

# 统一坐标系下二维气动方程组的 Runge-Kutta 间断 Galerkin 有限元方法\*

赵国忠<sup>1)†</sup> 蔚喜军<sup>2)</sup>

1) (包头师范学院数学科学学院, 包头 014030)

2) (北京应用物理与计算数学研究所计算物理实验室, 北京 100088)

(2011 年 8 月 27 日收到; 2011 年 10 月 20 日收到修改稿)

构造了统一坐标系下二维可压缩气动方程组的 Runge-Kutta 间断 Galerkin(RKDG) 有限元格式. 文中将流体力学方程组和几何守恒律统一求解, 所有计算都在固定的网格上进行, 在计算过程中不需要网格节点的速度信息. 文中对几个数值算例进行了数值模拟, 得到了较好的数值模拟结果.

**关键词:** 统一坐标系, Runge-Kutta 间断 Galerkin 有限元方法, 二维气动方程组

**PACS:** 02.30.Jr, 02.70.Dh, 02.60.Lj

## 1 引言

流体力学计算方法按其采用坐标系不同, 可分为 Euler 方法和 Lagrange 方法两大类. Euler 方法网格是固定的, 对大变形问题的数值模拟比较理想, 但是对内界面和自由面没有十分清晰的分辨能力. Lagrange 方法中网格跟随流体运动, 对于许多有内界面或自由面的问题是一种理想的方法. 然而多维 Lagrange 方法容易发生网格扭曲甚至相交. 为了克服各自的限制, 发展了两种方法相结合的方法, 具有代表性的是任意 Lagrangian-Eulerian (arbitrary Lagrangian-Eulerian, ALE) 方法<sup>[1,2]</sup>和基于统一坐标系下的数值方法<sup>[3,4]</sup>.

在统一坐标系下, 流体动力学的各物理量看成是时间和伪粒子 (pseudo-particles) 的某种固有特征函数, 伪粒子运动速度为  $hq$ ,  $q$  是流体质点速度. 统一坐标包括 Euler 坐标和 Lagrange 坐标两种特殊情况, 当  $h = 0$  时为 Euler 坐标,  $h = 1$  时为 Lagrange 坐标. 统一坐标系相对于传统的 Euler 坐标和 Lagrange 坐标有一定的优势, 近年来被广泛应用于气动方程组的数值求解中.

1973 年间断有限元方法由 Reed 和 Hill 首先提出, 并应用于求解中子输运方程, 但这种方法长期以来一直没有得到很好的研究和应用. 直到 20 世纪 80 年代后期和 90 年代, Cockburn 等<sup>[5-10]</sup>结合 Runge-Kutta 方法, 将间断有限元方法推广到非线性一维守恒律方程和方程组<sup>[5-7]</sup>、高维守恒律方程和方程组<sup>[8,9]</sup>以及对流扩散方程<sup>[10]</sup>, 并给出了部分收敛性理论证明后, 这一方法才引起人们的注意, 并逐渐开始应用于流体力学计算领域<sup>[11,12]</sup>. 目前间断有限元方法除应用于双曲守恒律计算外, 还被广泛应用于求解其他类型的方程, 如椭圆方程、Hamilton-Jacobi 方程、对流扩散方程、KdV 型方程和可压缩 N-S 方程等. 以上的大部分工作都是在 Euler 坐标系下完成的. 从 Lagrange 坐标系下微分形式的守恒律方程出发, Loubère 等构造了基于 Bernstein 多项式和自由度局部 Riemann 解法器的间断有限元方法, 他们构造的格式具有稳定和保正的特征. 贾祖朋等<sup>[13]</sup>构造了 Lagrange 坐标系下的谱间断有限元方法, 其特色在于借助于 Maire 等<sup>[14]</sup>提出的方法来确定网格节点的速度, 并由此给出间断有限元方法中用到的数值通量.

本文将 Runge-Kutta 间断 Galerkin (RKDG) 方

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10771019, 11171038) 和内蒙古自治区高等学校科学研究项目基金 (批准号: NJZZ12198) 资助的课题.

† E-mail: zhaoguozhongbttc@sina.com

法用于求解统一坐标系下的二维气动方程组,构造了统一坐标系下二维可压缩气动方程组的 RKDG 有限元方法. 与以往工作不同点在于: 将流体力学方程组和几何守恒律统一求解; 所有计算都在固定的网格上进行, 在计算过程中不需要网格节点的速度信息; 本文在构造数值流通量的过程中, 采用了较简单的局部 Lax-Friedrichs 数值流, 避免了通过节点速度来确定数值流通量的复杂计算. 文中对几个数值算例利用一次元进行了数值模拟, 得到了较好的数值模拟结果.

## 2 统一坐标系下的 RKDG 有限元方法

考虑二维欧拉方程组

$$\mathbf{W}_t + F(\mathbf{W})_x + G(\mathbf{W})_y = 0, \quad (1)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{W} &= \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho \tilde{E} \end{pmatrix}, \\ F(\mathbf{W}) &= \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho \tilde{E} + p)u \end{pmatrix}, \\ G(\mathbf{W}) &= \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho \tilde{E} + p)v \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

$\rho$  为密度,  $u, v$  分别是  $x, y$  方向的速度分量,  $\tilde{E}$  为比总能,  $p$  为压力,  $\tilde{E} = \frac{p}{\rho(\gamma-1)} + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$ ,  $\gamma$  为绝热比.

