

模式误差弱约束四维变分同化研究*

钟剑[†] 费建芳 黄思训 杜华栋

(中国人民解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

(2011 年 10 月 10 日收到; 2011 年 12 月 8 日收到修改稿)

经典四维变分同化 (four dimensional variational data assimilation, 简称 4dvar) 中认为模式是完美的, 而实际数值模式中存在的模式误差将对变分同化效果产生直接影响, 弱约束 4dvar 的提出为 4dvar 中考虑模式误差的影响提供了一种可行途径. 研究了基于模式误差控制变量的弱约束 4dvar 基本理论, 并在一维浅水方程组中对其同化效果及估计模式误差的有效性进行相关数值实验研究. 结果表明, 在模式误差不可忽略的情况下, 模式误差弱约束 4dvar 在整个区间 (包括同化区间和预报区间) 上预报误差均比传统 4dvar 小, 在模式误差相对较大时改进效果更明显, 具有明显优越性; 并且, 模式误差弱约束 4dvar 能有效估计模式误差大小及分布形式.

关键词: 模式误差, 弱约束四维变分同化, 一维浅水方程组

PACS: 92.60.Wc

1 引言

众所周知, 传统变分同化中通常假设模式动力方程组是完美的, 或者模式动力方程组误差相对于同化系统中其他误差很小, 可以忽略^[1-3]. 实际数值模式中不可避免地包含各种各样的模式误差, 如模式参数化方案参数误差、模式物理过程描绘缺失误差、模式时间和空间分辨率误差、模式离散误差, 等等^[4,5].

考虑模式误差的影响, Sasaki^[6] 提出弱约束 4dvar 的基本思想在于: 通过在代价函数中增加弱约束项来考虑模式动力方程组存在的误差. Derber^[7] 提出在 4dvar 同化系统中引入模式偏差订正项, 实现了弱约束 4dvar. 实际应用中, 考虑到计算量, 需对模式误差进行适当假设, Zupanski^[8] 假设模式误差弱约束 4dvar 中模式误差服从一阶马尔科夫链分布. Griffith 和 Nichols^[9] 给出了模式误差演变的三种一般形式, 并在简单系统中初步分析验证了模式误差弱约束 4dvar 的有效性. 之后, Vidard

等^[10] 对模式误差弱约束 4dvar 形式在简单海洋环流模型中进行了相关分析.

最近, Tremolet^[11] 对模式误差弱约束 4dvar 三种基本形式理论进行了简单介绍, 分别为: 考虑模式偏差的模式偏差控制变量弱约束 4dvar, 简称为 4dvar- β ; 考虑模式误差强迫的模式误差控制变量弱约束 4dvar, 简称为 4dvar- η ; 以同化窗区内各个时刻状态变量作为控制变量的弱约束 4dvar, 简称为 4dvar- x . 从理论上对上述三种不同形式弱约束 4dvar 基本形式进行了相关分析, 综合考虑计算精度和计算时间及可行性, 4dvar- η 具有更强的应用价值.

目前, 国内有若干学者进行了模式误差的研究^[4,12,13]. 为了独立开展模式误差弱约束 4dvar 技术研究, 本文针对 4dvar- η 同化思想, 从理论上详细推导了 4dvar- η 的伴随方程及梯度表达式; 然后利用一维浅水方程组, 从应用方面讨论了不同大小模式误差情况下 4dvar- η 的有效性, 同时分析 4dvar- η 估计模式误差的有效性, 以期 4dvar- η 在实际模式中的应用提供重要参考价值.

* 国家自然科学基金 (批准号: 41175025, 41005029, 41105012, 41105065) 和国家公益性行业专项 (批准号: GYHY201106004) 资助的课题.

[†] E-mail: zhj_zhongjian@163.com

2 弱约束 4dvar 理论

相对于传统强约束 4dvar, 模式误差强迫控制变量弱约束 4dvar 模式状态方程为^[11]

$$X_i = M_{i-1,i}(X_{i-1}) + \eta_i, \quad (1)$$

其中, X_i 表示第 i 时刻模式状态变量矢量, $M_{i-1,i}$ 表示模式状态变量由 t_{i-1} 时刻积分到 t_i 时刻的非线性算子, η_i 表示第 t_i 时刻的模式误差, 其与状态变量 X_i 具有相同维数的向量.

