

网络交通流动态演化的混沌现象及其控制*

刘诗序 关宏志[†] 严海

(北京工业大学交通工程北京市重点实验室, 北京 100124)

(2011 年 12 月 13 日收到; 2011 年 12 月 29 日收到修改稿)

本文以含 2 条平行路径的交通网络为例, 探讨了网络交通流逐日动态演化问题. 首先, 建立了动态系统模型来刻画网络交通流的演化过程, 动态系统模型的不动点就是随机用户平衡解, 证明了平衡解存在且唯一. 然后, 根据非线性动力学理论, 推导出了网络交通流演化的稳定性条件. 其次, 通过数值实验, 分析了网络交通流的演化特征, 发现了在一定条件下流量的周期振荡和混沌现象. 最后, 以 OD 需求为控制变量推导出了网络交通流混沌控制的方法.

关键词: 网络交通流, 路径选择, 动态演化, 混沌

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 01.75.+m

1 引言

自从 1952 年 Wardrop 提出了用户平衡 (user equilibrium, UE) 原则之后^[1], 学者们对此进行了大量的研究^[2]. 一个比较一致的研究结论认为: 要实现 UE 原则, 所有出行者都拥有完全信息且出行者完全理性. 在此基础上, Daganzo 和 Sheffi 假设出行者获取的信息不完全, 将交通网络平衡推广到了随机用户平衡 (stochastic user equilibrium, SUE)^[3]. UE 准则和 SUE 准则的提出奠定了交通平衡分配理论的基础, 后来学者们在此基础上对平衡分配问题做了大量的研究^[4-6], 极大地扩展了网络平衡的边界条件, 为交通网络分析提供了有效的工具.

以往对网络交通分配问题的研究只关注于最终的平衡状态, 而对这一平衡状态的实现过程缺乏充分的认识. 实际中, 人们日常的路径选择是在经验和信息共同作用下的动态博弈学习过程, 其宏观表现就是网络交通流的动态演化过程. 因此, 人们很容易提出这样的问题: 出行者经过长期的逐日路径选择后, 网络交通流能否达到平衡?

国内外学者通过 2 个途径尝试着回答上述问题. 第一个途径是从个体角度出发, 以出行者个体为单元, 假设每个出行者根据交通信息和自己的经验选择路径, 所有出行者的选择结果集计后形成流

量. 路网再根据实际流量更新交通信息, 出行者根据新的信息和历史经验再次出行, 网络交通流呈现动态演化过程. 这类研究主要采用 Agent 微观仿真方法, Nakayama 等^[7-9], Klügl 和 Bazzan^[10-12], 刘天亮和黄海军^[13,14], Kim 等^[15] 做了一些代表性的工作. 这种研究方法可以针对出行者的行为提出各种假设, 但是, 由于研究的场景和条件是特定的, 其研究结论的普适性受到质疑.

另一个途径则是从集计角度出发, 以非线性动力学理论为基础, 研究平衡的存在性及其稳定性. 这种方法有助于解决研究结果的普适性问题, 建立的模型分为 2 类: 连续型动态系统和离散型动态系统. 连续型动态系统假设出行者出行的天数是连续变量, 如 Smith^[16], Friesz 等^[17], Zhang 和 Nagurney^[18,19], Watling^[20], Cho 和 Hwang^[21], Mounce^[22], 郭仁拥和黄海军^[23] 等做了一些研究. 离散型动态系统假设出行者出行的天数是离散变量, 显然, 这种假设更符合实际. 离散型动态系统建模方法最早由 Horowitz 提出^[24], 其研究的是 2 条路径的简单网络, 研究结果表明: 路段流量可能收敛到平衡点、在平衡点附近振荡或者收敛到非平衡点, 取决于路径选择过程. Cantarella 和 Cascetta 建立了逐日动态交通分配模型, 给出了一般网络平衡存在性、唯一性和稳定性条件^[25,26]. Watling 以

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2012CB725403), 国家自然科学基金 (批准号: 50978008) 和北京市自然科学基金 (批准号: 8102007) 资助的课题.

[†] E-mail: hguan@bjut.edu.cn

路径的流量和费用为基本变量,建立了逐日动态分配模型,给出了一般网络平衡稳定性的充分条件 [20]. Watling 和 Hazelton 对逐日动态分配模型进行了总结,并以简单的例子说明了网络平衡的稳定性问题 [27]. Bie 和 Lo 对逐日动态分配系统平衡点的吸引域进行了研究,证明了平衡点在其吸引域内才是稳定的 [28]. Nakayama 对一个由公交线路和小汽车线路 2 条路径构成的简单路网进行了研究,发现了当系统的参数满足一定条件时,网络流量出现混沌现象 [29]. 这一发现极大地加深了人们对于网络平衡稳定性的认识,然而, Nakayama 研究的是公交和小汽车方式划分问题,不是一般网络交通分配问题.

从上面的回顾不难看出,学者们利用逐日动态交通分配方法来研究一般网络平衡的存在性、唯一性与稳定性问题时,对网络交通流演化不稳定的情况缺乏充分的讨论. 非线性动力学理论认为:动力系统不稳定可能会出现周期运动或混沌运动 [30–34]. 显然,具有明显非线性的交通网络系统,也完全有可能服从这个规律. Nakayama 的发现也进一步证实了这个推断 [29]. 因此,人们有理由对交通流提出新的疑问:网络交通流演化过程不稳定时,在什么情况下出现分岔和混沌现象? 网络交通流的混沌现象有何特征? 混沌现象如何控制?

本文以 2 条平行路径的简单网络为对象,建立逐日动态交通流演化模型,研究网络交通流动态演化系统平衡点的存在性、唯一性和稳定性,探索网络交通流演化不稳定时出现分岔和混沌的条件,探讨网络交通流混沌的控制问题.

2 模型

如图 1 所示,交通网络中含有 2 条平行路径, OD 需求为 d . 设 $f_1^{(n)}$ 和 $f_2^{(n)}$ 分别表示第 n 天路径 1 和路径 2 的流量, $\bar{C}_1^{(n)}$ 和 $\bar{C}_2^{(n)}$ 分别表示第 n 天路径 1 和路径 2 的实际出行费用,假设各路径的出行费用仅与本路径的流量有关,出行费用函数为 $\bar{C}_1^{(n)} = g_1(f_1^{(n)})$ 和 $\bar{C}_2^{(n)} = g_2(f_2^{(n)})$.

