确性和有效性.

2 IRKPM 形函数

在平面域 Ω , 定义在 \boldsymbol{x} 处 $u(\boldsymbol{x}) \approx u^h(\boldsymbol{x}) =$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10871124) 和山西省自然科学基金 (批准号: 20051061) 资助的课题.

† E-mail: qyx819@163.com

$\sum \Phi_I(\mathbf{x})u_I$ 的 IRKPM 形函数表示为

$$\Psi_I(\mathbf{x}) = \hat{\Phi}_I(\mathbf{x}) + \bar{\Phi}_I(\mathbf{x}). \quad (1)$$

这里 $\hat{\Phi}_I(\mathbf{x})$ 由粒子 \mathbf{x}_I 处的权函数 $\hat{\Phi}_{\hat{a}_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 和其在粒子 \mathbf{x}_I 的值来构造, 取具有 Kronecker δ 函数特性的简单形式, $\bar{\Psi}_I(\mathbf{x})$ 由扩展的重构条件来构造, 即

$$\hat{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \frac{\hat{\Phi}_{\hat{a}_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)}{\hat{\Phi}_{\hat{a}_I}(\mathbf{0})} \quad (\hat{a}_I < \min\{\|\mathbf{x}_I - \mathbf{x}_J\| \forall J \neq I\}), \quad (2)$$

$$\bar{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x})[\mathbf{H}(\mathbf{0}) - \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})]\bar{\Phi}_{\bar{a}_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I). \quad (3)$$

这里 \mathbf{x}_J 代表除 \mathbf{x}_I 外的其余粒子, $\mathbf{H}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$ 为基函数向量, 且

$$\mathbf{H}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = [1 \ x_1 - x_{I1} \ x_2 - x_{I2} \ \cdots \ (x_2 - x_{I2})^N], \quad (4)$$

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \sum_I^{N_p} \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \times (\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\bar{\Phi}_{\bar{a}_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I))^T, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{N_p} \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\hat{\Psi}_I(\mathbf{x}), \quad (6)$$

式中 N 是基函数的次数, N_p 是紧支域内离散粒子数量.

若取紧支域为矩形, 中心为 \mathbf{x}_I , 尺寸为 $2a_1 \times 2a_2$, 则二维权函数可由一维权函数的张量积获得

$$\Phi_a(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = \frac{1}{a_1} \Phi\left(\frac{x_1 - x_{I1}}{a_1}\right) \times \frac{1}{a_2} \Phi\left(\frac{x_2 - x_{I2}}{a_2}\right). \quad (7)$$

为方便计算形函数的偏导数, 将 (3) 式改写为

$$\bar{\Psi}_I(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

式中

$$\mathbf{A}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{x}), \quad (9)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = [\mathbf{H}(\mathbf{0}) - \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{x})]\bar{\Phi}_{\bar{a}_I}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I). \quad (10)$$

因此, $\bar{\Psi}_I(\mathbf{x})$ 的偏导数为

$$\bar{\Psi}_I(\mathbf{x})_{,x_i} = \mathbf{A}_{,x_i}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}_{,x_i}(\mathbf{x}) \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

IRKPM 形函数 $\Psi_I(\mathbf{x})$ 及其导函数的图形见图 1—图 3.

