

## 多前车速度差的车辆跟驰模型的稳定性与孤波\*

袁娜 化存才†

(云南师范大学数学学院, 昆明 650092)

(2011年11月8日收到; 2012年1月6日收到修改稿)

通过线性稳定性分析, 得到了多前车速度差模型的稳定性条件, 并发现通过调节多前车信息, 使交通流的稳定区域明显扩大. 通过约化摄动方法研究了该模型的非线性动力学特性: 在稳定流区域, 得到了描述密度波的 Burgers 方程; 在交通流的不稳定区域内, 在临界点附近获得了描述车头间距的修正的 Korteweg-de Vries (modified Korteweg-de Vries, mKdV) 方程; 在亚稳态区域内, 在中性稳定曲线附近获得了描述车头间距的 KdV 方程. Burgers 的孤波解、mKdV 方程的扭结 - 反扭结波解及 KdV 方程的孤波解描述了交通流堵塞现象.

**关键词:** 跟驰模型, Burgers 方程, mKdV 方程, KdV 方程

**PACS:** 05.90.+m, 05.70.Jk, 02.60.Cb

## 1 引言

目前, 交通问题已成为人们日益关注的一个热点. 了解交通流的特征对我们的日常工作和生活至关重要. 作为车辆交通流复杂性的一个重要特征, 交通堵塞现象是许多学者研究的对象, 它通常被认为是由于车辆之间相互作用引起的密度波传播的极限情形.

许多学者基于跟驰模型研究了交通流的这一特性, 发现自由行驶的交通流与阻塞交通之间存在阻塞转移现象. 对于这方面的研究, 主要是通过线性稳定性理论和非线性分析中的约化摄动方法来完成. Komatsu 和 Sasa<sup>[1]</sup> 在车辆跟驰模型中导出了修正的 Korteweg-de Vries (modified Korteweg-de Vries, mKdV) 方程, 他们通过在临界点周围出现的扭结 - 反扭结的密度波来描述交通阻塞现象. Ge 等<sup>[2]</sup> 在优化速度模型和全速度差模型中导出了 mKdV 方程和 KdV 方程, 通过临界点周围出现的扭结 - 反扭结的密度波来描述交通阻塞现象, 并展示了中性稳定曲线附近出现的孤立子. 薛郁<sup>[3]</sup> 在单车跟驰模型中导出了 Burgers 方程、mKdV 方

程和 KdV 方程. Tang 等<sup>[4]</sup> 研究了考虑交通短暂中断现象的跟驰模型. Tian 等<sup>[5]</sup> 研究了考虑司机对前车速度的预测的跟驰模型. 近年来, 随着智能交通系统的发展, 跟驰模型得到了进一步的扩展, 不少学者对扩展的模型做了研究. 彭光含等<sup>[6]</sup> 提出了双车跟驰模型, 研究了模型的稳定性, 并对模型进行数值模拟证实次邻近车对交通流存在不可忽视的影响. 彭光含<sup>[7,8]</sup> 在双车跟驰模型中导出了 mKdV 方程, 并通过数值模拟获得了不稳定区域下的扭结 - 反扭结孤立波. Peng 和 Sun<sup>[9]</sup> 提出了多车跟驰模型并对模型进行了线性稳定性分析和非线性分析, 通过非线性分析推导了 mKdV 方程, 并通过数值模拟验证了新模型的实用性. Xue<sup>[10]</sup> 和 Nagatani<sup>[11]</sup> 分别基于前后速度差、前后车位置信息的优化速度扩展模型研究了交通流的稳定性问题. 王涛等<sup>[12]</sup> 提出了多前车速度差新模型, 研究了模型的稳定性, 并通过数值模拟体现了模型的实用性及合理性.

本文基于前人的研究方法, 通过线性稳定性分析研究了多前车速度差模型的稳定性条件, 在分析中通过不同的参数处理方法得到了与文献 [12] 相同的稳定性条件; 然后再通过非线性理论分析研究

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11162020, 10772158) 和云南省中青年学术与技术带头人计划 (批准号: 2008PY059) 资助的课题.