此时, 模式误差控制变量弱约束 4dvar 目标函数为^[11]

$$\begin{aligned} J(X_0, \eta_1, \dots, \eta_N) &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N (R_i^{-1} (H_i(X_i) - Y_i), H_i(X_i) - Y_i) \\ &+ \frac{1}{2} \langle B^{-1} (X_0 - X_b), X_0 - X_b \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle Q_i^{-1} \eta_i, \eta_i \rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 和 $(\cdot, \cdot)$ 分别表示 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 空间中内积, N 表示同化区间长度, H_i 表示 t_i 时刻非线性观测算子, X_b 为初始时刻状态变量背景场, Y_i 表示 t_i 时刻观测资料, R_i 和 Q_i 分别表示 t_i 时刻观测误差和模式误差协方差矩阵, B 表示背景场误差协方差矩阵. 可见, 相对于传统 4dvar 代价函数, 模式误差控制变量弱约束 4dvar 目标函数中增加了模式误差项 $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \langle Q_i^{-1} \eta_i, \eta_i \rangle$.

下面将从三步导出模式误差控制变量弱约束 4dvar 的伴随方程及梯度表达式, 并推导出实际应用中增量形式的伴随方程及梯度表达式.

步骤 1 导出切线性模式

对状态变量方程 (1) 各变量进行扰动, 得到切线性模式为

$$\hat{X}_i = \bar{M}_{i-1,i} \hat{X}_{i-1} + \hat{\eta}_i, \quad (3)$$

其中, $\hat{X}_i$ 和 $\hat{\eta}_i$ 分别表示 t_i 时刻扰动变量, $\bar{M}_{i-1,i} = \left. \frac{\partial M_{i-1,i}}{\partial X_{i-1}} \right|_{X_{i-1}}$ 表示 $M_{i-1,i}$ 的切线性算子.

步骤 2 导出目标泛函导数形式

定义 $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$, 目标泛函 J 在 X_0, η 处

沿 $\hat{X}_0$ 和 $\hat{\eta}$ 的方向导数按定义为

$$J'(X_0, \eta; \hat{X}_0, \hat{\eta}) = \langle \nabla_{X_0} J, \hat{X}_0 \rangle + \sum_{i=1}^N \langle \nabla_{\eta_i} J, \hat{\eta}_i \rangle. \quad (4)$$

另一方面, 利用 (2) 式有

$$\begin{aligned} J'(X_0, \eta; \hat{X}_0, \hat{\eta}) &= \sum_{i=0}^N \left(\bar{H}_i^T R_i^{-1} (H_i(X_i) - Y_i), \hat{X}_i \right) \\ &+ \langle B^{-1} (X_0 - X_b), \hat{X}_0 \rangle \\ &+ \sum_{i=1}^N \langle Q_i^{-1} \eta_i, \hat{\eta}_i \rangle. \end{aligned} \quad (5)$$

步骤 3 导出伴随及梯度表达式

引入伴随变量 P , 利用切线性方程 (3), 有

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= 0, \\ \langle P_i, \hat{X}_i \rangle &= \langle P_i, \bar{M}_{i-1,i} \hat{X}_{i-1} + \hat{\eta}_i \rangle \\ &= \langle \bar{M}_{i-1,i}^T P_i, \hat{X}_{i-1} \rangle + \langle P_i, \hat{\eta}_i \rangle \\ i &= N, \dots, 1. \end{aligned} \quad (6)$$

对方程组 (6) 进行累加, 有

$$\begin{aligned} \langle P_N, \hat{X}_N \rangle &+ \sum_{i=2}^N \langle P_{i-1} - \bar{M}_{i-1,i}^T P_i, \hat{X}_{i-1} \rangle \\ &+ \langle -\bar{M}_{0,1}^T P_1, \hat{X}_0 \rangle - \sum_{i=1}^N \langle P_i, \hat{\eta}_i \rangle = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

联立方程 (4), (5) 和 (7), 得到伴随方程为

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= 0, \\ P_i &= \bar{M}_{i,i+1}^T P_{i+1} + \bar{H}_i^T R_i^{-1} (H_i(X_i) - Y_i) \\ i &= 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (8)$$

