

二分网上的靴襻渗流*

万宝惠¹⁾ 张鹏²⁾ 张晶¹⁾ 狄增如¹⁾ 樊瑛^{1)†}

1) (北京师范大学管理学院系统科学系, 北京 100875)

2) (北京邮电大学理学院, 北京 100876)

(2011年11月11日收到; 2012年1月17日收到修改稿)

靴襻渗流最早应用于统计物理学中研究磁铁因非磁性杂质导致磁有序的降低并最终消失的现象. 随着复杂网络研究的深入, 许多学者展开网络上的靴襻渗流研究. 在自然界中, 许多系统自然呈现出二分结构, 二分网络是复杂网络中的一种重要的网络模式. 本文通过建立动力学方程和计算机仿真模拟的方法研究二分网上的靴襻渗流, 关注的参数是二分网中两类节点初始的活跃比例和活跃阈值, 分别用 f_1, f_2 和 Ω_1, Ω_2 表示, 得到二分网两类节点终态活跃比例随初始活跃比例的变化会发生相变等结论. 同时验证了动力学方程与仿真模拟的一致性.

关键词: 二分网, 靴襻渗流, 活跃节点比例

PACS: 64.60.ah, 05.70.Jk, 05.10.-a

1 引言

1979年, 靴襻渗流由 Chalupa 等^[1]最先提出, 应用于统计物理学中研究磁铁因非磁性杂质导致磁有序的降低并最终消失的现象. 在接下来的研究中, 靴襻渗流模型作为元胞自动机的一种, 广泛应用于物理学^[2-5]、生物学和信息科学技术等领域, 是一种研究系统复杂现象的常用模型. 例如可以研究神经元活动^[6-8]、氢混合物^[9]、玻璃转化动力学^[10-13]、磁合金^[14]和随机电波信号^[15]等问题.

二维网格上的靴襻渗流模型演化规则如下: 二维网格上的节点有两种状态, 活跃 (active) 状态和非活跃 (inactive) 状态, 每个节点状态相互独立. 初始时所有的节点均处于非活跃状态, 并以概率 f 变为活跃态. 在演化过程中, 如果一个处于非活跃状态的节点至少有 Ω ($\Omega \in [2, +\infty)$, $\Omega \in \mathbb{Z}$) 个活跃邻居, 那么该节点会由非活跃状态变为活跃状态, 并一直保持活跃态不变. 当演化达到稳定状态时, 网络中活跃状态节点所占的比例用 S_a 表示.

起初, 靴襻渗流模型是在二维和三维网格上展

开系统研究, Holroyd 等^[16]得到二维网格上临界概率的一个突变渐近公式和最高点, 之后又将结果拓展到 d 维网格上^[17]. Balogh 和 Bollobas^[18]也证明了 Holroyd 等的工作. 随着研究的深入, 靴襻渗流模型逐渐应用于随机规则图^[19,20]、随机图^[21]和复杂网络等^[22]的研究中. Baxter^[22]将靴襻渗流模型放到一个随机的、稀疏的、无向和无相关性的网络上去. 网络上每个节点都有活跃与非活跃两种状态, 初始时所有的节点均处于非活跃状态, 并以概率 f 变为活跃态, 在演化中也存在阈值 Ω . 研究的重点是演化到终态时网络中的最大活跃子图, 同时还研究了以 $1-p$ 的概率对网络进行攻击后对上述演化过程的影响, 不仅给出解析过程而且得到了演化到终态时最大活跃子图关于初始活跃概率 f 和网络未被攻击概率 p 的相变图, 并且讨论了无标度网络上该演化过程终态最大活跃子图的性质.

上述关于靴襻渗流的研究均在单顶点的网上展开. 而在现实世界中, 许多系统自然呈现出“二分”结构^[23]. 例如图书与图书评阅之间、股票与基金之间^[24]以及上网者和网页之间^[25], 这种由两类节点以及两类节点之间的连边 (同类节点之间不存

* 国家自然科学基金 (批准号: 70771011, 61174150, 11147119)、教育部新世纪人才支持计划 (批准号: NCET-09-0228) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: G470422) 资助的课题.

† E-mail: yfan@bnu.edu.cn

在连边)组成的网络就是二分网络,如图1所示.就图书评阅来说,如果有足够多的读者对一本书的评价很高,则这本书就可以被认为是一本畅销书.这样,书的畅销与否可以等同于渗流模型中节点的活跃与否,反之如果一个读者所评价的书中有足够多本的畅销书,则该读者就属于高品质的读者.如此一来,在二分网络上研究渗流就有了现实意义.