根据 SUE 原则的假设,出行者获取的信息不完全,设第 n 天路径 r ($r=1, 2$) 上的理解出行费用为 $\hat{C}_r^{(n)} = C_r^{(n)} + \xi_r$, $C_r^{(n)}$ 为可观测部分, ξ_r 为随机误差项,假设 ξ_1 和 ξ_2 相互独立且服从均值为 0 的 Gumbel 分布. 第 n 天路径 1 和路径 2 的选择概率分别为

$$p_1^{(n)} = P(C_1^{(n)} + \xi_1 \leq C_2^{(n)} + \xi_2) = \frac{1}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (1)$$

$$p_2^{(n)} = 1 - p_1^{(n)} = \frac{1}{1 + e^{-\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (2)$$

式中的 θ 是与出行者特性有关的参数,且 $\theta > 0$, 描述出行者路径选择的随机程度, θ 越大,出行者路径选择的随机程度越小,对路径的费用越敏感,反之, θ 越小,出行者路径选择的随机程度越大,对路径的费用越不敏感. 根据 SUE 原则,流量分配为 [2]

$$f_1^{(n)} = dp_1^{(n)}, \quad (3)$$

$$f_2^{(n)} = dp_2^{(n)}. \quad (4)$$

第 n 天的期望出行费用根据第 $n-1$ 天期望出行费用 and 实际出行费用更新,可以表示成二者的加权和 [26]

$$C_r^{(n)} = \phi C_r^{(n-1)} + (1 - \phi) \bar{C}_r^{(n-1)}, \quad r = 1, 2, \quad (5)$$

式中的 ϕ 是与出行者特性有关的参数,且 $0 \leq \phi < 1$, 其大小反映出行者对前一天实际费用的依赖程度, ϕ 越大,依赖程度越小,反之, ϕ 越小,依赖程度越大.

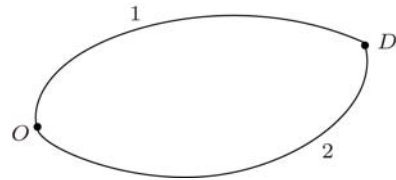


图 1 路网示意图

由此得到逐日动态交通流演化模型为

$$C_1^{(n)} = \phi C_1^{(n-1)} + (1 - \phi) g_1(f_1^{(n-1)}), \quad (6)$$

$$C_2^{(n)} = \phi C_2^{(n-1)} + (1 - \phi) g_2(f_2^{(n-1)}). \quad (7)$$

路径流量分配

$$f_1^{(n)} = \frac{d}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}, \quad (8)$$

$$f_2^{(n)} = \frac{d}{1 + e^{-\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}. \quad (9)$$

令

$$p(C_1^{(n)}, C_2^{(n)}) = \frac{1}{1 + e^{\theta(C_1^{(n)} - C_2^{(n)})}}. \quad (10)$$

则动态系统模型转化为

$$C_1^{(n)} = \phi C_1^{(n-1)} + (1 - \phi) g_1(dp(C_1^{(n-1)}, C_2^{(n-1)})), \quad (11)$$

$$C_2^{(n)} = \phi C_2^{(n-1)} + (1-\phi)g_2(d - dp(C_1^{(n-1)}, C_2^{(n-1)})). \quad (12)$$

3 平衡点的存在性、唯一性和稳定性

假设 路径的出行费用关于路径流量的函数连续可微, 且严格单调增加.

定理 1 动态系统 (11), (12) 存在唯一的不动点.

文献 [26] 给出的定理 1 的证明方法比较复杂, 本文给出更为简洁的证明方法.

证明 设动态系统 (11), (12) 的不动点为 C_1^* , C_2^* , 则

$$C_1^* = g_1(dp(C_1^*, C_2^*)), \quad (13)$$

$$C_2^* = g_2(d - dp(C_1^*, C_2^*)). \quad (14)$$

设不动点处路径流量为 f_1^* , f_2^* , 则

$$f_1^* = \frac{d}{1 + e^{\theta(C_1^* - C_2^*)}}, \quad (15)$$

$$f_2^* = \frac{d}{1 + e^{-\theta(C_1^* - C_2^*)}}, \quad (16)$$

$$C_1^* = g_1(f_1^*), \quad (17)$$

$$C_2^* = g_2(f_2^*). \quad (18)$$

首先, 证明动态系统 (11), (12) 的不动点 C_1^* , C_2^* 的存在性. 路径流量可行集 $\mathbf{F} = \{(f_1, f_2) | f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, f_1 + f_2 = d\}$ 是非空有界闭凸集, 设路径出行费用可行集为 $\mathbf{X}$, 由于路径的出行费用关于路径流量的函数连续, 并由 (6) 式和 (7) 式可知: 给定路径出行费用初始值 $C_1^{(0)}$ 和 $C_2^{(0)}$, 集合 $\mathbf{X}$ 也是非空有界闭凸集. 因此, 动态系统 (11), (12) 是非空有界闭凸集 $\mathbf{X}$ 到自身的连续映射, 根据 Brouwer 不动点定理, 方程组 (13), (14) 至少存在一个解, 即动态系统 (11), (12) 至少存在一个不动点.

其次, 用反证法证明动态系统 (11), (12) 不动点 C_1^* , C_2^* 的唯一性. 假设动态系统 (11), (12) 存在 2 个不动点 C_1^{*1}, C_2^{*1} 和 C_1^{*2}, C_2^{*2} , 第 1 个不动点对应的路径流量分别为 f_1^{*1}, f_2^{*1} , 第 2 个不动点对应的路径流量为 f_1^{*2}, f_2^{*2} . 按 C_1^{*1} 和 C_1^{*2} 大小分 3 种情形讨论. 情形 1: 若 $C_1^{*1} < C_1^{*2}$, 由出行费用关于路径流量严格单调增加和 (17) 式可知 $f_1^{*1} < f_1^{*2}$, 又由 (15) 式不难推出 $C_2^{*1} < C_2^{*2}$, 由出行费用关于路径流量严格单调增加和 (18) 式可知 $f_2^{*1} < f_2^{*2}$, 所以 $f_1^{*1} + f_2^{*1} < f_1^{*2} + f_2^{*2}$, 这与总

需求固定矛盾. 情形 2: 若 $C_1^{*1} > C_1^{*2}$, 同理, 不难得到 $f_1^{*1} + f_2^{*1} > f_1^{*2} + f_2^{*2}$, 这也与总需求固定矛盾. 情形 3: 若 $C_1^{*1} = C_1^{*2}$, 由出行费用关于路径流量严格单调增加和 (17) 式可知 $f_1^{*1} = f_1^{*2}$, 又由 (15) 式不难推出 $C_2^{*1} = C_2^{*2}$, 这与 C_1^{*1}, C_2^{*1} 和 C_1^{*2}, C_2^{*2} 是 2 个不动点矛盾. 因此, 动态系统 (11), (12) 不动点唯一.