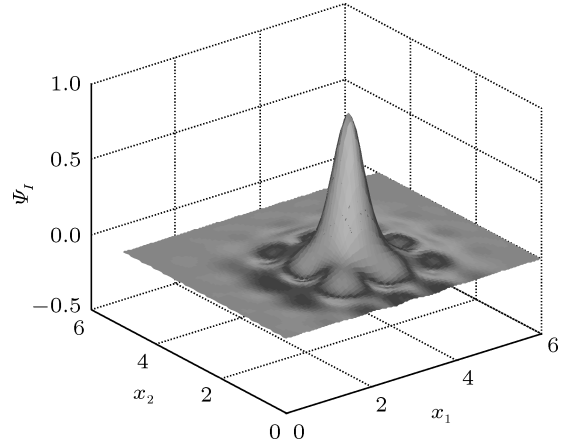


图 1 IRKPM 形函数 $\Psi_I(\mathbf{x})$ 图形

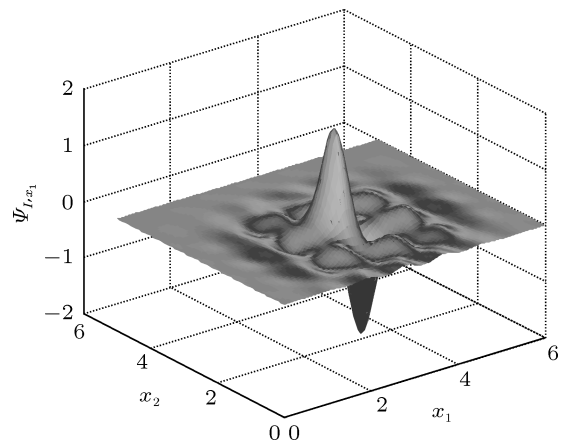


图 2 IRKPM 形函数 x_1 方向偏导数 $\Psi_I(\mathbf{x})_{,x_1}$ 图形

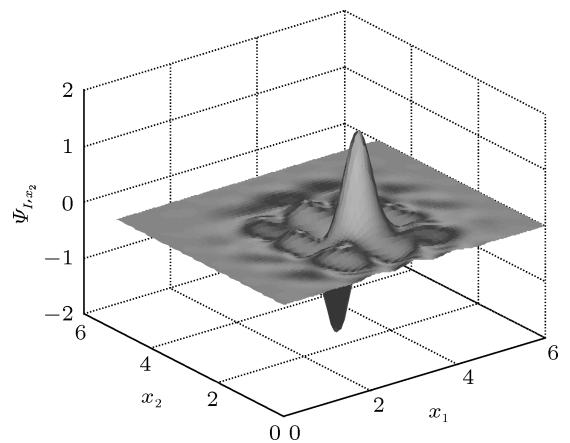


图 3 IRKPM 形函数 x_2 方向偏导数 $\Psi_I(\mathbf{x})_{,x_2}$ 图形

由以上所述可知, IRKPM 形函数具有优异的点插值特性和导函数的高阶光滑性, 由此求得分析域内的位移、应变和应力具有全域高阶光滑连续性, 从而避免了有限元应力磨光处理带来的计算误差.

3 弹性力学平面问题的 IRKPM

对区域为 Ω 、边界为 Γ 的线弹性体, 定义体力向量为 \mathbf{b} , 自然边界 Γ_f 上的已知表面力为 $\bar{\mathbf{f}}$ 以及 \mathbf{x} 处的单位外法线向量为 \mathbf{n} , 本质边界 Γ_u 上的已知位移为 $\bar{\mathbf{u}}$, 则弹性体的位移 \mathbf{u} 、应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 和应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 之间的关系为

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0, \quad (12a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad (12b)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (12c)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{f}} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_f), \quad (12d)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad (\mathbf{x} \in \Gamma_u). \quad (12e)$$

这里 \mathbf{L} 为微分算子矩阵,

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix}; \quad (13)$$

\mathbf{D} 为弹性矩阵, 对于平面应力问题,

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中 E 和 μ 分别是材料的弹性模量和泊松比, 对于平面应变问题, 把 E 换为 $E/(1-\mu^2)$, μ 换为 $\mu/(1-\mu)$ 即可.

平面域 Ω 内任意点 \mathbf{x} 的位移 $\mathbf{u} = [u \ v]^T$ 可表示为

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}^n. \quad (15)$$

这里, $n = N_p \leq m$, 其中 m 为弹性域 Ω 内所有离散粒子总数. 形函数矩阵 $\boldsymbol{\psi}$ 和紧支域内离散粒子的位移向量 \mathbf{u}^n 可表示为

$$\boldsymbol{\psi} = [\psi_1 \ \psi_2 \ \cdots \ \psi_n], \quad (16)$$

$$\mathbf{u}^n = [\mathbf{u}_1^T \ \mathbf{u}_2^T \ \cdots \ \mathbf{u}_n^T]^T. \quad (17)$$

令 $I = 1, 2, \dots, n$, 任一粒子 \mathbf{x}_I 的形函数子阵和位移向量分别为

$$\boldsymbol{\psi}_I = \begin{bmatrix} \Psi_I & 0 \\ 0 & \Psi_I \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{u}_I = [u_I \ v_I]^T. \quad (19)$$