† E-mail: cuncai\_hua@139.com

了多前车速度差模型中的孤波现象.

## 2 跟驰模型研究概述

最早的车辆跟驰理论是由 Pipes<sup>[13]</sup> 于 1953 年提出的, 其运动方程为

$$\ddot{x}_n(t) = \frac{1}{T}(\dot{x}_{n+1}(t) - \dot{x}_n(t)), \quad (1)$$

其中  $x$  表示车辆的位置, 下标  $n, n+1$  为车辆标号 (第  $n$  辆车跟随的第  $n+1$  辆车),  $T$  表示驾驶员的反应时间. 基本思想是: 当前车速度大于后车时, 后车加速; 反之, 后车减速.

1961 年, Newell<sup>[14]</sup> 在假定后车车速调整依赖于车头间距的优化速度时, 提出了如下的跟驰模型:

$$v_n(t + \tau) = V(\Delta x_n(t)), \quad (2)$$

其中  $V(\Delta x_n(t))$  表示优化速度, 取为

$$V(\Delta x_n(t)) = v_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\Delta x_n - x_c}{v_0 T_f} \right) \right], \quad (3)$$

其中  $\Delta x_n(t) = x_{n+1}(t) - x_n(t)$  表示  $t$  时刻的车头间距,  $v_n$  表示第  $n$  辆车的速度,  $\tau$  表示车辆的延迟时间,  $v_0$  表示期望速度,  $T_f$  表示在高密度交通情况下跟驰行为的安全时间间隔,  $x_c$  表示安全距离. 因为模型 (2) 是对速度建立的关系式, 所以, 当交通信号灯由红灯转变为绿灯时, 车辆在  $\tau$  时刻的加速度为无限大.

针对 Newell 跟驰模型的缺陷, Bando 等<sup>[15]</sup> 于 1995 年根据交通流特征分析提出了如下优化速度模型 (OV 模型):

$$\dot{v}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)], \quad (4)$$

其中  $a$  表示敏感系数. 模型 (4) 解决了无限加速问题, 它可以模拟实际交通流的许多特征. 但是, 模型 (4) 会产生过高的加速度, 以及不切实际的减速度, 并且可能会出现撞车现象.

基于这一问题, 姜锐等<sup>[16]</sup> 于 2001 年根据正负速度差对跟驰模型的影响提出了全速度差模型 (FVD 模型):

$$\dot{v}_n(t) = a[V(\Delta x_n(t)) - v_n(t)] + \lambda \Delta v_n(t), \quad (5)$$

其中,  $\lambda$  表示速度差的反应系数, 速度差  $\Delta v_n(t) = v_{n+1}(t) - v_n(t)$ .

随着智能交通系统的发展, 驾驶员可以预先获得前面  $m$  辆车在行驶中信息的变化, 提前加速或

者减速, 以增强交通流的稳定性. 于是, 王涛等<sup>[2]</sup> 在 FVD 模型的基础上, 考虑多辆前车之间的速度差信息, 提出了多速度差模型 (MVD 模型):

$$\dot{v}_j(t) = a[V(\Delta x_j(t)) - v_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta v_{j+l-1}(t) \quad (6)$$

$$l = 1, 2, \dots, m; m \ll N,$$

当  $m = 1$  时,  $\sum_{l=1}^m \lambda_l = \lambda$ , 模型 (6) 退化为 FVD 模型;

当  $m = 1$  且  $\sum_{l=1}^m \lambda_l = \lambda = 0$  时, 模型 (6) 退化为 OV 模型.

## 3 MVD 模型的线性稳定性条件

在本节中, 我们通过线性稳定性理论来推导 MVD 模型的线性稳定性条件.