由 (15)–(18) 式可知, 不动点 C_1^*, C_2^* 对应的流量 f_1^*, f_2^* 即为 SUE 解, 因此本文也称之为平衡点.

在平衡点处, $C_1^{(n)} = C_1^*, C_2^{(n)} = C_2^*, f_1^{(n)} = f_1^*, f_2^{(n)} = f_2^*$, 设

$$p'_1 = - \left. \frac{\partial p_1^{(n)}}{\partial C_1^{(n)}} \right|_{(C_1^*, C_2^*)},$$

$$g'_1 = \left. \frac{dg_1(f_1)}{df_1} \right|_{f_1^*}, \quad g'_2 = \left. \frac{dg_2(f_2)}{df_2} \right|_{f_2^*}.$$

动态系统 (11), (12) 的 Jacobian 矩阵为

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial C_1^{(n)}}{\partial C_1^{(n-1)}} & \frac{\partial C_1^{(n)}}{\partial C_2^{(n-1)}} \\ \frac{\partial C_2^{(n)}}{\partial C_1^{(n-1)}} & \frac{\partial C_2^{(n)}}{\partial C_2^{(n-1)}} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

在平衡点处, 矩阵 $\mathbf{J}$ 的特征值为 $\lambda_1 = \phi$, $\lambda_2 = \phi - (1-\phi)dp'_1(g'_1 + g'_2)$, 注意到 $p'_1 > 0$, $g'_1 > 0$, $g'_2 > 0$, 根据非线性动力学的稳定性理论, 不难得到定理 2.

定理 2 两条路径的简单路网逐日动态分配系统平衡点渐进稳定的条件是

$$\phi - (1-\phi)dp'_1(g'_1 + g'_2) > -1. \quad (20)$$

由定理 2 不难得出: 当出行者对信息的依赖程度较小、需求不大、路径选择概率对出行费用不太敏感、路径的出行费用对路径流量不太敏感时, 交通流逐日动态演化系统的平衡点渐进稳定.

同时, 不难得到推论 1.

推论 1 若 $dp'_1(g'_1 + g'_2) < 1$, 不论参数 ϕ 取 $[0, 1]$ 内任何值, 2 条路径的简单路网交通流逐日动态演化系统平衡点渐进稳定.

推论 1 表明只要交通系统满足一定条件, 即需求不大、路径选择概率对出行费用不太敏感、路径的出行费用对路径流量不太敏感时, 不论出行者对信息的依赖程度多大, 路网交通流逐日动态演化系统的平衡点渐进稳定.

由此可知, 网络交通流逐日动态系统的平衡点即为 SUE 解, 但是平衡点在一定条件才稳定 (定

理 2), 下面通过一个数值实验, 来分析路网交通流的逐日动态演化规律.

4 数值实验

设路径的行程时间关于流量的函数采用 BPR 函数 $t = t_0[1 + 0.15(f/Q)^4]$, 其中 t_0 为路径的自由流行程时间, f 为路径流量, Q 为路径通行能力. 路径 1 的自由流行程时间 $t_{10} = 22 \text{ min}$, 通行能力 $Q_1 = 1500 \text{ 辆/h}$, 路径 2 的自由流行程时间 $t_{20} = 25 \text{ min}$, 通行能力 $Q_2 = 2000 \text{ 辆/h}$. OD 需求 $d = 1500 \text{ 辆/h}$. 出行费用只考虑出行时间. 当 OD 需求全部加载到路径 1 上时, 两条路径的出行时间分别为 25.3 min 和 25 min , 当 OD 需求全部加载到路径 2 上时, 两条路径的出行时间分别为 22 min 和 26.2 min .

由 (11),(12) 式, 网络交通流演化模型

$$C_1^{(n)} = \phi C_1^{(n-1)} + (1 - \phi)t_{10} \left[1 + 0.15 \times \left(\frac{d}{(1 + e^{\theta(C_1^{(n-1)} - C_2^{(n-1)}))} Q_1} \right)^4 \right], \quad (21)$$

$$C_2^{(n)} = \phi C_2^{(n-1)} + (1 - \phi)t_{20} \left[1 + 0.15 \times \left(\frac{d}{(1 + e^{-\theta(C_1^{(n-1)} - C_2^{(n-1)}))} Q_2} \right)^4 \right]. \quad (22)$$

路径流量按 (8), (9) 式分配得到.

4.1 演化规律

根据前面的分析, 参数 θ 和 ϕ 与出行者特性有关, 下面分析出行者具有不同特性时 (参数 ϕ 和 θ 取不同值), 系统的动态演化规律.

根据推论 1, 当 $dp'_1(g'_1 + g'_2) = 1$ 时, 平衡点稳定性处于临界情形, 不难计算出 $\theta = 0.923$.

情况 1 $\theta < 0.923$

当 $\theta < 0.923$ 时, 不论参数 ϕ 取 $[0, 1]$ 内任何值, 平衡点渐进稳定. 以 $\theta = 0.8, \phi = 0.1$ 为例, 路径 1 的流量演化如图 2 所示, 可以看出流量是稳定的, 并且稳定在平衡点, 这是因为此时满足 (20) 式.