状态变量梯度为

$$\begin{aligned} \nabla_{X_0} J &= B^{-1} (X_0 - X_b) + P_0, \\ \nabla_{\eta_i} J &= Q_i^{-1} \eta_i + P_i \quad i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (9)$$

步骤 4 增量形式伴随及梯度表达式

定义增量 $\delta X_0 = X_0 - X_b$ 及 $\delta \eta_i = \eta_i - \eta_i^b$, 此时增量形式伴随方程为

$$\begin{aligned} P_{N+1} &= 0, \\ P_i &= \bar{M}_{i,i+1}^T P_{i+1} + \bar{H}_i^T R_i^{-1} \left[d_i + \bar{H}_i \bar{M}_{0,i} \delta X_0 \right] \end{aligned}$$

$$\left. + \bar{H}_i \left(\sum_{j=1}^i \bar{M}_{j,i} \delta \eta_j \right) \right] \\ i = 1, \dots, N, \quad (10)$$

其中,

$$\begin{aligned} d_i &= H_i(X_i^b) - Y_i \\ &= H_i \left(M_{0,i}(X_0^b) + \sum_{j=1}^i (M_{j,i} \eta_j^b) \right) - Y_i. \end{aligned}$$

增量形式梯度表达式为

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta X_0} J &= B^{-1} \delta X_0 + P_0, \\ \nabla_{\delta \eta_i} J &= Q_i^{-1} \delta \eta_i + P_i. \end{aligned} \quad (11)$$

上述模式误差控制变量弱约束 4dvar 称为 4dvar- η .

3 一维浅水方程组数值试验

3.1 一维浅水方程组理论模型

一维浅水方程组为^[9]

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = -g \frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

其中, 变量 $u = u(t, x)$ 表示水平风速; $\phi = \phi(x, t)$ 表示重力势, 且 $\phi = gh(x, t)$, g 表示重力加速度, $h(x, t)$ 表示流体深度; $H = H(x)$ 表示底部地形; 由于为一维浅水方程, 从而并未考虑科氏力旋转效应. 对上述浅水方程 (12) 均采用半拉格朗日积分正模式和伴随模式. Griffith 和 Nichols^[9] 用浅水方程组研究非线性系统的数据同化实验. 对于本次实验, x 方向格点数 $L = 200$, 格点间距 $\Delta x = 0.01$, 时间积分步长 $\Delta t = 9.2 \times 10^{-3}$, 同化区间积分步数为 50, 预报区间积分步数为 100.

假设“真实”系统方程中模式地形 H 满足:

$$H(x) = m \Delta x \times \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (13)$$

其中, Δx 表示模式格点间距, x 表示模式格点位置, L 表示模式格点区间长度, m 为参数, 用以控制地形所造成的模式误差大小. 将方程 (13) 代入 (12) 得到“真实”系统变量演变方程组, 进而可积分得到各个时刻变量值作为“真实”变量值; 观测变量值由上述“真实”变量值加上高斯随机噪音得到, 并假设各个积分区间中均具有观测资料, 且观测误差

协方差矩阵 R_i 由观测随机噪音计算得到; 背景场误差协方差取为 $B = I$, 为单位矩阵.

在预报系统方程 (1) 中不考虑地形的作用, 即:

$$H(x) = 0. \quad (14)$$

将方程 (14) 代入 (12) 中则得到包含模式误差的预报方程组, 也即在变分同化 (包含 4dvar 和 4dvar- η) 区间和预报区间中所采用的变量演变方程组. 考虑由于地形所造成的模式误差影响, 亦即 $-g\partial H/\partial x$ 项作为模式误差源.

若实施代价函数 (2) 式所对应的模式误差控制变量弱约束 4dvar, 将会使得模式控制变量增加 N (同化窗区长度) 倍, 实际应用中往往构造模式误差演变函数进行实施. 本文中采用 Tremolet^[14] 中所提出的假设各个时间间隔内模式误差相等, 即假设 $\eta_1 = \dots = \eta_N = \eta$, 此时在实施 4dvar- η 中假设同化区间和预报区间中各个时次均具有相同的模式误差 η . 对于模式误差协方差矩阵 Q , 本文假设满足 $Q = \alpha B$ ^[14], 其中 B 表示背景场误差协方差矩阵. 对于 α 取值, 一般取为 1, 文章也将对 α 的合理取值进行分析.