为方便计算, 我们将方程 (6) 改写为如下的形式:

$$\ddot{x}_j(t) = a[V(\Delta x_j(t)) - \dot{x}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{x}_{j+l-1}(t) \quad (7)$$

$$l = 1, 2, \dots, m; m \ll N.$$

假设初始状态为稳定态, 车流的车头间距均为  $h$ , 对应的优化速度为  $V(h)$ . 此时, 稳态交通流的车头位置解为

$$x_j^0(t) = hj + V(h)t. \quad (8)$$

对于均匀流解加一扰动, 即  $y_j(t) = \exp(ikj + zt)$ , 有

$$x_j(t) = x_j^0(t) + y_j(t). \quad (9)$$

将 (8) 和 (9) 式代入 (7) 式, 可以得到

$$\ddot{y}_j(t) = a[V(h + \Delta y_j(t)) - V(h) - \dot{y}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{y}_{j+l-1}(t), \quad (10)$$

其中  $\Delta y_j(t) = y_{j+1}(t) - y_j(t)$ . 将 (10) 式泰勒展开, 可得

$$\ddot{y}_j(t) = a[V'(h)\Delta y_j(t) - \dot{y}_j(t)] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \Delta \dot{y}_{j+l-1}(t), \quad (11)$$

其中,  $V'(h) = dV(\Delta x_j)/\Delta x_j |_{\Delta x_j = h}$ . 将  $y_j(t) = \exp(ikj + zt)$  代入 (11) 式, 得到

$$z^2 = a[V'(h)(\exp(ik) - 1) - z]$$

$$+ z \sum_{l=1}^m \lambda_l [\exp(ikl) - \exp(ikl - ik)]. \quad (12)$$

最后, 将参数  $z$  展开为  $z = z_1(ik) + z_2(ik)^2 + \dots$ , 在文献 [12] 中所选取的参数为  $z = \lambda + \omega i$ . 由 (12) 式中  $ik$  的同幂系数相等, 得到

$$z_1 = V'(h),$$

$$z_2 = \frac{a + 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l}{2a} V'(h) - \frac{V'(h)^2}{a}. \quad (13)$$

如果  $z_2$  为负, 则稳定流将变得不稳定; 如果  $z_2$  为正, 则将保持稳定流的状态不变. 因此, 对于 MVD 模型, 可得到如下的临界稳定曲线:

$$V'(h) = \frac{a}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l. \quad (14)$$

于是, 当车间距满足条件  $V'(h) < \frac{a}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l$  时, 系统将处于稳定状态. 在这里求得的临界稳定曲线与文献 [12] 相同.

当  $m = 1, \lambda = 0$  时, (7) 式为 OV 模型, 其稳定条件为  $V'(h) < \frac{a}{2}$ ; 当  $m = 1, \lambda \neq 0$  时, (7) 式为 FVD 模型, 其稳定条件为  $V'(h) < \frac{a}{2} + \lambda$ . 很显然, 由于  $a, \lambda$  均为正值, 相比较 OV 模型和 FVD 模型而言, MVD 模型的稳定性区域扩大了.

通过 Matlab 画出以下四种模型车头间距 - 敏感系数的相图: OV 模型 ( $m = 1, \lambda = 0$ ); FVD 模型 ( $m = 1, \lambda = 0.2 \text{ s}^{-1}$ ); MVD 模型 ( $m = 2, \lambda_1 = 0.2 \text{ s}^{-1}, \lambda_2 = 0.15 \text{ s}^{-1}$ ); MVD 模型 ( $m = 4, \lambda_1 = 0.2 \text{ s}^{-1}, \lambda_2 = 0.15 \text{ s}^{-1}, \lambda_3 = 0.1 \text{ s}^{-1}, \lambda_4 = 0.05 \text{ s}^{-1}$ ). 在这里, 优化速度选用比较常见的一种:

$$V(\Delta x_j(t)) = \frac{v_{\max}}{2} [\tanh(\Delta x_j(t) - h_c) + \tanh(h_c)],$$

且选取  $v_{\max} = 3, h_c = 3$ .