情况 2 $\theta > 0.923$

当 $\theta > 0.923$ 时, 系统的动态演化出现周期运动. 图 3 至图 5 分别是 $\theta = 5, \theta = 6, \theta = 6.7$ 时路径 1 的流量关于参数 ϕ 的分岔图. 以图 3 为例说明

分岔图的绘制方法, 固定 $\theta = 5$, 横轴 ϕ 的取值从 0 开始以 0.001 的步长增加至 0.999, 对于每一个 ϕ , 迭代方程 (21) 和 (22) 的初始值 $C_1^{(0)}$ 取 (22, 25.3) 内的随机数, $C_2^{(0)}$ 取 (25, 26.2) 内的随机数, 迭代次数取 5000, 即演化天数为 5000 天, 根据 (21),(22) 式可以计算出 5000 天的期望出行费用, 又根据 (8),(9) 式计算得到两条路径 5000 天演化的流量, 为了保证系统的轨道已经收敛到吸引子上, 将前 1000 天的流量舍弃, 以 ϕ 为横坐标、路径 1 的流量为纵坐标, 就可以绘制出 $\theta = 5$ 时的分岔图.

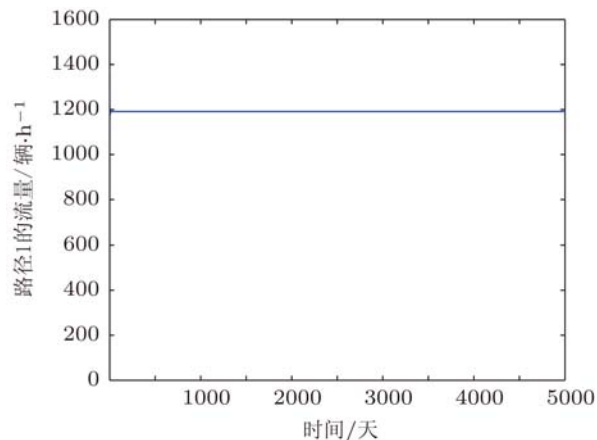


图 2 $\theta = 0.8, \phi = 0.1$ 时流量随天数变化

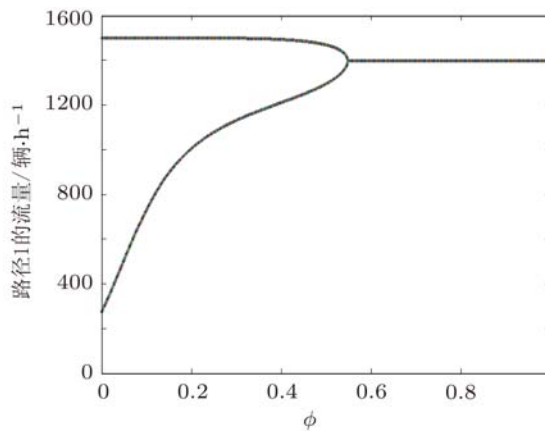


图 3 $\theta = 5$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图

从图 4 和图 5 可以看到, 随着 ϕ 从大到小变化, 系统出现稳定 — 倍周期分岔 — 半周期逆分岔的过程, 最后是 2 周期运动, 在一些非线性动力学模型中也可以看到这种现象^[35-39], 文献 [40—42] 称这种现象为周期泡现象 (period bubbling). 从图 4 和图 5 还可以看到, 随着 θ 的增大, 周期泡越来越多.

图 6 是 $\theta = 7$ 时路径 1 的流量关于参数 ϕ 的分

岔图. 可以看到这时出现了混沌现象, 随着 ϕ 从大到小变化, 系统出现稳定 — 倍周期分岔 — 混沌 — 半周期逆分岔的变化过程, 最后是 2 周期运动.

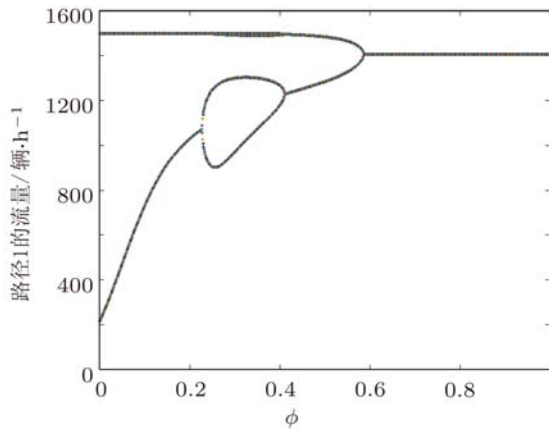


图 4 $\theta = 6$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图

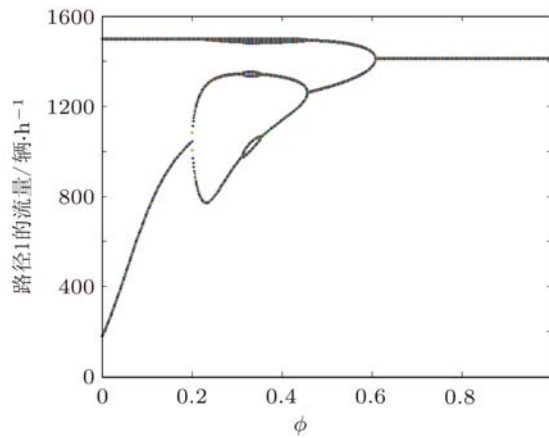


图 5 $\theta = 6.7$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图

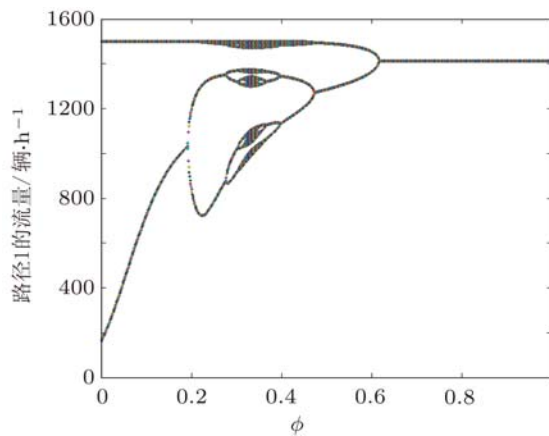


图 6 $\theta = 7$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图

分岔图是定性分析动力系统运动状态的有效工具, 可以很直观地判断系统的演化情况, 要定量

地判断系统的运动状态, 需要求出系统的 Lyapunov 指数, 如果 Lyapunov 指数大于 0, 系统是混沌的.