由第 2 节可知, 4dvar- η 不仅可以同 4dvar 一样改善同化区间和预报区间的变量精度, 还可以估计模式误差大小 η_i . 下面将对 4dvar- η 的同化和预报效果及模式误差估计两方面进行分析.

3.2 同化和预报效果分析

下面从三个方面进行分析: 第一, 固定模式误差协方差系数为 $\alpha = 1$ 时, 模式误差大小 m 对 4dvar 和 4dvar- η 同化效果和预报效果的影响 (图 1); 第二, $\alpha = 1$, $m = 1$ 情况下, 4dvar 和 4dvar- η 在同化初始时刻 $t = 0$ 及预报时间 $t = 150$ 处, 模式状态变量随格点分布及分析 (图 2); 第三, 不同模式误差大小 m 情况下, α 对整个区间预报误差的影响 (图 3).

图 1 表示固定模式误差协方差矩阵系数 $\alpha = 1$ 时, 不同模式误差大小情况 (m 变化) 下, 模式预报误差在同化区间和预报区间随时间变化. 图中显示, 在模式无误差 (即 $m = 0$) 时, 4dvar 同化方法在同化区间和预报区间误差都非常小, 说明本文 3.1 节数值实现方案是有效的. 同时, $m = 0$ 时, 除去同化区间中若干时间点情形, 4dvar- η

在整个同化区间和预报区间中误差均比传统 4dvar 大, 这是由于 4dvar $_{\eta}$ 在预报模式中增加了虚假的模式误差 η 的缘故. 在模式误差很小 (对应 $m = 0.1$) 时, 4dvar 在同化区间和预报区间效果要更好, 这可能是由于本文所假设模式误差在各个时间段相等不太合适所造成的, 总体来说, 4dvar 在模式误差很小时比本文所采用的 4dvar $_{\eta}$ 同化效果要更好. 随着模式误差的增大, 与

4dvar 相比, 4dvar $_{\eta}$ 同化效果越来越好. 当模式误差系数 $m = 1$ 时, 不论在同化区间, 抑或预报区间, 4dvar $_{\eta}$ 都表现更高的精度; 在模式误差相对较大时, 4dvar 在预报区间内预报误差随时间显著增长, 而 4dvar $_{\eta}$ 预报精度一直保持在相同量级水平, 预报误差随时间增长非常缓慢, 与 4dvar 相比具有明显的优越性, 如图 1 中 $m = 2, 5, 10$ 的情形.