在图 1 中分别给出以上四种模型的临界曲线. 位于临界曲线以外的是稳定区域, 位于临界曲线以内的是不稳定区域. 从图 1 可以直观地看出, FVD 模型的稳定区域较 OV 模型要大, 说明车辆能在一定范围内平稳地行驶 (无拥堵), 即交通拥堵现象得到一定的缓解, 这是由于 FVD 模型考虑了速度差的信息, 从而克服了 OV 模型中存在的加速度过高和减速度与实际不相符合等问题, 增强了交通流的稳定性; 而 MVD 模型 ( $m = 2$ ) 的稳定区域又较 FVD 模型增大, 这说明车辆能在较大的范围内

平稳行驶 (无拥堵), 交通流得到进一步的缓解, 这是因为 MVD 模型 ( $m = 2$ ) 考虑了前面两辆车速度差的信息, 以此来增强交通流的稳定性. MVD 模型 ( $m = 4$ ) 与 MVD 模型 ( $m = 2$ ) 比较可知, 考虑的前车越多的时候, 交通流的稳定性就越强. 以上说明智能交通系统因给驾驶员提供的多前车的信息而有助于增强交通流的稳定性, 有助于舒缓交通拥堵.

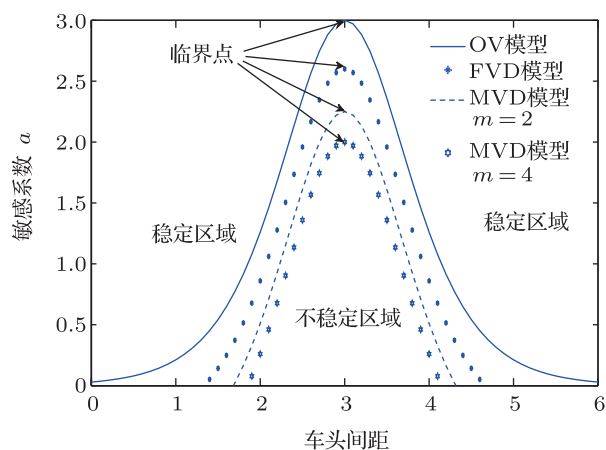


图 1 车头间距 - 敏感系数的相图

### 4 MVD 模型的非线性分析

根据稳定性, 交通流可分为三个不同的区域: 稳定区域、不稳定区域、亚稳态区域. 对应于不同的区域可以导出各自的非线性波方程, 进而用以描述相应的密度波.

为了方便后面的计算, 我们将方程 (7) 改写为

$$\frac{d^2(\Delta x_j(t))}{dt^2} = a \left[ V(\Delta x_{j+1}(t)) - V(\Delta x_j(t)) - \frac{d(\Delta x_j(t))}{dt} \right] + \sum_{l=1}^m \lambda_l \left( \frac{d(\Delta x_{j+l}(t))}{dt} - \frac{d(\Delta x_{j+l-1}(t))}{dt} \right). \quad (15)$$

下面, 应用约化摄动方法对方程 (15) 进行非线性分析.

#### 4.1 导出 Burgers 方程

在稳定流区域, 对空间变量  $j$  和时间变量  $t$  引入缓变量  $X = \varepsilon(j + bt), T = \varepsilon^2 t$ , 其中  $b$  为待定参

数. 设车头间距为

$$\Delta x_j(t) = h_c + \varepsilon R(X, T). \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式, 并泰勒展开至  $\varepsilon^3$  量级, 则得到如下非线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} & a\varepsilon^2(b - V'(h))\partial_X R \\ & + \varepsilon^3 \left[ \left( b^2 - \frac{aV'(h)}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \partial_X^2 R \right. \\ & \left. - aV''(h)R\partial_X R + a\partial_T R \right] = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

令  $b = V'(h_c)$ , 消去  $\varepsilon$  的二次项后, (17) 式可简化为

$$\begin{aligned} & \partial_T R - V''(h)R\partial_X R \\ & = \left( \frac{1}{a} \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{1}{2} - \frac{V'(h)}{a} \right) V'(h) \partial_X^2 R \\ & = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

由线性稳定性条件

$$V'(h) < \frac{a}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l$$

可知, 在稳定区域内,

$$\frac{1}{a} \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{1}{2} - \frac{V'(h)}{a}$$