由 (12b) 和 (15) 式可得计算点 \mathbf{x} 处的应变

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{B}\mathbf{u}^n, \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{B}_1 \ \mathbf{B}_2 \ \cdots \ \mathbf{B}_n]. \quad (21)$$

这里 \mathbf{B} 为应变矩阵, 且在粒子 \mathbf{x}_I 处的子阵 \mathbf{B}_I 为

$$\mathbf{B}_I = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_2} & \frac{\partial \Psi_I}{\partial x_1} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

(12a)—(12e) 式所示弹性系统的势能 Π 为应变能 U 与外力功 W 之差, 即

$$\begin{aligned} \Pi = U - W = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \\ & - \left(\int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_f} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (23)$$

当系统参量 $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{b}, \bar{\mathbf{u}}$ 和 $\bar{\mathbf{f}}$ 是连续函数时, 将 Ω 划分为若干个子域, 即 $\Omega = \sum \Omega_e$, Ω_e 是第 e 个子域. 如图 4 所示, 当设定沿所有子域边界都以相同方向 (顺时针方向或逆时针方向) 积分时, 子域内边界积分项将相互抵消而只剩 Ω 的外边界积分, 即对边界积分项有

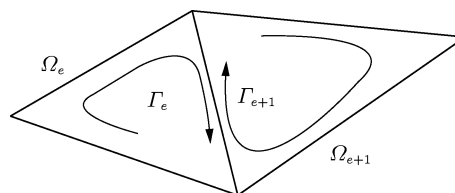


图 4 子域内边界积分

$$\int_{\Gamma_f} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma = \sum_e \int_{\Gamma_{ef}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma. \quad (24)$$

于是

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_e \Pi^e \\ = & \frac{1}{2} \sum_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \right. \\ & \left. + \sum_e \int_{\Gamma_{ef}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (25)$$

这样, 在具有相同物理特性的整体积分域或其子域, 由离散粒子的形函数构造的任意粒子位移试函数 u^h 及其导数是坐标的连续函数, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 也是坐标的连续函数. 因此弹性力学问题的系统势能如 (25) 式, 即可通过所有子域积分叠加来实现, 其

中各子域的势能为

$$\begin{aligned} \Pi^e &= U^e - W^e \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega - \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_{ef}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma \right). \end{aligned} \quad (26)$$

当每个积分子域均满足位移边界条件时, 最小势能可表示为

$$\begin{aligned} \Pi_{\min}^e &= \min_{\mathbf{u}^h \in BC(\bar{\mathbf{u}})} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_{ef}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

整个弹性体的最小势能可表示为

$$\begin{aligned} \Pi_{\min} &= \min_{\mathbf{u}^h \in BC(\bar{\mathbf{u}})} \left[\frac{1}{2} \sum_e \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega \right. \\ &\quad \left. - \left(\sum_e \int_{\Omega_e} \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_e \int_{\Gamma_{ef}} \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

由 (27) 式可推得

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e, \quad (29)$$

其中 \mathbf{K}^e , \mathbf{u}^e 和 \mathbf{f}^e 分别是第 e 个子域的刚度矩阵、位移和力向量, 且

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega, \quad (30)$$

$$\mathbf{f}^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{ef}} \boldsymbol{\psi}^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma, \quad (31)$$

$$\mathbf{K}_{IJ}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D} \mathbf{B}_J d\Omega, \quad (32)$$

$$\mathbf{f}_I^e = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\psi}_I^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{ef}} \boldsymbol{\psi}_I^T \bar{\mathbf{f}} d\Gamma. \quad (33)$$

在 (32) 和 (33) 式中, \mathbf{K}_{IJ}^e 为 \mathbf{K}^e 的 2×2 阶子阵, \mathbf{f}_I^e 为 \mathbf{f}^e 在粒子 \mathbf{x}_I 处的等效力向量.

由 (28) 式可得弹性力学平面问题的 IRKPM 整体刚度方程

$$\mathbf{K} \mathbf{u}^m = \mathbf{f}, \quad (34)$$

其中 \mathbf{K} , \mathbf{u}^m 和 \mathbf{f} 分别为整体刚度矩阵、所有粒子的位移和力列阵.