令 $\tilde{C}^{(n)} = C_1^{(n)} - C_2^{(n)}$, 由 (21) 和 (22) 两式相减得

$$\begin{aligned} \tilde{C}^{(n)} = & \phi \tilde{C}^{(n-1)} + (1 - \phi)t_{10} \\ & \times \left[1 + 0.15 \left(\frac{d}{(1 + e^{\theta \tilde{C}^{(n-1)}}) Q_1} \right)^4 \right] \\ & - (1 - \phi)t_{20} \\ & \times \left[1 + 0.15 \left(\frac{d}{(1 + e^{-\theta \tilde{C}^{(n-1)}}) Q_2} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (23)$$

再令

$$\begin{aligned} G(x) = & \phi x + (1 - \phi)t_{10} \\ & \times \left[1 + 0.15 \left(\frac{d}{(1 + e^{\theta x}) Q_1} \right)^4 \right] \\ & - (1 - \phi)t_{20} \\ & \times \left[1 + 0.15 \left(\frac{d}{(1 + e^{-\theta x}) Q_2} \right)^4 \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

原二维动态系统 (21),(22) 转化成典型的一维离散动态系统

$$\tilde{C}^{(n)} = G(\tilde{C}^{(n-1)}). \quad (25)$$

Lyapunov 指数计算公式^[30]

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln |G'(x_i)|. \quad (26)$$

通过数值实验发现, 当 $\theta > 6.983$ 时, 系统的 Lyapunov 指数将出现大于 0 的情况, 即系统将出现混沌现象. 图 7 至图 11 分别是 $\theta = 7.2, \theta = 8, \theta = 9, \theta = 12, \theta = 22$ 时路径 1 的流量关于参数 ϕ 的分岔图和系统的 Lyapunov 指数.

从图 6 至图 11 的分岔图可以发现流量的演化呈现以下特征. 如图 6 和图 7 所示, 从纵轴上看, 当 θ 较小时, 混沌区域被分隔成多片, 随着 θ 的增大, 混沌区域逐渐连成一片; 和一般非线性系统类似, 混沌区域中间存在周期 3、周期 5 等奇数周期运动窗口 (注意图 10 的分岔图在 $\phi = 0.4$ 附近不是 2 周期运动, 而是周期 3 运动, 高流量的 2 个状态几乎重合, 图 11 也有类似的情况), 此时伴随阵发混沌现象, 印证了周期 3 意味着混沌的观点^[43]; 如图 10 和图 11 所示, 从横轴上看, 当 θ 较大时, 奇数周期窗口较宽, 将混沌区域分隔成多片.

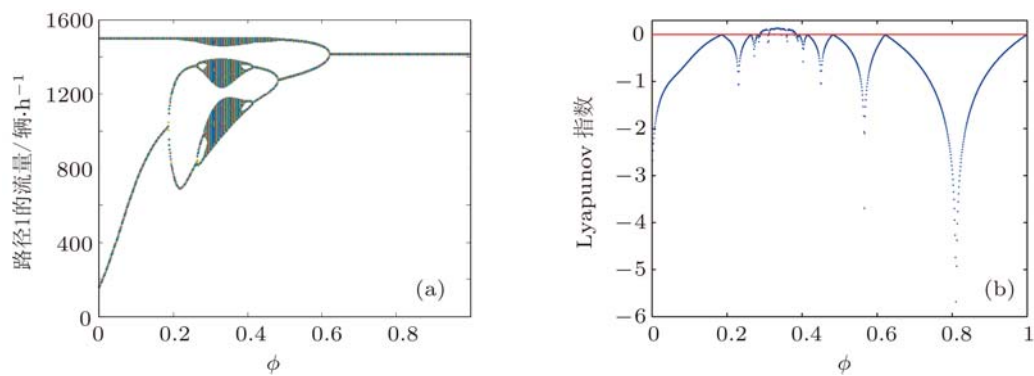


图 7 $\theta = 7.2$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图和系统的 Lyapunov 指数 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图

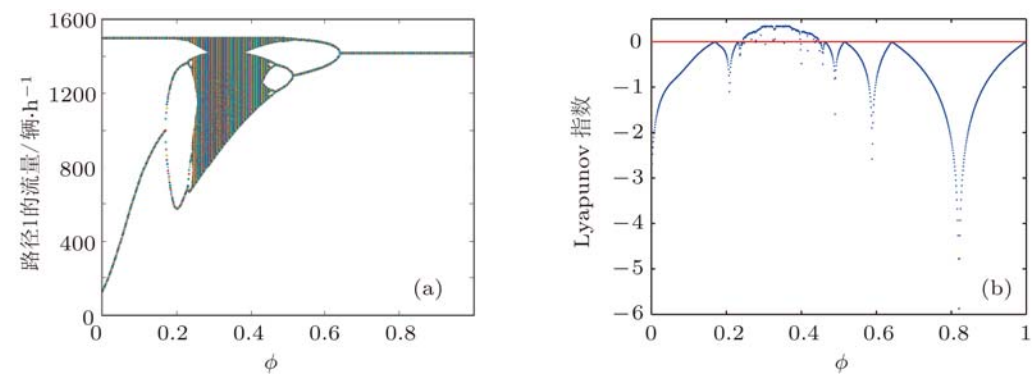


图 8 $\theta = 8$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图和系统的 Lyapunov 指数 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图

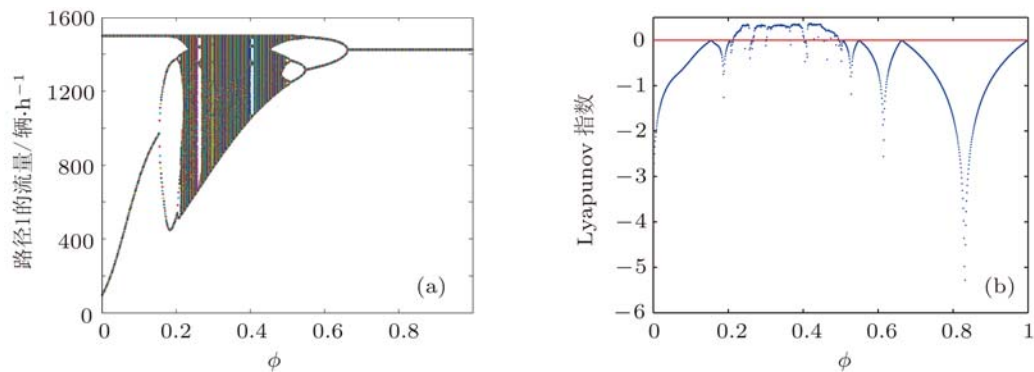


图 9 $\theta = 9$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图和系统的 Lyapunov 指数 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图