令

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{J}} &= \begin{pmatrix} U & X \\ V & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\xi x & \partial_\eta x \\ \partial_\xi y & \partial_\eta y \end{pmatrix}, \\ J((\xi, \eta), t) &= \partial_\xi x \partial_\eta y - \partial_\xi y \partial_\eta x, \\ J((\xi, \eta), 0) &= 1, \end{aligned} \quad (3)$$

引进变换

$$dt = d\tau,$$

$$dx = h u d\tau + U d\xi + X d\eta, \quad (4)$$

$$dy = h v d\tau + V d\xi + Y d\eta,$$

并考虑到几何守恒律, 可得统一坐标系下的二维气动方程组

$$\mathbf{E}_t + F_l(\mathbf{E})_\xi + G_l(\mathbf{E})_\eta = 0, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \begin{pmatrix} \rho J \\ \rho J u \\ \rho J v \\ \rho J \tilde{E} \\ U \\ V \\ X \\ Y \end{pmatrix}, \\ F_l(\mathbf{E}) &= \begin{pmatrix} -\rho(1-h)J_{21} \\ -\rho(1-h)J_{21}u + pY \\ -\rho(1-h)J_{21}v - pX \\ -\rho(1-h)J_{21}\tilde{E} - pJ_{21} \\ -hu \\ -hv \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ G_l(\mathbf{E}) &= \begin{pmatrix} \rho(1-h)J_{31} \\ \rho(1-h)J_{31}u - pV \\ \rho(1-h)J_{31}v + pU \\ \rho(1-h)J_{31}\tilde{E} + pJ_{31} \\ 0 \\ 0 \\ -hu \\ -hv \end{pmatrix}, \\ J_{21} &= -uY + vX, \\ J_{31} &= -uV + vU. \end{aligned} \quad (6)$$

方程组 (5) — (7) 在  $h = 1$  时是弱双曲的, 即该方程组有 8 个实特征值, 但只有 7 个线性无关的特征向量. 令  $\alpha$  和  $\beta$  是  $\xi$ - $\eta$  平面任意方向向量并且满足  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ . 定义  $\bar{\alpha} = \alpha\xi_x + \beta\xi_y$ ,

$\bar{\beta} = \alpha\eta_x + \beta\eta_y$ , 其中  $\xi_x = Y/J$ ,  $\xi_y = -X/J$ ,  $\eta_x = -V/J$ ,  $\eta_y = -U/J$ . 方程组 (5)—(7) 在  $h = 1$  时的特征值为  $\lambda_1 = 0$  (6 重),  $\lambda_{\pm} = \pm c(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^{1/2}$ , 其中  $c$  为声速. 方程组 (5)—(7) 在  $h \neq 1$  时是双曲的.  $h \neq 1$  时该方程组的特征值为  $\lambda_1 = 0$  (4 重),  $\lambda_2 = (1-h)(\bar{\alpha}u + \bar{\beta}v)$  (2 重),  $\lambda_{\pm} = \lambda_2 \pm c(\bar{\alpha}^2 + \bar{\beta}^2)^{1/2}$ . 以下利用间断有限元方法求解方程组 (5)—(7).

令  $T_h$  表示对计算区域的一个剖分, 用  $K$  表示剖分单元,  $e$  表示单元  $K$  的边界,  $n_{e,K}$  表示单元  $K$  的边界  $e$  的外法向. 用连续函数  $w$  乘 (5) 式的两端, 并利用 Green 公式可得

$$\int_K \mathbf{E}_t w d\xi d\eta - \int_K (F_l, G_l) \cdot \nabla w d\xi d\eta + \int_e (F_l, G_l) \cdot n_{e,K} w ds = 0. \quad (8)$$

定义由分片多项式构成的有限元空间为

$$V_h = \{v : v|_K \in P^k(K), \forall K \in T_h\}, \quad (9)$$

其中  $P^k(K)$  表示定义在单元  $K$  上至多  $k$  次的多项式. 求解方程组 (5)—(7) 的半离散间断 Galerkin 有限元方法为: 求  $E_h \in V_h$ , 使得对于任意的检验函数  $w_h \in V_h$  和任意的剖分单元  $K$ , 都有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_K E_h w_h d\xi d\eta - \int_K (F_l, G_l) \cdot \nabla w_h d\xi d\eta + \int_e (F_l, \widehat{G_l}) \cdot n_{e,K} w_h ds = 0, \quad (10)$$

其中  $(F_l, \widehat{G_l}) \cdot n_{e,K}$  表示单元边界上的数值流通量, 记为  $h_{e,K}$ . 本文采用局部 Lax-Friedrichs 数值流通量

$$h_{e,K}(E^-, E^+) = \frac{1}{2} [f(E^+) \cdot n_{e,K} + f(E^-) \cdot n_{e,K} - \alpha(E^+ - E^-)], \quad (11)$$

其中  $f = (F_l, G_l)$ ,  $\alpha$  为 Jacobi 矩阵  $\frac{\partial}{\partial E} f \cdot n_{e,K}$  在剖分单元及其相邻单元上的最大特征值. 利用数值积分公式

$$\begin{aligned} & \int_K (F_l, G_l) \cdot \nabla w_h d\xi d\eta \\ & \approx \sum_{j=1}^M \omega_j (F_l(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}, t), G_l(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}, t)) \\ & \quad \times \nabla w_h(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}) |K|, \\ & \int_e (F_l, \widehat{G_l}) \cdot n_{e,K} w_h ds \end{aligned} \quad (12)$$

$$\approx \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(\xi_{el}, \eta_{el}, t) w_h(\xi_{Kj}, \eta_{el}) |e|, \quad (13)$$