由 (23)—(28), (32) 和 (33) 式可得

$$\mathbf{K}_{IJ} = \sum_e \mathbf{K}_{IJ}^e, \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_I = \sum_e \mathbf{f}_I^e, \quad (36)$$

其中, $I, J = 1, 2, \dots, m$; \mathbf{K}_{IJ} 和 \mathbf{f}_I 分别为 \mathbf{K} 和 \mathbf{f} 的元素.

因为 IRKPM 形函数在离散点具有 Kronecker δ 函数特性, 所以此处可以直接施加本质边界条件.

4 数值算例

对算例分析时, 本文方法采用一次基函数, 权函数采用三次样条函数, 紧支域取为矩形, (2) 和 (3) 式中紧支域 \hat{a}_I 和 \bar{a}_I 的比例系数取为 0.9 和 3.2, 每个子域的积分均采用 4×4 的 Gauss 数值积分.

4.1 自由端受抛物线型表面力的悬臂梁

图 5 所示为自由端受抛物线型表面力的悬臂梁, 梁的长度 $L = 4 \text{ m}$, 高度 $D = 1 \text{ m}$, 厚度 $t = 1 \text{ m}$, 弹性模量 $E = 1.0 \times 10^5 \text{ Pa}$, 泊松比 $\mu = 0.3$, 自由端总载荷 $P = -1 \text{ N}$, 不计自重, 按平面应力计算.

在求解域布置了 41×11 个粒子, 如图 6 所示, 图中叠加了用 IRKPM 求得的放大 150 倍的位移.

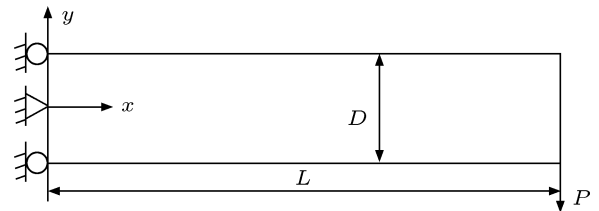


图 5 自由端受抛物线型表面力的悬臂梁

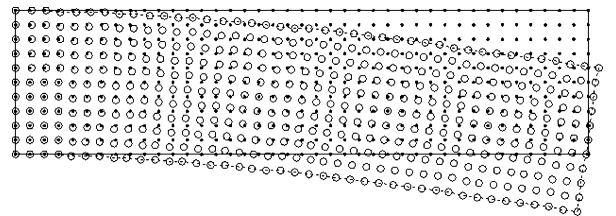


图 6 粒子布置及其变形

图 7 所示为用 IRKPM、无单元 Galerkin (EFG) 法 [7] 和解析法求得的梁中性层 $y = 0$ 的垂直位移 v , 表 1 列出了一些粒子处的垂直位移值.

由表 1 可知, IRKPM 求得的结果与解析解相比, 最大相对误差为 1.16%, 而 EFG 法求得的结果与解析解相比, 最大相对误差为 4.76%.

图 8 所示为用 IRKPM, EFG 法和解析法求得的 $x = L/2$ 截面上的 x 方向正应力 σ_{11} , 表 2 列出了在一些粒子处的正应力值.

由表 2 可知, IRKPM 求得的结果与解析解相比, 最大相对误差为 0.28%, 而 EFG 法求得的结果与解析解相比, 最大相对误差为 0.42%.

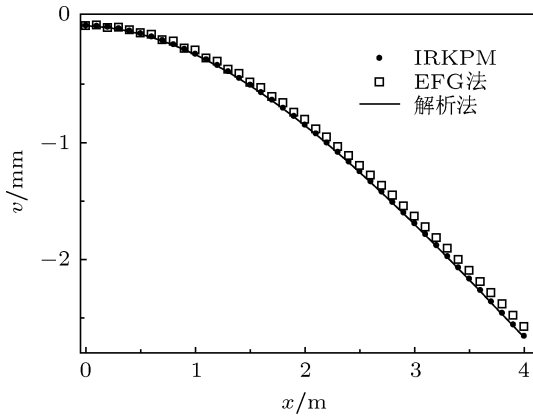


图 7 梁中性层的垂直位移

表 1 梁中性层的垂直位移 (单位为 mm)

节点坐标	IRKPM	EFG 法	解析法
(0.5, 0.0)	-7.05×10^{-2}	-7.01×10^{-2}	-7.13×10^{-2}
(1.5, 0.0)	-0.51	-0.49	-0.51
(2.0, 0.0)	-0.85	-0.82	-0.86
(2.5, 0.0)	-1.25	-1.20	-1.26
(3.0, 0.0)	-1.69	-1.63	-1.70
(3.5, 0.0)	-2.17	-2.10	-2.18
(4.0, 0.0)	-2.66	-2.58	-2.67