始终是正值. 因此, (18) 式就是 Burgers 方程, 它的一个解为

$$\begin{aligned} & R(X, T) \\ & = \frac{1}{|V''(h)|T} \left[ X - \frac{1}{2}(\eta_j - \eta_{j+1}) \right] \\ & - \frac{1}{2|V''(h)|T} (\eta_{j+1} - \eta_j) \\ & \times \tanh \left\{ \frac{1}{2|V''(h)|T} \left[ \left( \frac{1}{a} \sum_{l=1}^m \lambda_l + \frac{1}{2} \right) V'(h) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{V'^2(h)}{a} \right] (\eta_{j+1} - \eta_j)(X - \xi_j) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

其中  $\xi_j$  表示激波波前的坐标,  $\eta_j$  表示沿着  $x$  轴的斜率. 三角激波的传播速度为  $b = V'(h)$ . 三角激波相对运动车辆向后传播, 随着平均车间距的增加, 传播速度减小. 此外, 我们还发现, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $R(X, T) \rightarrow 0$ , 这说明在稳定流区域三角激波最终会演化为均衡交通流.

## 4.2 导出 mKdV 方程

在不稳定区域内, 我们研究方程 (15) 在临界点  $a = a_c, h = h_c$  附近空间变量  $j$  和时间变量  $t$  的缓变行为, 对于  $\varepsilon = \sqrt{\frac{a_c}{a} - 1}, 0 < \varepsilon \ll 1$ , 定义缓变量  $X = \varepsilon(j + bt), T = \varepsilon^3 t$ , 其中  $b$  为待定参数. 设车头间距为

$$\Delta x_j(t) = h_c + \varepsilon R(X, T). \quad (20)$$

将 (20) 式代入 (15) 式, 并泰勒展开至  $\varepsilon^5$  量级, 则得到如下非线性偏微分方程:

$$\begin{aligned} & a\varepsilon^2(b - V')\partial_X R + \varepsilon^3 \left( b^2 - \frac{aV'}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \partial_X^2 R \\ & + \varepsilon^4 \left[ a\partial_T R - \frac{aV'''}{6} \partial_X(R^3) \right. \\ & \left. - \left( \frac{aV'}{6} + \frac{b}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l(2l - 1) \right) \partial_X^3 R \right] \\ & + \varepsilon^5 \left[ \left( 2b - \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \partial_X \partial_T R - \frac{aV'''}{12} \partial_X^2(R^3) \right. \\ & \left. - \frac{b}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l(3l^2 - 3l + 1) \partial_X^4 R - \frac{aV'}{24} \partial_X^4 R \right] = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

其中,

$$V' = \frac{dV(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x=h_c},$$

$$V''' = \frac{d^3V(\Delta x)}{d\Delta x^3} \Big|_{\Delta x=h_c}.$$

如果参数选取与图 1 相同, 则有  $V' = \frac{3}{2}, V''' = -3$ .

令  $b = V'(h_c)$ , 假设  $\partial_X \partial_T R = \frac{V'''}{6} \partial_X^2 R^3 + \left[ \frac{aV'}{6} + \frac{b}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l(2l - 1) \right] \partial_X^4 R$ , 则在临界点  $(a_c, h_c)$  附近, 方程 (21) 可简化为

$$\begin{aligned} & \varepsilon^4 [\partial_T R - g_1 \partial_X^3 R + g_2 \partial_X(R^3)] \\ & + \varepsilon^5 [g_3 \partial_X^2 R + g_4 \partial_X^2(R^3) + g_5 \partial_X^4 R] = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

其中,

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l(2l - 1), \\ g_2 &= -\frac{V'''}{6}, \quad g_3 = \frac{V'}{2}, \\ g_4 &= -\frac{V'''}{12} \left( 1 - \frac{4V' - 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l}{a_c} \right), \end{aligned}$$

$$g_5 = \frac{1}{6a_c^2} \left[ \left( 2V'^2 - V' \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) + \frac{V'}{2a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] \times \left( a_c + 3 \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) \right) - \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) V' a_c \Big] - \frac{V'}{24}. \quad (27)$$