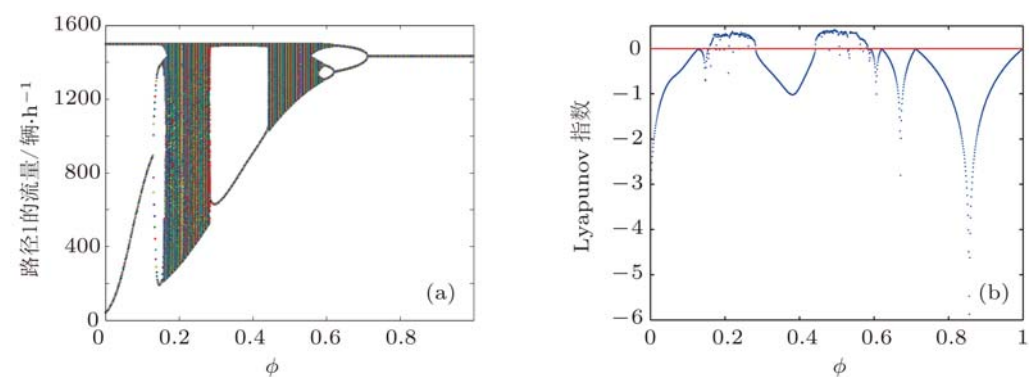
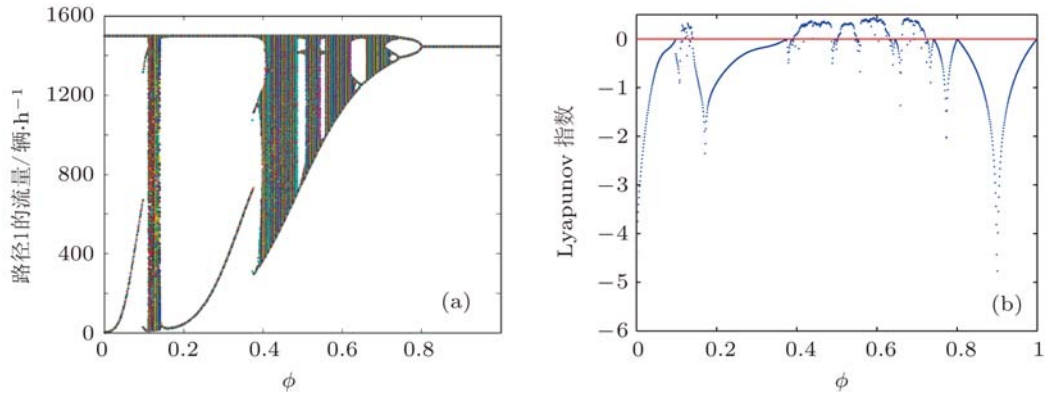


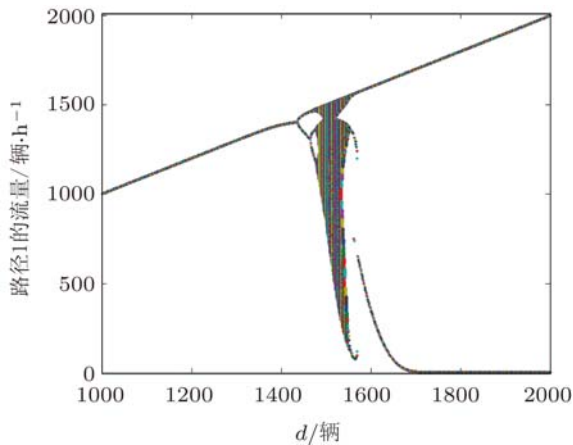
图 10 $\theta = 12$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图和系统的 Lyapunov 指数 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图


 图 11 $\theta = 22$ 时流量关于 ϕ 的变化分岔图和系统的 Lyapunov 指数 (a) 分岔图; (b) Lyapunov 指数图

4.2 混沌控制

根据以上分析, 当出行者特征 (用参数 θ 和 ϕ 来表征) 满足一定条件时, 系统将出现混沌现象, 即网络的交通流出现非周期的振荡, 这对交通管理带来很大的不便, 为了控制混沌, 一种切实可行的方法是通过调控 OD 需求 d 来控制混沌, 下面来探讨如何通过调控 OD 需求 d 来控制混沌.

以 $\theta = 8, \phi = 0.3$ 为例, 从图 8 可以看到, 系统的演化过程是混沌的, 保持参数 $\theta = 8, \phi = 0.3$ 不变, 改变需求 d , 流量关于需求 d 的分岔图如图 12 所示.


 图 12 $\theta = 8, \phi = 0.3$ 时流量关于 d 的变化分岔图

由图 12, 要想控制住混沌, 一种最直接的方法是将需求 d 减小, 比如将需求 d 控制在 1400 辆, 那么系统将稳定在平衡点, 但是在实际的交通管理中, 大幅度减小需求是非常困难的, 下面试图运用 OGY 法微调需求镇定混沌. OGY 法的基本思想

是利用混沌运动对参数扰动的敏感性和混沌轨道的遍历性^[44,45], 可将混沌运动控制到一定的轨道上. 文献 [44] 以三维系统为例推导了 OGY 混沌控制法, 本文将推导一维离散动力系统的 OGY 混沌控制法.