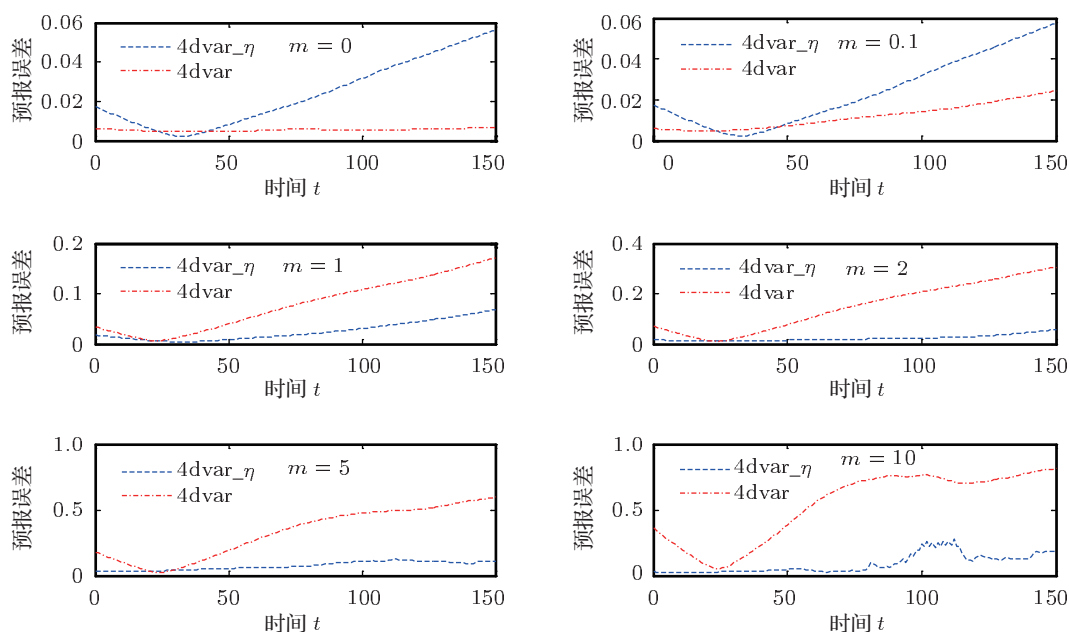


图 1 不同模式误差大小 m , 4dvar (点线) 和 4dvar $_{\eta}$ (虚线) 模式预报误差平方格点均值随时间 (包括同化区间及预报区间) 变化 (其中, 0—50 表示同化区间, 50—150 表示预报区间)

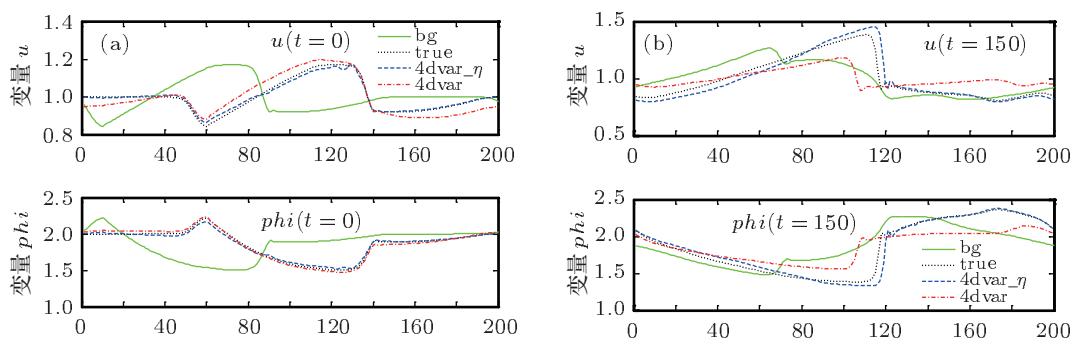


图 2 模式误差大小 $m = 1$ 时, 4dvar 和 4dvar $_{\eta}$ 模式预报误差在初始时刻 $t = 0$ (a) 和预报终点时刻 $t = 150$ (b) 分布 (其中, 实线表示背景场, 点线表示真实场, 虚线表示 4dvar $_{\eta}$ 同化场, 点线表示 4dvar 同化场)

图 2 表示 $\alpha = 1$, $m = 1$ 的情况下, 同化初始 $t = 0$ 时刻以及预报终点 $t = 150$ 时刻, 模式状态变量场随格点的分布, 以便进一步分析 4dvar $_{\eta}$ 同化效果. 图中显示, 对于同化后初始时刻模式状态

变量场, 4dvar $_{\eta}$ 同化产生的 u 在大部分格点处与真实值非常接近, 而 4dvar 仅小部分格点处与真实值基本一样, 其他格点处具有明显误差; 对于 $t = 150$ 时刻预报场 (包括 u 和 ϕ), 4dvar $_{\eta}$ 仍有大概 $1/3$

格点处预报状态变量场与真实场非常接近, 其他格点处误差也相对较小, 而 4dvar 预报场在所有格点处与真实场误差非常明显. 这表明通过在状态方程中引入模式误差项 η , 4dvar- η 在某些模式误差情况下有可能产生与真实场非常接近的预报场 (积分 100 时次), 这是非常重要的, 进一步说明 4dvar- η 的优越性.

图 3 表示不同模式误差大小 (m 变化) 情况下, 模式误差协方差权重 α 对预报误差 (本图中表示所

有格点整个同化区间和预报区间中平均) 的影响. 图中显示, 改变模式误差协方差权重 α 对同化效果影响很小, 基本没有变化; 在模式误差很小的情形下, 权重系数 α 很大时会有一定影响. 这说明, 在不考虑模式变量及格点间的相关情况下, 也即在模式误差协方差矩阵正确估计情况下, 模式误差协方差权重 α 的变化对最终同化效果并不产生影响, 但这并不能说明实际模式中模式误差协方差权重 α 也不会对最终同化效果产生影响.