对于方程 (22) 做如下变换:

$$T' = g_1 T, \quad R = \sqrt{\frac{g_1}{g_2}} R',$$

则得到含有  $O(\varepsilon)$  校正项的 mKdV 方程:

$$\partial_{T'} R' - \partial_X^3 R' + \partial_X (R'^3) + \varepsilon \frac{1}{g_1} \left( g_3 \partial_X^2 R' + \frac{g_1 g_4}{g_2} \partial_X^2 (R'^3) + g_5 \partial_X^4 R' \right) = 0. \quad (23)$$

忽略方程 (23) 中的  $O(\varepsilon)$  项, (19) 式就变成了标准的 mKdV 方程, 其扭结 - 反扭结波解为

$$R'_0(X, T') = \sqrt{c} \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} (X - cT'). \quad (24)$$

如果考虑  $O(\varepsilon)$  项, 则需假设  $R'(X, T') = R'_0(X, T') + \varepsilon R_1(X, T')$ . 为了能够从解 (24) 式中得到传播速度  $c$ , 需给出  $R'_0(X, T')$  必须满足的如下可解性条件 [17]:

$$(R'_0, M[R'_0]) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dX R'_0 M[R'_0] = 0. \quad (25)$$

通过积分 (25) 式, 得到扭结 - 反扭结波的传播速度

$$c = \left[ 30 \left( 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l - 3 \right)^2 \right] \left[ 2 \left( 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l - 3 \right) \times \left( \sum_{l=1}^m \lambda_l - 8 \right) + 4 \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) \left( 6 - \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) + 27 \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l - 1) \right]^{-1}, \quad (26)$$

于是, 方程 (23) 的解为

$$R(X, T) = \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{3V'}{a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] c}{-V'''}} \times \tanh \sqrt{\frac{c}{2}} \left[ X - cT \left( \frac{V'}{6} \right) \right]$$

因此, 车头间距的扭结 - 反扭结波的解为

$$\Delta x_j(t) = h_c + \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{3V'}{a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) c}{-V'''}} \times \tanh \left\{ \sqrt{\frac{c}{2}} \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) \left[ j + \left( 1 - c \left( \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right) \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) \right) t \right] \right\}. \quad (28)$$

可见扭结 - 反扭结波解的振幅

$$B = \sqrt{\frac{\left[ V' + \frac{3V'}{a_c} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right] \left( \frac{a_c}{a} - 1 \right) c}{-V'''}}.$$

### 4.3 导出 KdV 方程

现在来研究方程 (15) 在中性稳定曲线  $V'(h) = \frac{a_s}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l$  附近的性态. 定义缓变量  $X = \varepsilon(j + bt)$ ,  $T = \varepsilon^3 t$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 其中  $b$  为待定参数. 设车头间距为

$$\Delta x_j(t) = h + \varepsilon^2 R(X, T). \quad (29)$$

将 (29) 式代入 (15) 式, 并泰勒展开到  $\varepsilon^6$  量级, 则得到如下的非线性偏微分方程:

$$\varepsilon^3 (ab - aV') \partial_X R + \varepsilon^4 \left( b^2 - \frac{aV'}{2} - b \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \partial_X^2 R + \varepsilon^5 \left[ a \partial_T R + \left( -\frac{aV'}{6} - \frac{b}{2} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right) \partial_X^3 R - \frac{aV''}{2} \partial_X (R^2) \right] + \varepsilon^6 \left[ \left( 2b - \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \partial_X \partial_T R + \left( -\frac{b}{6} \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) - \frac{aV'}{24} \right) \partial_X^4 R - \frac{aV''}{4} \partial_X^2 (R^2) \right] = 0, \quad (30)$$

其中,

$$V' = \frac{dV(\Delta x)}{d\Delta x} \Big|_{\Delta x=h},$$

$$V'' = \frac{d^2V(\Delta x)}{d\Delta x^2} \Big|_{\Delta x=h}.$$

令  $b = V'$ , 假设

$$\partial_X \partial_T R = \left( \frac{V'}{6} + \frac{b}{2a} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1) \right) \partial_X^4 R + \frac{V''}{2} \partial_X^2 (R^2),$$