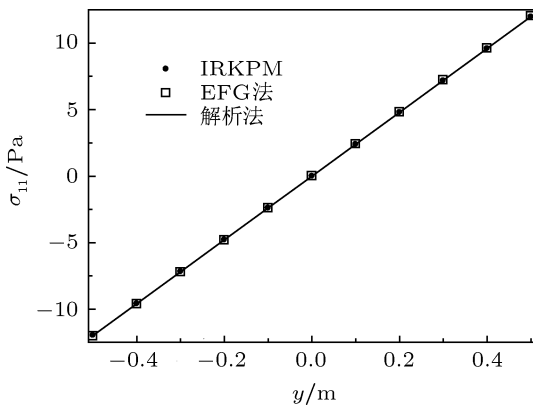


图 8 $x = L/2$ 截面的 x 方向正应力

表 2 $x = L/2$ 截面的 x 方向正应力 (单位为 Pa)

节点坐标	IRKPM	EFG 法	解析法
(2.0, 0.5)	11.98	12.04	12.0
(2.0, 0.3)	7.18	7.22	7.2
(2.0, 0.1)	2.40	2.41	2.4
(2.0, 0.0)	0.00	0.00	0.0
(2.0, -0.2)	-4.79	-4.81	-4.8
(2.0, -0.4)	-9.59	-9.62	-9.6

从图 7、图 8 以及表 1、表 2 可知, IRKPM 的计算结果更逼近解析解, 说明 IRKPM 比 EFG 法具

有更高的精度.

4.2 受单向拉伸的中心圆孔矩形板

受单向拉伸的中心圆孔矩形板的尺寸为 $10 \text{ m} \times 10 \text{ m} \times 1 \text{ m}$, 中心圆孔半径 $a = 1 \text{ m}$, 材料的弹性模量 $E = 1.0 \times 10^3 \text{ Pa}$, 泊松比 $\mu = 0.25$, 单向拉伸均布载荷 $q = 1.0 \text{ Pa}$. 由于对称性, 可以考虑将其四分之一作为研究对象, 如图 9 所示, 按平面应力计算.

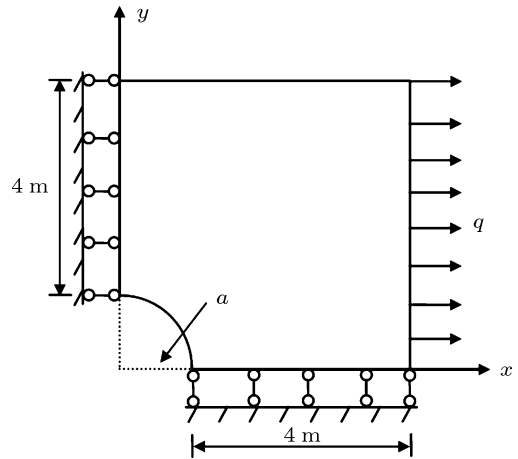


图 9 水平方向单向拉伸的中心圆孔矩形板

采用本文方法分析时, 在求解域布置 11×13 个粒子, 如图 10 所示, 图中叠加了用 IRKPM 求得的放大 50 倍的位移. 用有限元法分析时在孔边的网格节点与 IRKPM 所布粒子相同.

图 11 为用 IRKPM、有限元法和解析法求得的 $x = 0$ 截面上垂直位移, 表 3 列出了在一些粒子处的垂直位移值.

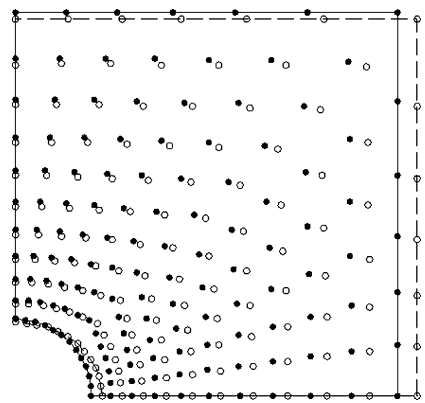


图 10 粒子布置及其变形

由表 3 可知, IRKPM 求得的位移与解析解相比, 最大相对误差为 0.66%, 而有限元法求得的结果

与解析解相比,最大相对误差为 1.32%.