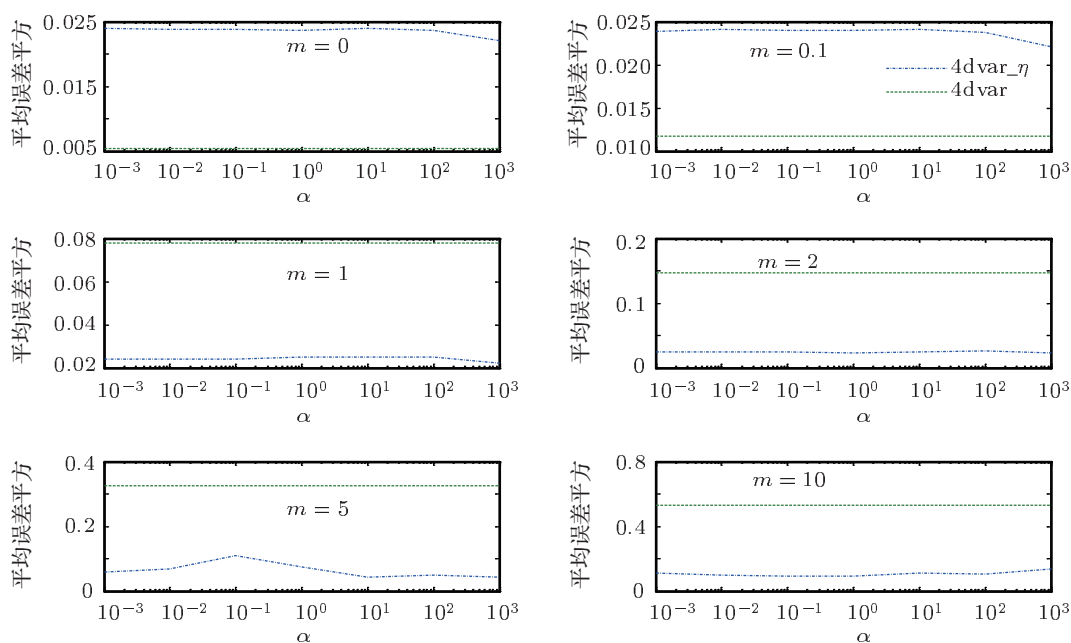


图 3 不同模式误差大小 m , 4dvar (点线) 和 4dvar- η (虚线) 模式预报误差平方格点区间 (包括同化区间及预报区间) 均值随模式误差协方差矩阵权重的变化

3.3 模式误差估计分析

3.2 节中数值试验表明, α 变化对同化效果产生的影响不明显. 下面将讨论取 $\alpha = 1$ 时, 4dvar- η 估计模式误差的有效性及其随模式误差大小 m 的变化. 图 4 表示 4dvar- η 同化估计的模式误差 (本图中表示各个格点平均) 随模式误差参数大小 m 的变化趋势. 图中显示, 所估计的模式误差随模式误差参数 m 的增大而增大, 说明本文 4dvar- η 同化方式能有效估计模式总体误差的量级. 图 5 表示不同模式误差情况下, 4dvar- η 同化估计的模式误差随格点的分布. 图中显示, ϕ 变量误差各个格点处相对较小, 而 u 变量误差各个格点处变化明显, 呈现出周期余弦函数分布特征, 尤其在模式误差相对较

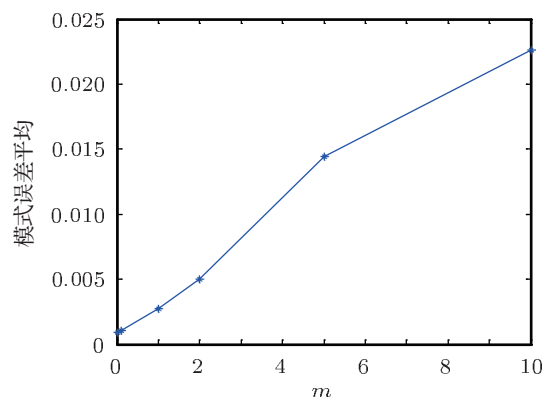


图 4 4dvar- η 同化后所估计模式误差绝对值变量之和格点平均随模式误差大小变化

大时 (对应 $m = 1, 2, 5, 10$ 的情形). 这是由于本文在一维浅水方程中添加的模式高度误差 (13) 服从

正弦分布,由一维浅水方程组 (12) 可知,模式高度误差对变量 u 通过 $-g\partial H/\partial x$ 项产生影响,此时正弦高度模式误差转换为余弦模式误差,这进一步说明本文中 $4dvar_{\eta}$ 同化的有效性,能有效估计模式