可得方程组 (5)—(7) 的有限元离散格式为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_K E_h w_h d\xi d\eta \\ & - \sum_{j=1}^M \omega_j (F_l(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}, t), G_l(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}, t)) \\ & \quad \times \nabla w_h(\xi_{Kj}, \eta_{Kj}) |K| \\ & + \sum_{l=1}^L \omega_l h_{e,K}(\xi_{el}, \eta_{el}, t) w_h(\xi_{el}, \eta_{el}) |e| = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

上述半离散格式写成常微分方程组为

$$\frac{\partial}{\partial t} E_h = L_h(E_h). \quad (15)$$

对于常微分方程组, 利用  $k+1$  阶总变差减少 (TVD) Runge-Kutta 方法进行时间离散. 设  $\{t^n\}_{n=0}^N$  是  $[0, T]$  的一个剖分,

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n \quad n = 0, 1, \dots, N-1.$$

设  $E_h^0 = P_{V_h}(E_0)$ , 对  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , 计算  $E_h^{n+1}$  的步骤如下:

- 1) 令  $E_h^0 = E_h^n$ ;
- 2) 对  $i = 1, \dots, k+1$  计算中间函数

$$E_h^{(i)} = \sum_{l=0}^{i-1} \left\{ \alpha_{il} E_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(E_h^{(l)}) \right\};$$

- 3) 令  $E_h^{n+1} = E_h^{k+1}$ .

这里算子  $P_{V_h}$  是有限元空间  $V_h$  到  $L^2$  的投影. 本文采用 2 阶 TVD Runge-Kutta 方法进行时间离散. 时间离散格式中的参数取值为  $\alpha_{10} = \beta_{10} = 1$ ,  $\alpha_{20} = \alpha_{21} = \beta_{21} = \frac{1}{2}$ ,  $\beta_{20} = 1$ .

对于大多数非线性流体力学问题, 如果解是间断的, 那么仅用上述做法就会产生解的虚假震荡, 导致数值不稳定性, 为此要在每个时间步引进限制器. 引入局部斜率限制算子  $\Lambda \Pi_h$ , 上述时间离散格式变为: 设  $E_h^0 = \Lambda \Pi_h P_{V_h}(E_0)$ , 对  $n = 0, 1, \dots, N-1$ , 计算  $E_h^{n+1}$  的步骤如下:

- 1) 令  $E_h^0 = E_h^n$ ;
- 2) 对  $i = 1, \dots, k+1$  计算中间函数

$$E_h^{(i)} = \Lambda \Pi_h \sum_{l=0}^{i-1} \left\{ \alpha_{il} E_h^{(l)} + \beta_{il} \Delta t^n L_h(E_h^{(l)}) \right\};$$

- 3) 令  $E_h^{n+1} = E_h^{k+1}$ .

对于  $\Lambda \Pi_h$  的具体形式可以参见文献 [9]. Cockburn 等 [9] 给出了一个实用的  $\Lambda \Pi_h$ .

本文采用四边形网格. 设计算区域为  $[a, b] \times [c, d]$ , 相应的网格剖分为

$$T_h = \{I_{ij} = \{(\xi, \eta) : \xi_{i-1/2} \leq \xi \leq \xi_{i+1/2}, \\ \eta_{j-1/2} \leq \eta \leq \eta_{j+1/2}\}, \\ 1 \leq i \leq nx, 1 \leq j \leq ny\},$$

其中

$$a = \xi_{\frac{1}{2}} < \xi_{\frac{3}{2}} < \cdots < \xi_{nx+\frac{1}{2}} = b, \\ c = \eta_{\frac{1}{2}} < \eta_{\frac{3}{2}} < \cdots < \eta_{ny+\frac{1}{2}} = d.$$

令

$$\xi_i = (\xi_{i-1/2} + \xi_{i+1/2})/2, \\ \Delta\xi_i = \xi_{i+1/2} - \xi_{i-1/2}, \\ \eta_j = (\eta_{j-1/2} + \eta_{j+1/2})/2, \\ \Delta\eta_j = \eta_{j+1/2} - \eta_{j-1/2}, \\ h = \max\left(\max_{1 \leq i \leq nx} \Delta\xi_i, \max_{1 \leq j \leq ny} \Delta\eta_j\right),$$

则  $(\xi_i, \eta_j)$  表示单元  $I_{ij}$  中心的坐标. 对于线性元, 未知函数在单元  $I_{ij}$  上的近似可以表示为

$$E_h(\xi, \eta, t) = \bar{E}(t) + E_\xi(t)\Phi_i(\xi) + E_\eta(t)\Psi_j(\eta), \quad (16)$$

其中

$$\Phi_i(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\Delta\xi_i}, \quad \Psi_j(\eta) = \frac{\eta - \eta_j}{\Delta\eta_j}. \quad (17)$$

线性元时的质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \Delta\xi_i \Delta\eta_j \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{12}, \frac{1}{12}\right).$$

对于以上四边形下的线性元, 可按如下方式构造斜率限制器. 将自由度  $E_\xi$  用下式替换:

$$\bar{m}(E_\xi/2, \bar{E}_{i+1,j} - \bar{E}_{i,j}, \bar{E}_{i,j} - \bar{E}_{i-1,j}), \quad (18)$$

其中  $\bar{m}$  表示总变差有界 (TVB) minmod 函数

$$\bar{m}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ = \begin{cases} a_1 & |a_1| \leq Mh^2, \\ m(a_1, a_2, \cdots, a_n) & \text{其他}, \end{cases} \quad (19)$$