本文研究二分网上的靴襻渗流,通过动力学方程的描述和计算机仿真的方法探寻二分网上的靴襻渗流过程是否具有相变现象.

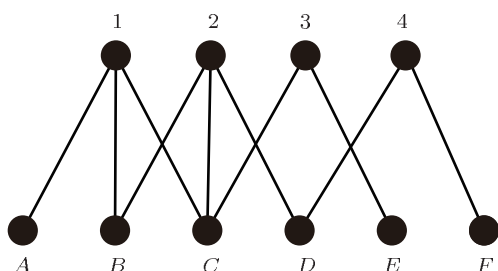


图1 二分网示意图 [26]

2 模型及其动力学

2.1 模型演化规则

建立一个由 N_1 个上 (up) 类节点和 N_2 个下 (bottom) 类节点组成的随机无向二分网,即两



图2 演化规则示意图

2.2 模型动力学

为获得网络演化到终态时两类节点中活跃节点所占比例,首先定义两个变量 $P_1(l)$ 和 $P_2(l)$,分别表示从两类节点中随机选取一个具有 l 个活跃邻居的节点的概率,以 $P_1(l)$ 为例,其数学表达式为

$$P_1(l) = C_{f_2 N_2}^l p^l (1-p)^{f_2 N_2 - l} = \left(\frac{\langle k_1 \rangle}{N_2} \right)^l \exp \left[(f_2 N_2 - l) \ln \left(1 - \frac{\langle k_1 \rangle}{N_2} \right) \right] \times \frac{(f_2 N_2)!}{l!(f_2 N_2 - l)!}, \quad (1)$$

类节点之间以一定的概率随机连边(节点的度分布服从泊松分布),连边不包含方向,同类节点之间不连边;节点状态只有活跃与非活跃两种,节点一旦处于活跃状态,则将保持不变;每对相异节点以概率 p 相连.如此一来,二分网中两类节点的平均度分别为 $\langle k_1 \rangle = pN_2$ 和 $\langle k_2 \rangle = pN_1$.

模型按如下规则进行演化:第一,初始时二分网络各层节点均处于非活跃状态,分别以概率 f_1 和 f_2 被激活到活跃状态;第二,上类中的节点由非活跃状态变为活跃状态时,要求至少有 Ω_1 个与之相连的处于活跃状态的下类节点,即上类节点的活跃阈值为 Ω_1 ,同理,下类节点的活跃阈值为 Ω_2 ;第三,重复上述过程直到网络中不再有新的活跃节点出现为止.

我们用一个简单的例子来说明这个过程.如图2所示,二分网中两类节点分别用圆和方块表示,节点之间的连边如图,其中空心表示节点处于非活跃状态,实心表示节点处于活跃状态.以2号节点为例,假设上类节点的活跃阈值为3,当2号节点活跃邻居数量达到3及以上时,在下一步2号节点就由非活跃状态变为活跃状态,并在演化中保持不变.

在研究中用 $S_a(1)$ 和 $S_a(2)$ 分别表示演化到终态时两类节点中各自的活跃节点比例,这个比例也可以理解为网络演化到终态时从两类节点中任选一个节点是活跃节点的概率.

当 $N_2 \gg \langle k_1 \rangle$ 时,有 $\frac{\langle k_1 \rangle}{N_2} \rightarrow 0$, 带入(1)式化简得

$$P_1(l) = \frac{(f_2 \langle k_1 \rangle)^l}{l!} e^{-f_2 \langle k_1 \rangle}. \quad (2)$$

将(2)式定义为

$$P_1(l) = P_1(f_2 \langle k_1 \rangle, l), \quad (3)$$

同理可得

$$P_2(l) = \frac{(f_1 \langle k_2 \rangle)^l}{l!} e^{-f_1 \langle k_2 \rangle} = P_2(f_1 \langle k_2 \rangle, l). \quad (4)$$

S_a 由两部分组成,一部分是初始时节点活跃的概率 f ,另一部分 τ 则是在演化过程中被激活的概率,

$S_a(1)$ 和 $S_a(2)$ 分别表示为

$$\begin{cases} S_a(1) = f_1 + \tau_1, \\ S_a(2) = f_2 + \tau_2. \end{cases} \quad (5)$$