则在中性稳定曲线  $V'(h) = \frac{a_s}{2} + \sum_{l=1}^m \lambda_l$  附近  $\left( a = \frac{a_s}{1-\varepsilon^2} \right)$ , 方程 (30) 可简化为

$$\varepsilon^5 [\partial_T R - f_1 \partial_X^3 R - f_2 R \partial_X R] + \varepsilon^6 [-f_3 \partial_X^2 R + f_4 \partial_X^4 R + f_5 \partial_X^2 (R^2)] = 0, \quad (31)$$

其中,

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{V'}{6} + \frac{V'}{2a_s} \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1), \\ f_2 &= V'', \quad f_3 = \frac{V'}{2}, \\ f_4 &= \frac{1}{6a_s^2} \left[ \left( 2V'^2 - V' \sum_{l=1}^m \lambda_l \right) \times \left( a_s + 3 \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) \right) - \sum_{l=1}^m \lambda_l (3l^2 - 3l + 1) V' a_s \right] - \frac{V'}{24}, \\ f_5 &= -\frac{V''}{4} \left( 1 - \frac{4V' - 2 \sum_{l=1}^m \lambda_l}{a_s} \right). \end{aligned} \quad (32)$$

对方程 (31) 做如下变换:

$$T = \sqrt{f_1} T', \quad X = -\sqrt{f_1} X', \quad R = \frac{1}{f_2} R',$$

则得到含有  $O(\varepsilon)$  校正项的 KdV 方程

$$\partial_{T'} R' + \partial_{X'}^3 R' + R' \partial_{X'} R' + \varepsilon \sqrt{\frac{1}{f_1}} \left( -f_3 \partial_{X'}^2 R' + \frac{f_4}{f_1} \partial_{X'}^4 R' + \frac{f_5}{f_2} \partial_{X'}^2 R'^2 \right) = 0. \quad (33)$$

忽略方程 (33) 中的  $O(\varepsilon)$  项, 它变成了标准的 KdV 方程, 其孤立波解为

$$R'_0(X', T') = A \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{A}{12}} \left( X' - \frac{A}{3} T' \right) \right].$$

类似于前面分析 mKdV 方程的方法, 可以求得孤立波的幅值  $A$  为

$$A = \frac{21f_1 f_2 f_3}{5f_2 f_4 - 24f_1 f_5}, \quad (34)$$

从而求得车头间距的解为

$$\Delta x_j(t)$$

$$\begin{aligned} &= h + \frac{A}{V''} \left( 1 - \frac{a_s}{a} \right) \\ &\quad \times \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{A}{2V' + 6V' \sum_{l=1}^m \lambda_l (2l-1)}} \left( 1 - \frac{a_s}{a} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \left[ j + \left( V'(h) + \frac{A}{3} \left( 1 - \frac{a_s}{a} \right) \right) t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (35)$$

交通拥堵是车辆交通流复杂现象的重要特征, 是车辆之间相互作用所引起的密度波传播的极限情形. 由本节的非线性分析结果表明: 当车辆的运动处于稳定状态时, 密度波是 Burgers 方程所描述的三角激波; 当处于亚稳态时, 密度波是 KdV 方程所描述的孤立波; 在不稳定状态下, 密度波是 mKdV 方程所描述的扭结 - 反扭结波.

从分析得到的 (26) 式可看出, 扭结 - 反扭结波的传播速度  $c$  与  $m$  之间存在着密切的关系. 显然,  $c$  随着  $m$  的增大而增大, 表明随着考虑的前车速度信息越多越有利于交通拥堵的疏散. 此外, 通过密度波的幅值表达式可以发现: 在其他参数一定的情况下, 随着  $m$  的值增大 (即考虑的前车速度信息越多), 密度波的幅值明显减小. 这些都说明考虑的前车速度信息越多, 越有利于交通堵塞的疏散.