其中

$$m(a_1, a_2, \cdots, a_n) \\ = \begin{cases} s \cdot \min_{1 \leq j \leq n} |a_j| \\ \operatorname{sign}(a_1) = \operatorname{sign}(a_2) = \cdots \\ = \operatorname{sign}(a_n) = s, \\ 0 & \text{其他}, \end{cases} \quad (20)$$

$M$  为 TVB 常数, 不同的问题其取值也可以改变. 同理由自由度  $E_\eta$  用下式替换:

$$\bar{m}(E_\eta/2, \bar{E}_{i,j+1} - \bar{E}_{i,j}, \bar{E}_{i,j} - \bar{E}_{i,j-1}). \quad (21)$$

对于有限元格式中的体积分采用五点 Gauss 积分公式, 对线积分采用三点 Gauss 积分公式. 可以根据每一个时间步中计算得到的守恒量得到流体的速度, 进而可以确定流体在空间的位置. 例如对于位于单元  $I_{ij}$  中心的流体在  $t^{n+1}$  时刻的位置可以通过以下公式来确定:

$$x^{n+1} = x^n + \frac{\Delta t^n}{2}(hu^n + hu^{n+1}), \\ y^{n+1} = y^n + \frac{\Delta t^n}{2}(hv^n + hv^{n+1}). \quad (22)$$

在计算过程中, 如果需要确定网格在各个时刻的位置, 可以通过对每个网格节点所关联的四个单元在该节点的速度平均得到. 例如考虑单元  $I_{ij}$  的一个顶点  $(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}})$ , 与其相邻的四个计算单元为  $I_{ij}, I_{i-1,j}, I_{i-1,j-1}, I_{i,j-1}$ . 根据计算得到的这些单元的自由度可以得到节点  $I_{ij}$  的四个速度, 记为

$$u_{ij}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), v_{ij}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), \\ u_{i-1,j}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), v_{i-1,j}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), \\ u_{i-1,j-1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), v_{i-1,j-1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), \\ u_{i,j-1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right), v_{i,j-1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}\right).$$

则网格节点在  $n+1$  时刻的位置可以由下式确定:

$$x^{n+1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n+1}\right) \\ = x^n\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right) + \frac{h}{8}\left(u_{ij}^n + u_{ij}^{n+1} \right. \\ \left. + u_{i-1,j}^n + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^n \right. \\ \left. + u_{i-1,j-1}^{n+1} + u_{i,j-1}^n + u_{i,j-1}^{n+1}\right), \quad (23) \\ y^{n+1}\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}, t^{n+1}\right) \\ = y^n\left(\xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta_{j-\frac{1}{2}}, t^n\right) + \frac{h}{8}\left(v_{ij}^n + v_{ij}^{n+1} \right. \\ \left. + v_{i-1,j}^n + v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i-1,j-1}^n + v_{i-1,j-1}^{n+1} \right. \\ \left. + v_{i,j-1}^n + v_{i,j-1}^{n+1}\right), \quad (24)$$

其中上标  $n$  和  $n+1$  表示  $t^n$  和  $t^{n+1}$  时刻物理量的取值. 值得一提的是, 在计算物理量的过程中并不会用到网格节点的速度信息, 只有需要了解计算过程中网格的演化时才用到节点速度, 因此这里采用了简单的算术平均来确定网格节点速度. 时间离散

过程中, 每一个完整的 Runge-Kutta 步时间步长的选取由下式确定:

$$\nu = \frac{(\gamma p \rho)^{1/2}}{\rho J} \left( (1-h) \max(|Yu - Vv|, |Uu - Xv|) + \max \left[ \frac{(V^2 + Y^2)^{1/2}}{\Delta \xi}, \frac{(U^2 + X^2)^{1/2}}{\Delta \eta} \right] \right) dt \leq 1, \quad (25)$$

其中  $\nu$  表示 CFL 数.

求解统一坐标系下二维气动方程组的计算步骤为:

1) 初始化. 给定  $x$ - $y$  物理平面和  $\xi$ - $\eta$  计算平面的一个均匀剖分, 初始化变量  $(\rho, u, v, p)_{ij}^0$  和  $(U, V, X, Y)_{ij}^0$ . 由此可得初始的守恒变量  $E_{ij}^0, 1 \leq i \leq nx, 1 \leq j \leq ny$ . 令  $t^n = 0$ .

2) 利用 RKDG 有限元方法求解方程组 (5)—(7), 得到  $E$  在  $n+1$  时刻的值  $E_{ij}^{n+1}, 1 \leq i \leq nx, 1 \leq j \leq ny$ .

3) 由守恒量计算原始变量的值. 令  $E^{n+1} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8)$ , 则  $n+1$  时刻的原始变量可以由下式计算得到:

$$\rho^{n+1} = \frac{e_1}{e_5 e_8 - e_6 e_7}, \quad u^{n+1} = \frac{e_2}{e_1}, \quad v^{n+1} = \frac{e_3}{e_1}, \quad p^{n+1} = (\gamma - 1) \rho^{n+1} \left[ \frac{e_4}{e_1} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) \right]. \quad (26)$$

4) 由 (22)—(24) 式计算  $n+1$  时刻网格中心和网格节点的坐标, 时间向前推进一步.

5) 如果  $t^{n+1} < T$ , 转 2).

### 3 数值实验

在以下三个算例中考虑理想气体并令  $\gamma = 1.4$ , 线性元的 TVB 常数取为 50.