设动力系统 (24) 的平衡点为 $(\tilde{C}^*, G(\tilde{C}^*, d))$, 混沌的控制参数为 d , 平衡点处导数

$$\dot{G}_{\tilde{C}^*} = \left. \frac{\partial G}{\partial \tilde{C}} \right|_{(\tilde{C}^*, d)}, \quad \dot{G}_d = \left. \frac{\partial G}{\partial d} \right|_{(\tilde{C}^*, d)}.$$

对 $\tilde{C}^{(n+1)} = G(\tilde{C}^{(n)}, d^{(n)})$ 近似线性化为

$$\tilde{C}^{(n+1)} - \tilde{C}^* = \dot{G}_{\tilde{C}^*}(\tilde{C}^{(n)} - \tilde{C}^*) + \dot{G}_d(d^{(n)} - d). \quad (27)$$

令

$$\Delta \tilde{C}^{(n)} = \tilde{C}^{(n)} - \tilde{C}^*, \quad (28)$$

$$\Delta d^{(n)} = d^{(n)} - d. \quad (29)$$

进一步得到

$$\Delta \tilde{C}^{(n+1)} = \dot{G}_{\tilde{C}^*} \cdot \Delta \tilde{C}^{(n)} + \dot{G}_d \cdot \Delta d^{(n)}. \quad (30)$$

将系统控制到不动点, 令

$$\Delta \tilde{C}^{(n+1)} = 0. \quad (31)$$

因此, 得到需求 d 的调控方程

$$\Delta d^{(n)} = -\frac{\dot{G}_{\tilde{C}^*} \cdot \Delta \tilde{C}^{(n)}}{\dot{G}_d}. \quad (32)$$

设需求 d 的最大调控阈值为 δ , 即

$$|\Delta d^{(n)}| < \delta. \quad (33)$$

由 (32) 式和 (33) 式得到混沌控制的启动条件

$$|\Delta \tilde{C}^{(n)}| < \left| \frac{\dot{G}_d}{\dot{G}_{\tilde{C}^*}} \right| \cdot \delta. \quad (34)$$

当给定需求 d 的最大调控阈值 δ 后, 根据 (34) 式可以计算出哪天启动混沌控制, 调整需求 d 的幅度通过 (32) 式计算得到. 需要说明一点的是, 调控方程 (32) 和 (34) 对一般的一维离散系统也适用.

分别取 $\delta = 10$ 和 $\delta = 1$, 系统的混沌控制过程如图 13 和图 14 所示. 当 $\delta = 10$ 时, 系统在第 5 天就启动了控制, 当 $\delta = 1$ 时, 系统在第 62 天才启动控制, 前 61 天系统做混沌运动. 由此可见, 调控阈值 δ 越小, 启动控制的时间越长. 应该注意到, 在实际的交通应用中, 需求可能调控的最大范围 δ 应该根据实际情况来确定.

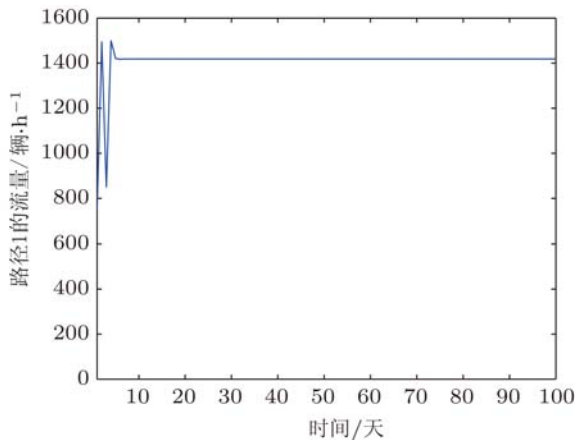


图 13 $\delta = 10$ 时的混沌控制过程

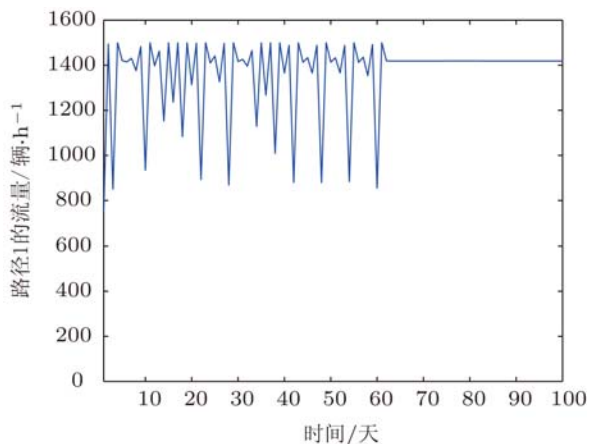


图 14 $\delta = 1$ 时的混沌控制过程

5 结论

以含 2 条平行路径的简单路网为例, 建立了逐日动态交通流演化模型, 在数值实验中, 通过改变与出行者特性有关的参数 θ 和 ϕ 的取值, 分析系统的演化规律, 研究发现:

1. 动态系统的不动点就是随机用户平衡解, 并且平衡点存在且唯一, 平衡点渐进稳定需要满足一定的条件 (定理 2).

2. 当 $0.923 < \theta < 6.983$ 时系统的演化出现分岔现象. 随着 ϕ 从大到小变化, 系统出现稳定 — 倍周期分岔 — 半周期逆分岔的过程, 最后是 2 周期运动.

3. 当 $\theta > 6.983$ 时系统的演化出现混沌现象. 总体上, 随着 ϕ 从大到小变化, 系统出现稳定 — 倍周期分岔 — 半周期逆分岔的过程, 最后是 2 周期运动; 从分岔图的纵轴上看, 当 θ 较小时, 混沌区域被分隔成多片, 随着 θ 的增大, 混沌区域逐渐连成一片; 混沌区域中间存在周期奇数周期运动窗口, 此时伴随阵发混沌现象; 从分岔图的横轴上看, 当 θ 较大时, 奇数周期窗口较宽, 将混沌区域分隔成多片.

4. 将原二维动态系统转化成一维系统, 推导出了混沌控制方程, 数值实验结果表明, 当系统出现混沌时, 通过调整需求 d 可以控制混沌, 并且调控阈值越小, 启动控制的时间越长.

对本文的结论做两点说明. 第一, 当 $\theta < 0.923$ 时, 流量的演化是稳定的, 也即当出行者路径选择的随机程度很大时, 经过若干天后, 路径流量收敛到平衡点; 当 $\theta > 0.923$ 时, 流量的演化出现不稳定情况, 即当行者路径选择的随机程度较小时, 路径流量振荡. 由此可见, 微观个体出行者路径选择的随机性对宏观流量演化的稳定性有“正”作用. 第二, 本文使用的是 2 条路径的简单网络, 得到的结论在此网路下才成立, 对于更复杂的网络 (如方格路网), 同样可以建立交通流演化的非线性动力学模型, 分岔和混沌现象也应该存在, 只不过这时的动态系统是更复杂的高维非线性系统, 其分岔和混沌现象可能更加复杂, 这将在以后的研究工作中展开.