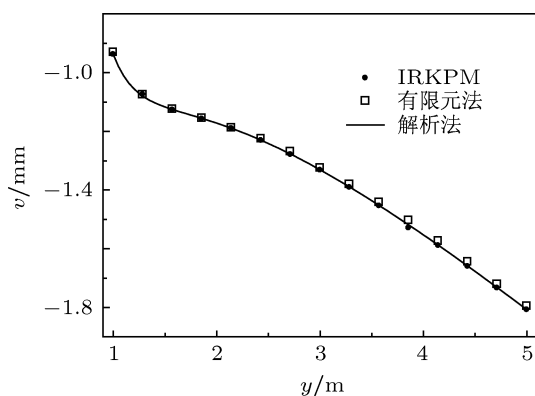


图 11 $x = 0$ 截面的垂直位移

表 3 $x = 0$ 截面的垂直位移 (单位为 mm)

节点坐标	IRKPM	有限元法	解析法
(0.00, 1.00)	-0.94	-0.93	-0.94
(0.00, 1.57)	-1.13	-1.12	-1.13
(0.00, 2.14)	-1.19	-1.19	-1.19
(0.00, 2.71)	-1.28	-1.27	-1.28
(0.00, 3.29)	-1.39	-1.38	-1.39
(0.00, 3.86)	-1.53	-1.50	-1.52
(0.00, 4.43)	-1.66	-1.64	-1.66
(0.00, 5.00)	-1.81	-1.80	-1.81

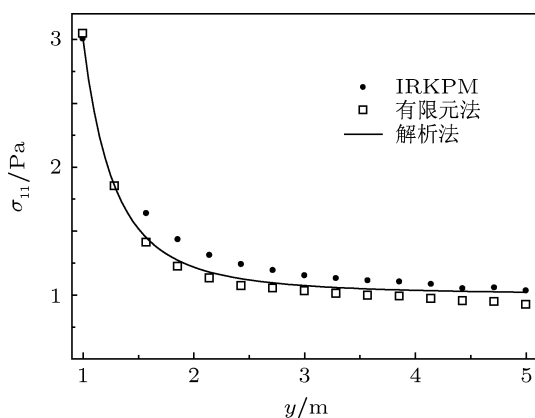


图 12 $x = 0$ 截面的 x 方向正应力

图 12 为用 IRKPM、有限元法和解析法求得的 x 方向正应力比较,表 4 列出了在一些粒子处的正应力值.

由表 4 可知,在应力集中的孔边,IRKPM 求得的正应力与解析解符合,而有限元法求得的结果与解析解相比,误差为 1.67%.

由图 11、图 12 和表 3、表 4 可知,IRKPM 与有限元法相比具有更高的精度.

通过以上典型例子的分析,验证了本文方法的正确性和有效性.

表 4 $x = 0$ 截面的 x 方向正应力 (单位为 Pa)

节点坐标	IRKPM	有限元法	解析法
(0.00, 1.00)	3.00	3.05	3.00
(0.00, 1.57)	1.64	1.41	1.45
(0.00, 2.14)	1.31	1.13	1.18
(0.00, 2.71)	1.19	1.05	1.10
(0.00, 3.29)	1.13	1.01	1.06
(0.00, 3.86)	1.10	0.99	1.04
(0.00, 4.43)	1.05	0.95	1.03
(0.00, 5.00)	1.03	0.92	1.02

5 结论

本文将 IRKPM 形函数和弹性力学的最小势能原理相结合,形成了弹性力学平面问题的 IRKPM,推导了其数值化计算公式,编制了相应问题的 Matlab 程序,并用典型算例验证了该方法的有效性.本文方法可以像有限元法一样方便地直接施加位移边界条件,节约了计算时间. IRKPM 形函数具有全域离散点插值特性,其导函数具有高阶光滑性,保证了本文方法的求解精度.用本文方法求得的应力场和位移场具有全域光滑连续性,避免了有限元法的单元应力不连续进行后处理带来的精度损失.因此,本文方法是省时和高精度的有效数值方法.