**算例 1** 本算例用于测试精度, 考虑二维低密度流问题, 初始条件为

$$\begin{aligned} \rho_0(x, y) &= 1 + 0.99(\sin(2\pi(x + y - 2t))), \\ u_0(x, y) &= 1, \\ v_0(x, y) &= 1, \\ p_0(x, y) &= 1. \end{aligned} \quad (27)$$

计算区域为  $[0, 1] \times [0, 1]$  并给定周期边界条件. 此算例的精确解为

$$\begin{aligned} \rho(x, y, t) &= 1 + 0.99(\sin(2\pi(x + y))), \\ u(x, y, t) &= 1, \\ v(x, y, t) &= 1, \\ p(x, y, t) &= 1. \end{aligned} \quad (28)$$

在计算过程中, 线性元时 CFL 数取为 0.2 ( $\nu = 0.2$ ). 定义密度  $\rho$  在  $T$  时刻的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差分别为  $\|e\|_1$  和  $\|e\|_\infty$ , 则

$$\begin{aligned} \|e\|_1 &= \int_{DU} |\rho(x, y, t) - \rho_h(x, y, t)| dx dy, \\ \|e\|_\infty &= \max_{(x, y) \in DU} |\rho(x, y, t) - \rho_h(x, y, t)|, \end{aligned}$$

其中  $DU$  表示计算区域在 Euler 坐标系下的位置. 则在  $h$  取不同值和不同网格下线性元的误差及相应的收敛阶见表 1—3. 由计算结果可以看出, 线性元计算结果可以达到二阶精度.

表 1  $h = 0, t = 0.1$  时刻密度的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差及收敛阶,  $\nu = 0.2, k = 1$

| 网格数            | $\ e\ _1$               | 收敛阶    | $\ e\ _\infty$          | 收敛阶    |
|----------------|-------------------------|--------|-------------------------|--------|
| $10 \times 10$ | $5.0943 \times 10^{-3}$ | —      | $2.3298 \times 10^{-2}$ | —      |
| $20 \times 20$ | $1.1085 \times 10^{-3}$ | 2.2002 | $6.7160 \times 10^{-3}$ | 1.7945 |
| $40 \times 40$ | $2.5800 \times 10^{-4}$ | 2.1032 | $1.7569 \times 10^{-3}$ | 1.9346 |
| $80 \times 80$ | $6.2488 \times 10^{-5}$ | 2.0457 | $4.4860 \times 10^{-4}$ | 1.9695 |

表 2  $h = 0.5, t = 0.1$  时刻密度的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差及收敛阶,  $\nu = 0.2, k = 1$

| 网格数            | $\ e\ _1$               | 收敛阶    | $\ e\ _\infty$          | 收敛阶    |
|----------------|-------------------------|--------|-------------------------|--------|
| $10 \times 10$ | $5.7387 \times 10^{-3}$ | —      | $2.3604 \times 10^{-2}$ | —      |
| $20 \times 20$ | $1.1869 \times 10^{-3}$ | 2.2735 | $6.9783 \times 10^{-3}$ | 1.7581 |
| $40 \times 40$ | $2.6904 \times 10^{-4}$ | 2.1413 | $1.8471 \times 10^{-3}$ | 1.9176 |
| $80 \times 80$ | $6.4222 \times 10^{-5}$ | 2.0667 | $4.7403 \times 10^{-4}$ | 1.9622 |

表3  $h = 0.9, t = 0.1$  时刻密度的  $L^1$  和  $L^\infty$  误差及收敛阶,  $\nu = 0.2, k = 1$ 

| 网格数            | $\ e\ _1$               | 收敛阶    | $\ e\ _\infty$          | 收敛阶    |
|----------------|-------------------------|--------|-------------------------|--------|
| $10 \times 10$ | $4.7065 \times 10^{-3}$ | —      | $2.6960 \times 10^{-2}$ | —      |
| $20 \times 20$ | $1.0688 \times 10^{-3}$ | 2.1387 | $7.4928 \times 10^{-3}$ | 1.8472 |
| $40 \times 40$ | $2.5367 \times 10^{-4}$ | 2.0750 | $1.9352 \times 10^{-3}$ | 1.9530 |
| $80 \times 80$ | $6.1962 \times 10^{-5}$ | 2.0335 | $4.9195 \times 10^{-4}$ | 1.9759 |

**算例 2** 考虑 Sod 激波管问题. Sod 问题可以检验方法的合理性, 并且可以用于作数值方法的非震荡测试. 初始的  $x$  方向计算区域为  $[0, 1]$ ,  $nx$  取 200,  $ny$  取固定值 5, 并且  $x$  和  $y$  方向取相同的空间步长. 初始条件为

$$(\rho_L, u_L, v_L, p_L) = (1.0, 0, 0, 1.0), \quad x \leq 0.5,$$

$$(\rho_R, u_R, v_R, p_R) = (0.125, 0, 0, 0.1), \quad x > 0.5.$$

在计算过程中 CFL 数取为 0.2.  $t = 0.2$  时刻的计算结果见图 1—3. 与精确解比较可以看出, 数值解能够较好地逼近精确解, 并且没有出现解的虚假震荡现象. 该数值方法对接触间断和激波的分辨率较高. 以下给出一个算例以检验本文构造的算法模拟复

杂波形相互作用问题的能力.