- [1] Wardrop J G 1952 *Proceedings of the Institute of Civil Engineers* U.K., January 24, 1952 p325
 [2] Sheffi Y 1985 *Urban Transportation Networks: Equilibrium Anal-*

ysis with Mathematical Programming Methods (Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, Inc.) p22

- [3] Daganzo C, Sheffi Y 1977 *Transp. Sci.* **11** 253

- [4] Vythoulkas P C 1990 *Transp. Res. B* **24** 453
- [5] Leurent F 1993 *Eur. J. Oper. Res.* **71** 205
- [6] Bell M G H 1995 *Transp. Res. B* **29** 125
- [7] Nakayama S, Kitamura R, Fujii S 1999 *Transport. Res. Rec.* **1676** 30
- [8] Nakayama S, Kitamura R 2000 *Transport. Res. Rec.* **1725** 63
- [9] Nakayama S, Kitamura R, Fujii S 2001 *Transport. Res. Rec.* **1752** 62
- [10] Klügl F, Bazzan A L C 2002 *Proc. of the First Int. Joining Conf. on Autonomous Agents and Multi-agent Systems* Bologna, Italy, July 15–19, 2002 p217
- [11] Klügl F, Bazzan A L C 2004 *J. Artificial Societies and Social Simulation* **7** 1
- [12] Klügl F, Bazzan A L C 2004 *J. Intelligent Transportation Systems* **8** 223
- [13] Liu T L, Huang H J 2005 *Intelligent Transportation System* **4** 17 (in Chinese) [刘天亮, 黄海军 2005 *ITS 通讯* **4** 17]
- [14] Liu T L, Huang H J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6321 (in Chinese) [刘天亮, 黄海军 2007 *物理学报* **56** 6321]
- [15] Kim H, Oh J S, Jayakrishnan R 2009 *KSCE J. Civil Engineering* **13** 117
- [16] Smith M J 1984 *Transp. Sci.* **18** 245
- [17] Friesz T L, Bernstein D, Mehta N J, Tobin R L, Ganjalizadeh S 1994 *Oper. Res.* **42** 1120
- [18] Zhang D, Nagurney A 1996 *Transp. Res. B* **30** 245
- [19] Nagurney A, Zhang D 1997 *Transp. Sci.* **31** 147
- [20] Watling D 1999 *Transp. Res. B* **33** 281
- [21] Cho H J, Hwang M C 2005 *Math. Comput. Model.* **41** 501
- [22] Mounce R 2006 *Transp. Res. B* **40** 779
- [23] Guo R Y, Huang H J 2008 *J. Management Sciences in China* **11** 12 (in Chinese) [郭仁拥, 黄海军 2008 *管理科学学报* **11** 12]
- [24] Horowitz J L 1984 *Transp. Res. B* **18** 13
- [25] Cascetta E, Cantarella G E 1991 *Transp. Res. A* **25** 277
- [26] Cantarella G E, Cascetta E 1995 *Transp. Sci.* **29** 305
- [27] Watling D, Hazelton M L 2003 *Netw. Spat. Econ.* **3** 349
- [28] Bie J, Lo H K 2010 *Transp. Res. B* **44** 90
- [29] Nakayama S 2004 *The 83rd Annual Meeting of the Transportation Research Board* Washington, D.C., January 11–15, 2004
- [30] Liu Z H 2006 *Fundamentals and Applications of Chaotic Dynamic* (Beijing: Higher Education Press) p9-14, 60 (in Chinese) [刘宗华 2006 *混沌动力学基础及其应用* (北京: 高等教育出版社) 第 9—14, 60 页]
- [31] Liu F, Guan Z H, Wang H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 2405
- [32] Zhang J F, Pei Q Y, Zhang X L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080503
- [33] Wang J W, Ma Q H, Zeng L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 080506
- [34] Li N, Sun H Y, Zhang Q L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 010503
- [35] Wang B H 1986 *J. Univ. Sci. Technol. China* **16** 257 (in Chinese) [汪秉宏 1986 *中国科学技术大学学报* **16** 257]
- [36] Stone L 1993 *Nature* **365** 617
- [37] Ruxton G D, Rohani P 1998 *Theor. Popul. Biol.* **53** 175
- [38] Stone L, Hart D 1999 *Theor. Popul. Biol.* **55** 227
- [39] Yu W B, Wei X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3969 (in Chinese) [于万波, 魏小鹏 2006 *物理学报* **55** 3969]
- [40] Vandermeer J 1997 *Ecol. Model.* **95** 311
- [41] Peng M S 2005 *Chaos Solitons Fract.* **24** 1279
- [42] Peng M S 2005 *Chaos Solitons Fract.* **25** 1123
- [43] Li T Y, Yorke J A 1975 *Amer. Math. Monthly* **82** 985
- [44] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [45] Hu G, Xiao J H, Zheng Z G 2000 *Chaos Control* (Shanghai: Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House) p8–20 (in Chinese) [胡岗, 萧井华, 郑志刚 2000 *混沌控制* (上海: 上海科技教育出版社) 第 8—20 页]

Chaotic behavior in the dynamical evolution of network traffic flow and its control*

Liu Shi-Xu Guan Hong-Zhi[†] Yan Hai

(Beijing Key Laboratory of Transportation Engineering, Beijing University of Technology, Beijing 100124, China)

(Received 13 December 2011; revised manuscript received 29 December 2011)

Abstract

This paper presents the day-to-day dynamic evolution of network traffic flow in a simple two-route network. Firstly, a day-to-day dynamical assignment model is formulated, which can depict the evolution of network traffic flow. We have proved that the fixed point of the dynamical system, which is the stochastic user equilibrium solution, exists and is unique. Secondly, based on nonlinear dynamics theory, an equilibrium stability condition for the network is derived. Moreover, the evolution of network traffic flow is investigated through numerical experiments. Meanwhile, periodic and chaotic flows are discovered under certain conditions. Finally, a chaotic control method is derived considering OD demand as control variable.

Keywords: network traffic flow, route choice, dynamical evolution, chaos

PACS: 05.45.-a, 05.45.Gg, 05.45.Pq, 01.75.+m

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2012CB725403), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50978008), and the Natural Science Foundation of Beijing, China (Grant No. 8102007).

[†] E-mail: hguan@bjut.edu.cn