误差的分布型. ϕ 变量误差相对较小的原因主要是因为模式高度误差并不直接对其产生影响,而通过变量 u 的误差产生间接影响,从而 ϕ 变量误差发展相对缓慢.

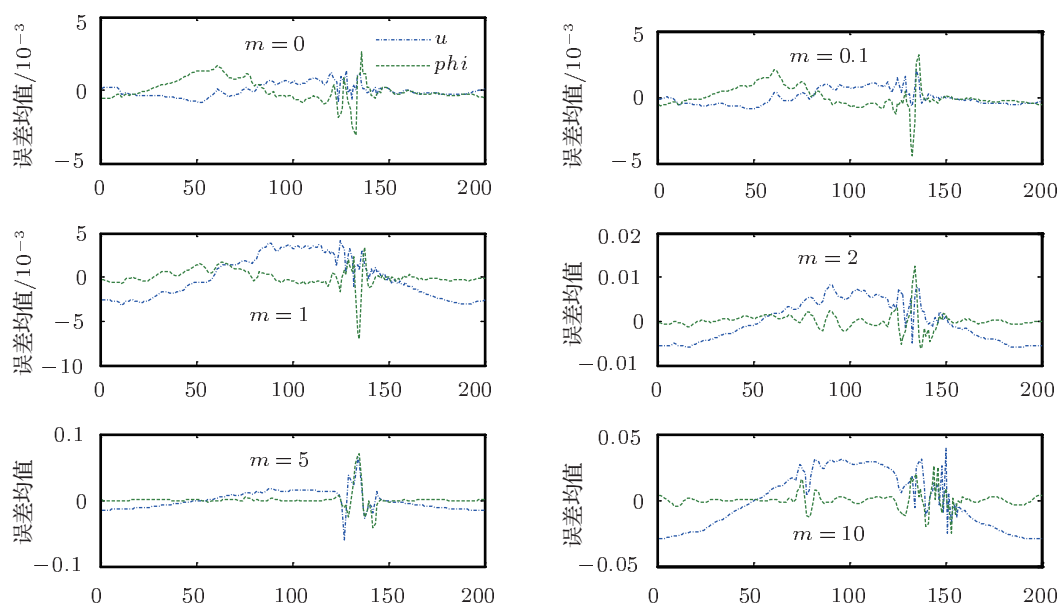


图5 不同模式误差大小 m , $4dvar_{\eta}$ 同化后所估计的模式误差 η 随格点变化 (其中, 点线表示变量 u 模式误差, 虚线表示变量 ϕ 模式误差)

4 结论

目前, 变分同化中通常假设动力方程组是完美的, 而实际上模式方程组存在各种各样的模式误差, 这些误差对变分同化效果的影响不可忽略, 因此在变分同化中考虑模式误差的影响非常重要.

本文研究了模式误差控制变量弱约束 $4dvar$ ($4dvar_{\eta}$) 的基本理论, 并利用一维浅水方程组进行数值试验, 对其同化预报效果和模式误差估计做了进一步研究, 主要结论为:

1) 在模式误差很小可忽略情况下, $4dvar$ 效果要优于 $4dvar_{\eta}$;

2) 在模式误差不可忽略的情况下, $4dvar_{\eta}$ 在同化区间及预报区间上误差相对要更小, 尤其在误差相对较大时, $4dvar_{\eta}$ 预报误差随时间演变比较缓慢, 要明显优于 $4dvar$; 并且, $4dvar_{\eta}$ 在某些模式误差情况下, 预报 150 时步后仍有可能得到与真实

场非常接近的预报场;

3) 在模式误差协方差矩阵准确估计的前提下, 模式误差协方差矩阵权重对最终同化效果并没有明显影响;

4) $4dvar_{\eta}$ 同化后不但能有效减小各个时间段的预报误差, 而且能有效估计模式误差分布形式及大小.