**算例 3** 考虑内爆问题<sup>[15]</sup>. 初始的计算区域为  $[-1, 1] \times [1, 1]$ . 该问题主要考察激波相互作用问题. 边界条件为固壁条件, 初始条件为

$$(\rho, u, v, p) = (0.125, 0, 0, 1.0),$$

$$(x, y) \in [-0.4, 0.4] \times [-0.4, 0.4],$$

$$(\rho, u, v, p) = (1.0, 0, 0, 1.0) \text{ 其他.}$$

在计算过程中的 CFL 数取为 0.2.  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$  时刻  $100 \times 100$  网格的计算结果见图 4. 图 5 给出了  $t = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5$  时刻的网格分布. 由计算结果可以看出, 本文构造的数值方法具有较好的保对称性.

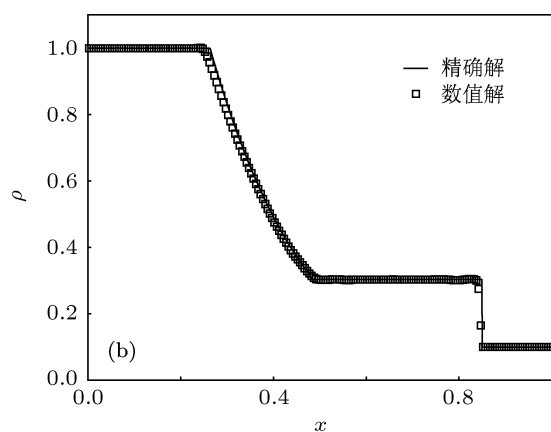
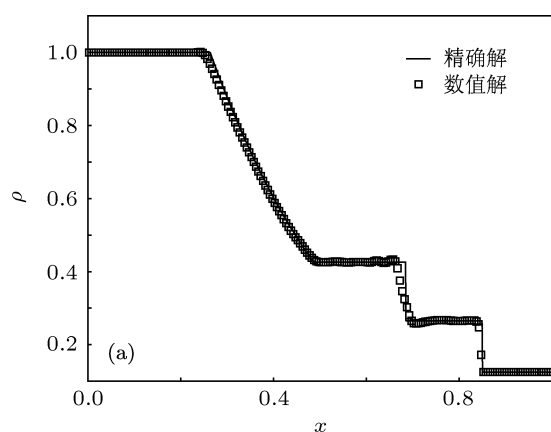