[1] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, Fleming M, Krysl P 1996 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **139** 3
 [2] Li S F, Liu W K 2002 *Appl. Mech. Rev.* **55** 134
 [3] Zhang X, Song K Z, Lu M W 2003 *Chin. J. Comput. Mech.* **20** 731 (in Chinese) [张雄, 宋康祖, 陆明万 2003 计算力学学报 **20** 731]
 [4] Gao H F, Cheng Y M 2010 *Int. J. Comput. Meth.* **7** 55
 [5] Wang J F, Cheng Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 030206
 [6] Cheng Y M, Ji X, He P F 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 43 (in Chinese) [程玉民、嵇醒、贺鹏飞 2004 力学学报 **36** 43]
 [7] Cheng R J, Cheng Y M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070206 (in

Chinese) [程荣军、程玉民 2011 物理学报 **60** 070206]
 [8] Gao H F, Cheng Y M 2009 *Acta Mech. Sin.* **41** 480 (in Chinese) [高洪芬, 程玉民 2009 力学学报 **41** 480]
 [9] Liu W K, Jun S, Zhang Y F 1995 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **20** 1081
 [10] Liu W K, Chen Y, Uras R A, Chang C T 1996 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **139** 91
 [11] Chen J S, Pan C, Wu C T, Liu W K 1996 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **139** 195
 [12] Li S, Liu W K 1997 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **143** 113
 [13] Li S, Liu W K 1999 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **45** 251

- [14] Chen J S, Yoon S, Wang H P, Liu W K 2000 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **181** 117
- [15] Han W M, Meng X P 2001 *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* **190** 6157
- [16] Chen J S, Han W, You Y, Meng X 2003 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **56** 935
- [17] Cheng Y M, Peng M J 2005 *Sci. China G* **48** 641
- [18] Cheng Y M, Li J H 2006 *Sci. China G* **49** 46
- [19] Dai B D, Cheng Y M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 597 (in Chinese) [戴保东, 程玉民 2007 物理学报 **56** 597]
- [20] Cheng Y M, Liew K M, Kitipornchai S 2009 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **78** 1258
- [21] Cheng R J, Cheng Y M 2008 *Appl. Numer. Math.* **58** 884
- [22] Cheng Y M, Chen M J 2003 *Acta Mech. Sin.* **35** 181 (in Chinese) [程玉民, 陈美娟 2003 力学学报 **35** 181]
- [23] Li S C, Cheng Y M 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 496 (in Chinese) [李树忱, 程玉民 2004 力学学报 **36** 496]
- [24] Cheng Y M, Li J H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4463 (in Chinese) [程玉民, 李九红 2005 物理学报 **54** 4463]
- [25] Cheng R J, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6037 (in Chinese) [程荣军, 程玉民 2008 物理学报 **57** 6037]
- [26] Qin Y X, Cheng Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3216 (in Chinese) [秦义校, 程玉民 2006 物理学报 **55** 3216]
- [27] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1 (in Chinese) [陈丽, 程玉民 2008 物理学报 **57** 1]
- [28] Chen L, Cheng Y M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6047 (in Chinese) [陈丽, 程玉民 2008 物理学报 **57** 6047]

Interpolating reproducing kernel particle method for elastic mechanics*

Li Zhong-Hua¹⁾ Qin Yi-Xiao^{2)†} Cui Xiao-Chao¹⁾

1) (College of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

2) (College of Mechanical Engineering, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

(Received 6 August 2011; revised manuscript received 26 December 2011)

Abstract

The displacement trial function is reconstructed by reproducing kernel particle shape function method with interpolation property on discrete points, then combining the principle of minimum potential energy of elasticity, the new interpolating reproducing kernel particle method to analyze the plane problem of elasticity is obtained. Because interpolation reproducing kernel particle shape function has a point interpolation property and no less than the high-order smoothness of kernel function, the difficulty for most of meshless methods to be used to deal with the essential boundary conditions is already overcome, and the high numerical accuracy is assured as well. Compared with the early meshless methods, this method has a high accuracy and a small scale of solving problem and it can be directly applied to boundary conditions. Numerical results for some typical examples of elasticity prove the proposed method to be valid.

Keywords: interpolating reproducing kernel particle method, elastic mechanics, principle of minimum potential energy, meshless method

PACS: 02.60.-x, 02.60.Cb, 46.25.-y

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10871124) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 20051061).

† E-mail: qyx819@163.com