本文中 $4dvar_{\eta}$ 仅讨论了在假设各个时间段模式误差相等的情形, 对于其他模式误差演变函数假设情况下 $4dvar_{\eta}$ 同化效果还有待进一步讨论, 并且复杂模型中模式误差协方差矩阵的构建还有待进一步研究, 但 $4dvar_{\eta}$ 在一维浅水方程组中数值试验已充分显现了弱约束 $4dvar$ 相对于传统 $4dvar$ 的优越性.

感谢 The University of Reading 的 Amos S. Lawless 提供一维浅水方程组的半拉格朗日积分正模式和伴随模式.

- [1] Zhao Y L, Huang S X, Du H D, Zhong J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 079202 (in Chinese) [赵延来, 黄思训, 杜华栋, 仲跻芹 2011 物理学报 **60** 079202]
- [2] Cao X Q, Huang S X, Du H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1984 (in Chinese) [曹小群, 黄思训, 杜华栋 2008 物理学报 **57** 1984]
- [3] Wang S C, Zhang W M, Cao X Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 099203 (in Chinese) [王舒畅, 张卫民, 曹小群 2011 物理学报 **60** 099203]
- [4] Zhong J, Huang S X, Fei J F, Du H D 2011 *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* **35** 1169 (in Chinese) [钟剑, 黄思训, 费建芳, 杜华栋 2011 大气科学 **35** 1169]
- [5] Wang S C 2008 *Study on Weak Constrain in Four Dimension Variational Data Assimilation* (Nanjing: PLA university of Science and Techonology) pp113–121 (in Chinese) [王舒畅 2008 四维变分同化中弱约束研究 (南京: 解放军理工大学) 第 113—121 页]
- [6] Sasaki Y 1970 *Mon. Wea. Rev.* **98** 875
- [7] Derber J 1989 *Mon. Wea. Rev.* **117** 2437
- [8] Zupanski D 1997 *Mon. Wea. Rev.* **125** 2274
- [9] Griffith A K, Nichols N K 2001 *Flow Turb. Comb.* **65** 469
- [10] Vidard P A, Piacentini A, Le Dimet F X 2004 *Tellus* **56A** 177
- [11] Tremolet Y 2006 *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **132** 2483
- [12] Lan W R, Zhu J, Xue M, Lei T, Gao J D 2010 *Chinese J. Atmospheric Sciences* **34** 737 (in Chinese) [兰伟仁, 朱江, Ming Xue, 雷霆, Jidong Gao 2010 大气科学 **34** 737]
- [13] Zhuang Z R, Xue J S, Li X L, Zhang L H 2010 *Chinese Journal of Atmospheric Sciences* **34** 591 (in Chinese) [庄照荣, 薛纪善, 李兴良, 张利红 2010 大气科学 **34** 591]
- [14] Tremolet Y 2007 *Q. J. R. Meteorol. Soc.* **133** 1267

Study of weak constraint 4dvar with model error forcing control variable*

Zhong Jian[†] Fei Jian-Fang Huang Si-Xun Du Hua-Dong

(*Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*)

(Received 10 October 2011; revised manuscript received 8 December 2011)

Abstract

In the traditional implementations of four-dimensional variational data assimilation (4dvar for short), it is assumed that the model used is perfect. However the model error in the model can directly affect the accuracy of data assimilation. The weak constraint 4dvar is an effective way of correcting and estimating the model error in 4dvar. In this paper, an approach to weak constraint 4dvar with model error forcing control variable is studied and implemented in the one-dimensional shallow water equations. The results show that when the model error cannot be ignored, the prediction error with the weak constraint 4dvar is smaller than with the traditional 4dvar in both the assimilation window and the prediction period, and the improvement with weak constraint 4dvar is more obvious in the condition with large model error. Also, the weak constraint 4dvar approach to estimating model error captures some basic features of model error including the magnitude and the characteristic of distribution.

Keywords: model error, weak constraint 4dvar, one-dimensional shallow water equations

PACS: 92.60.Wc

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41175025, 41005029, 41105012 and 41105065), the National Public Benefit (Meteorology) Research Foundation of China (Grant No. GYHY201106004).

[†] E-mail: zhj_zhongjian@163.com