图1  $h = 0, t = 0.2$  时刻 200 网格的密度和压力 (a) 密度; (b) 压力

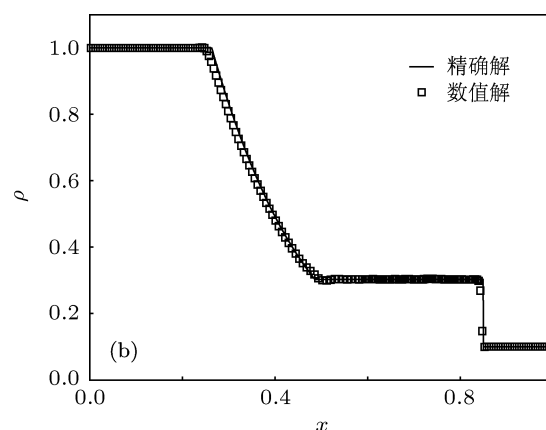
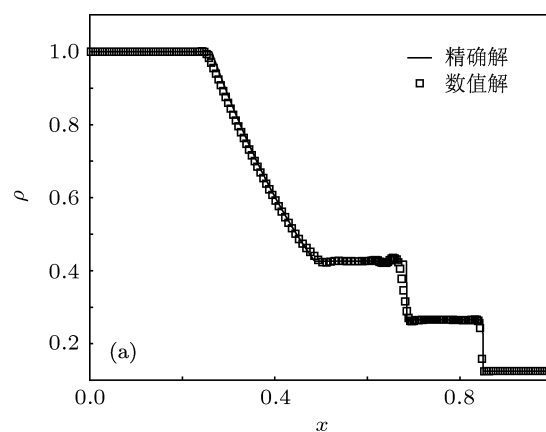
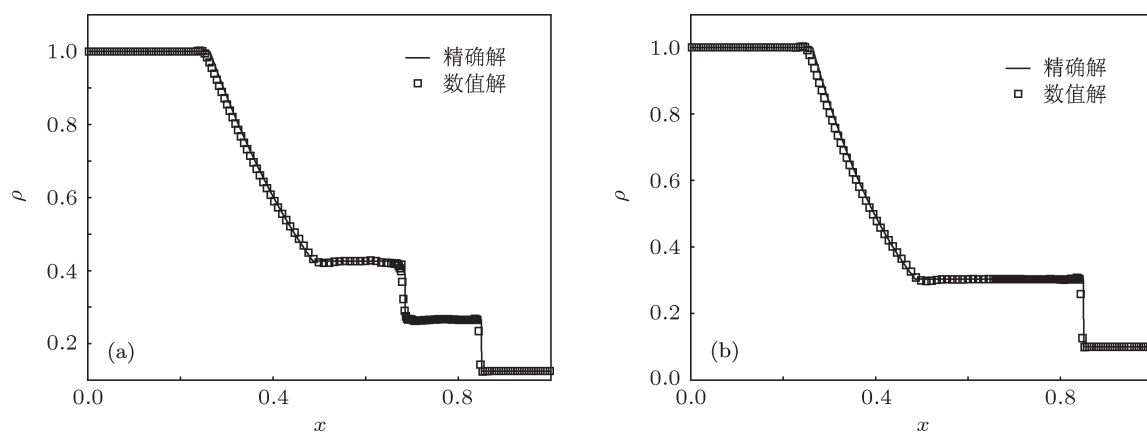
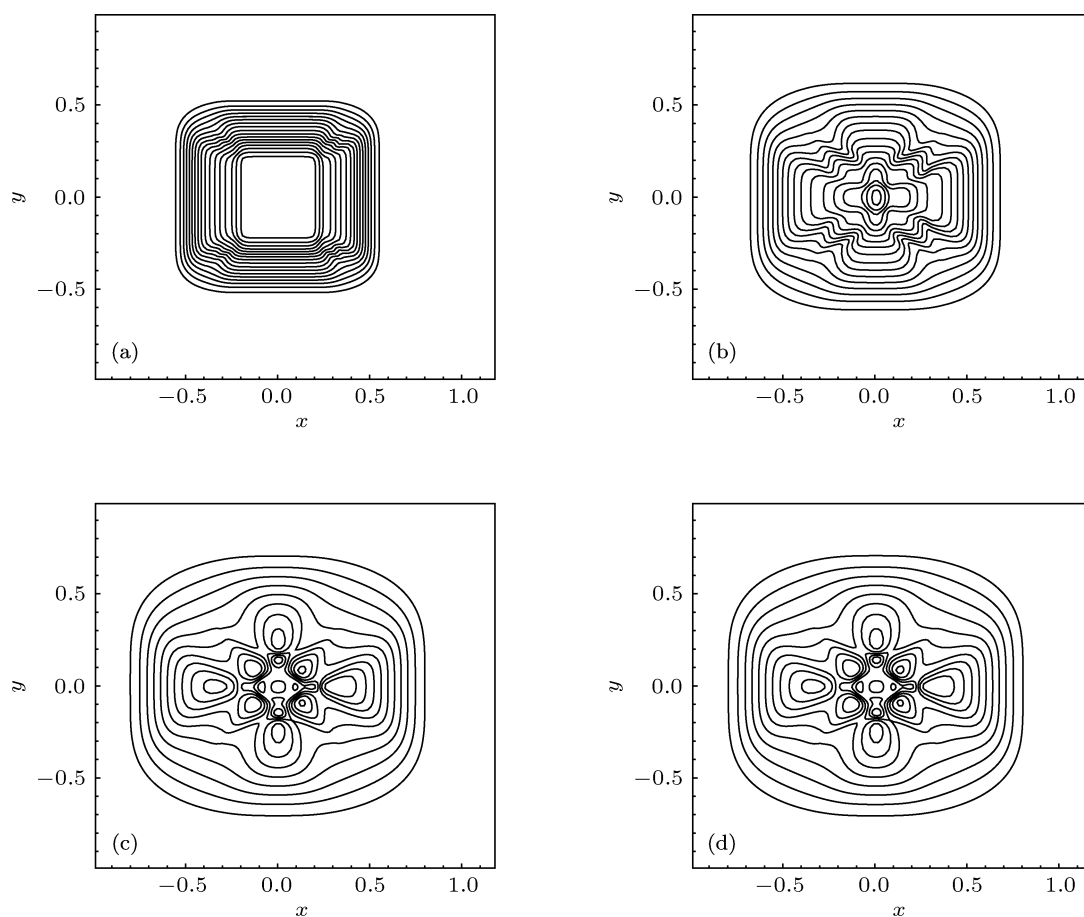


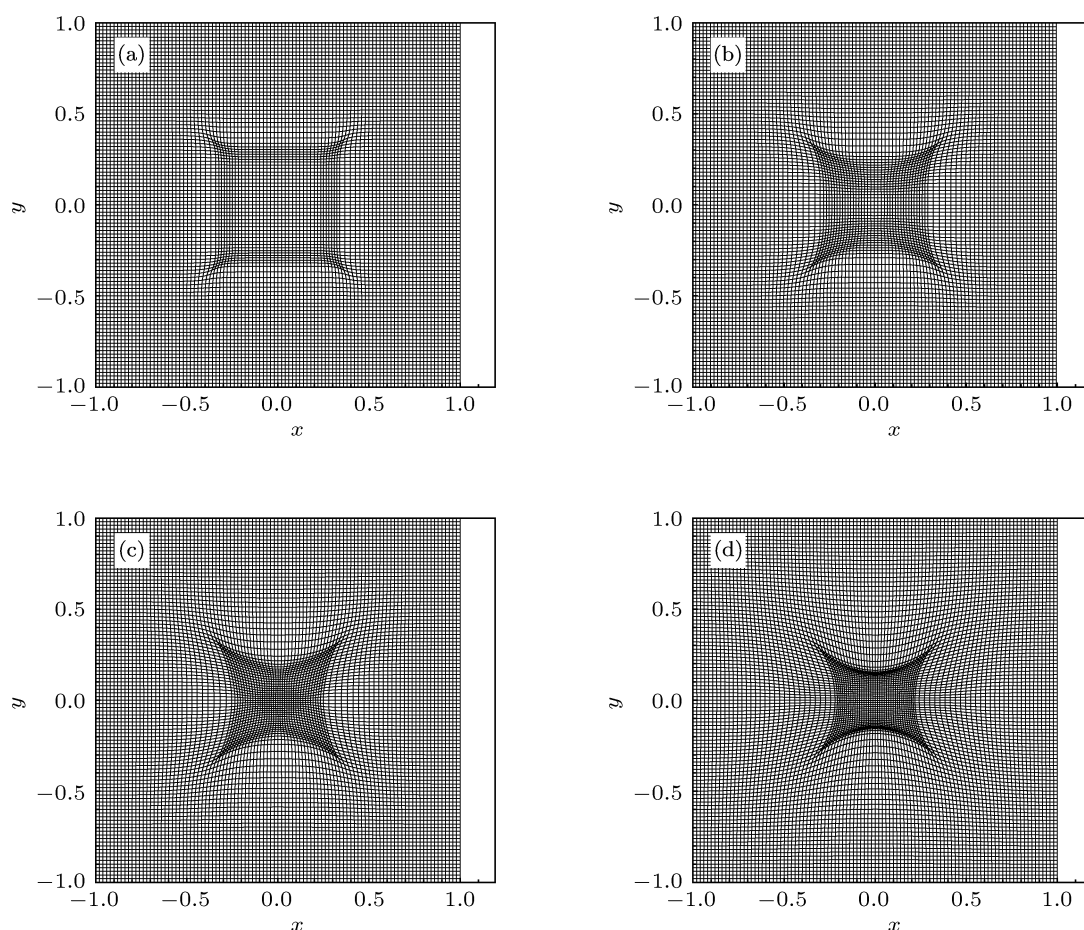
图2  $h = 0.5, t = 0.2$  时刻 200 网格的密度和压力 (a) 密度; (b) 压力