## 5 结论

本文主要研究了前人根据单车道中多前车速度差对交通流波传播的影响所提出的多前车速度差模型. 稳定性分析表明, MVD 模型较 OV 模型和 FVD 模型的稳定性区域有所扩大; 而且, 在 MVD 模型中所考虑的前车越多, 模型的稳定性区域就越大. 这都说明了 MVD 模型增强了交通流的稳定性. 而且, 通过非线性分析进一步说明了此模型的优越性. 在非线性分析中, 我们得到了三个不同区域内的密度波. 车辆从开始的非均匀分布向均匀分布的演化过程中, 在稳定区域, 车辆是通过由 Burgers 方程描述的三角激波进行演化, 通过扩散运动趋向均匀分布; 随着车辆的增加和扰动的作用, 车流在亚稳态区域的密度波按 KdV 方程描述的孤立波变化; 在临界点附近车流由于扰动而失稳处于不稳定状态, 密度波按 mKdV 方程描述的扭结 - 反扭结波变化. 多前车速度差信息的引进导致临界时间增大, 车辆有足够的时间调整到最优速度, 车流的稳定性增强.

- [1] Komatsu T, Sasa S 1995 *Phys. Rev. E* **52** 5574  
 [2] Ge H X, Cheng R J, Dai S Q 2005 *Physica A* **357** 466  
 [3] Xue Y 2002 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai: Shanghai University) (in Chinese) [薛郁 2002 博士学位论文 (上海: 上海大学)]  
 [4] Tang T Q, Huang H J, Wong S C, Jiang R 2009 *Chin. Phys. B* **18** 975  
 [5] Tian J F, Jia B, Li X G, Gao Z Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 197  
 [6] Peng G H, Sun D H, He H P 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7541 (in Chinese) [彭光含, 孙棣华, 何恒攀 2008 物理学报 **57** 7541]  
 [7] Peng G H 2009 *J. Sichuan Univ. (Natural Science Edition)* **46** 1057 [彭光含 2009 四川大学学报 (自然科学版) **46** 1057]  
 [8] Peng G H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 056401  
 [9] Peng G H, Sun D H 2009 *Chin. Phys. B* **18** 5420  
 [10] Xue Y 2002 *Chin. Phys. B* **11** 1128  
 [11] Nagatani T 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6395  
 [12] Wang T, Gao Z Y, Zhao X M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 634 (in Chinese) [王涛, 高自友, 赵小梅 2006 物理学报 **55** 634]  
 [13] Pipes L A 1953 *J. Appl. Phys.* **24** 274  
 [14] Newell G F 1961 *Oper. Res.* **9** 209  
 [15] Bando M, Hasebe K, Nakayama A, Sugiyama Y 1995 *Phys. Rev. E* **51** 1035  
 [16] Jiang R, Wu Q S, Zhu Z J 2000 *Chin. Sci. Bull.* **45** 1895 (in Chinese) [姜锐, 吴清松, 朱祚金 2000 科学通报 **45** 1895]  
 [17] Nayfeh A H 1981 *Introduction to Perturbation Technique* (New York: Wiley) p325

# Analysis of the stability and solitary waves for multi-velocity difference car-following model of traffic flow\*

Yuan Na Hua Cun-Cai<sup>†</sup>

(School of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

(Received 8 November 2011; revised manuscript received 6 January 2012)

## Abstract

This article deals with the characteristic of the multiple velocity difference car-following model. We obtain the stability conditions of the model by using the linear stability analysis, and find that the stable region is apparently enlarged by adjusting the information about the multi-velocity difference. We study the nonlinear characteristics of the model by applying the reductive perturbation method. We obtain the Burgers equation and the modified Korteweg-de-Vries (mKdV) equation around the critical point and the Korteweg-de-Vries (KdV) equation near the neutral stability line in the stable region and the unstable region and the metastable region. The soliton solution of Burgers equation, the kink-antikink solution of mKdV equation, and the soliton solution of KdV equation describe the traffic jams.

**Keywords:** multi-velocity difference car-following model, Burgers equation, mKdV equation, KdV equation

**PACS:** 05.90.+m, 05.70.Jk, 02.60.Cb

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11162020, 10772158) and the Project of Leading Youth Scholars of Academy and Technology of Yunnan Province, China (Grant No. 2008PY059).

<sup>†</sup> E-mail: cuncai.hua@139.com