图3  $h = 0.9, t = 0.2$  时刻 200 网格的密度和压力 (a) 密度; (b) 压力图4 不同时刻的密度等值线 (a)  $t = 0.1$ ; (b)  $t = 0.2$ ; (c)  $t = 0.3$ ; (d)  $t = 0.5$ 

## 4 结 论

本文构造了统一坐标系下二维可压缩气动方程组的 RKDG 有限元方法. 与以往一些数值方法不同, 该方法将几何守恒律和物理守恒律统一求解; 在计算过程中不需要网格节点的速度信息, 也

不需要引入交错网格; 数值格式计算简便, 易于实现. 该方法对于线性元可以达到二阶精度, 通过引入限制器, 可以抑制住数值解的虚假震荡. 更为重要的是, 统一坐标系下的数值方法可以较好地克服 Lagrange 坐标系下的网格相交问题. 该方法有望用于多介质流的数值模拟中.


 图5 不同时刻的网格 (a)  $t = 0.1$ ; (b)  $t = 0.2$ ; (c)  $t = 0.3$ ; (d)  $t = 0.5$ 

- [1] Hirt C, Amsden A, Cook J 1974 *J. Comput. Phys.* **14** 227
- [2] Jia Z P, Yu X J 2007 *Chin. J. Comput. Phys.* **24** 543 (in Chinese) [贾祖朋, 蔚喜军 2007 计算物理 **24** 543]
- [3] Hui W H, Li P Y, Li Z W 1999 *J. Comput. Phys.* **153** 596
- [4] Jia P Y 2006 *Chin. J. Comput. Phys.* **23** 19 (in Chinese) [贾鹏彦 2006 计算物理 **23** 19]
- [5] Cockburn B, Shu C W 1991 *Math. Model. Numer. Anal.* **25** 337
- [6] Cockburn B, Shu C W 1989 *Math. Comp.* **52** 411
- [7] Cockburn B, Lin S Y, Shu C W 1989 *J. Comput. Phys.* **84** 90
- [8] Cockburn B, Hou S, Shu C W 1990 *Math. Comp.* **54** 545
- [9] Cockburn B, Shu C W 1998 *J. Comput. Phys.* **141** 199
- [10] Cockburn B, Shu C W 2001 *J. Sci. Comput.* **16** 173
- [11] Chen D W, Yu X J 2009 *Chin. J. Comput. Phys.* **26** 501 (in Chinese) [陈大伟, 蔚喜军 2009 计算物理 **26** 501]
- [12] Zhang L, Yuan L 2010 *Chin. J. Comput. Phys.* **27** 509 (in Chinese) [张磊, 袁礼 2010 计算物理 **27** 509]
- [13] Jia Z P, Zhang S D 2011 *J. Comput. Phys.* **230** 2496
- [14] Maire P H, Abgrall R, Breil J, Ovardia J 2007 *SIAM J. Sci. Comput.* **29** 1781
- [15] Toro E F 1997 *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics-a Practical Introduction* (2nd Ed.) (Berlin: Springer) p581

# Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for two-dimensional gas dynamic equations in unified coordinate\*

Zhao Guo-Zhong<sup>1)†</sup> Yu Xi-Jun<sup>2)</sup>

1) ( Faculty of Mathematics, Baotou Teachers College, Baotou 014030, China )

2) ( Laboratory of Computational Physics, Institute of Applied Physics and Computational Mathematics, Beijing 100088, China )

( Received 27 August 2011; revised manuscript received 20 October 2011 )

## Abstract

In this paper we develop the Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method for two-dimensional compressible gas dynamic equations in unified coordinate. The equations for fluid dynamics and geometry conservation laws are solved simultaneously. All the calculations can be performed on the fixed meshes. The information about the grid velocities is not needed in calculation. Some numerical examples are given to evaluate the efficiency and the reliability of the scheme. The numerical results show that the algorithm works well.

**Keywords:** unified coordinate, Runge-Kutta discontinuous Galerkin finite element method, two-dimensional gas dynamic equations

**PACS:** 02.30.Jr, 02.70.Dh, 02.60.Lj

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10771019, 11171038) and the Science Research Foundation of Institute of Higher Education of Inner Mongolia Autonomous Region, China (Grant No. NJZZ12198).

† E-mail: zhaoguozhongbttc@sina.com