定义 S_a^n 为演化到第 n 步时节点处于活跃状态的概率, 将其逐步展开, 有

初始时

$$\begin{cases} S_a^0(1) = f_1, \\ S_a^0(2) = f_2, \end{cases} \quad (6)$$

第一步:

$$\begin{cases} S_a^1(1) = f_1 + (1 - f_1) \sum_{l \geq \Omega_1} P_1(f_2 \langle k_1 \rangle, l), \\ S_a^1(2) = f_2 + (1 - f_2) \sum_{l \geq \Omega_2} P_2(f_1 \langle k_2 \rangle, l), \end{cases} \quad (7)$$

第二步:

$$\begin{cases} S_a^2(1) = f_1 + (1 - f_1) \sum_{l \geq \Omega_1} P_1(S_a^1(2) \langle k_1 \rangle, l), \\ S_a^2(2) = f_2 + (1 - f_2) \sum_{l \geq \Omega_2} P_2(S_a^1(1) \langle k_2 \rangle, l), \end{cases} \quad (8)$$

.....

第 n 步:

$$\begin{cases} S_a^n(1) = f_1 + (1 - f_1) \sum_{l \geq \Omega_1} P_1(S_a^{n-1}(2) \langle k_1 \rangle, l), \\ S_a^n(2) = f_2 + (1 - f_2) \sum_{l \geq \Omega_2} P_2(S_a^{n-1}(1) \langle k_2 \rangle, l), \end{cases} \quad (9)$$

当演化代数足够大时, 得到演化终态 S_a 的表达式为

$$\begin{cases} S_a(1) = f_1 + (1 - f_1) \sum_{l \geq \Omega_1} P_1(S_a(2) \langle k_1 \rangle, l), \\ S_a(2) = f_2 + (1 - f_2) \sum_{l \geq \Omega_2} P_2(S_a(1) \langle k_2 \rangle, l). \end{cases} \quad (10)$$

3 结果及讨论

从方程组 (10) 中可以看出, 影响活跃节点比例 $S_a(1)$ 和 $S_a(2)$ 的因素有: 二分网中两类节点的初始节点活跃比例 f_1 和 f_2 , 两类节点的活跃阈值 Ω_1 和 Ω_2 以及两类节点的平均度 $\langle k_1 \rangle$ 和 $\langle k_2 \rangle$.

在模拟的过程中, 为研究方便, 令网络节点连接的比例在 0.01 左右, 将上类节点个数 N_1 取为 2000, 平均度 $\langle k_1 \rangle$ 取为 16; 下类节点个数 N_2 取为 1600, 平均度 $\langle k_2 \rangle$ 取为 20. 在研究中, 我们发现

节点的个数对模拟结果没有影响. 下面我们将分别讨论初始节点活跃比例和两类节点活跃阈值的变化对节点活跃比例的影响.

3.1 初始活跃比例 f 对 S_a 的影响

取定两类节点的活跃阈值 Ω_1 和 Ω_2 分别为 10 和 9, 改变初始活跃 f 比例, 探讨对 S_a 的影响. 当下类节点初始活跃比例 f_2 取定不同值 (这里分别取 0.1, 0.4, 0.45 和 0.5) 时, 上类节点随其初始活跃比例 f_1 的变化情况, 如图 3 所示.

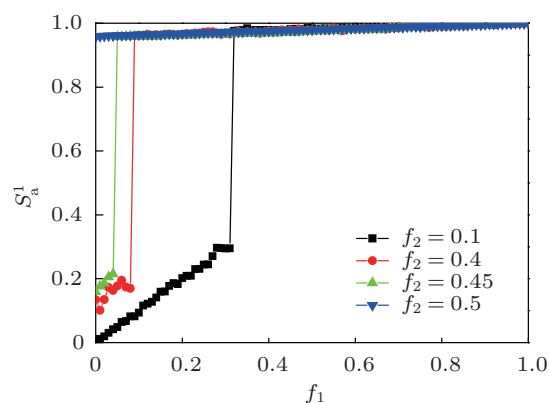


图 3 不同 f_2 下上类节点活跃比例随 f_1 变化情况

从图 3 中可以看出, 上类节点活跃比例的变化存在跳跃现象, 类似 Baxter 等 [22] 在单顶点网上对渗流的研究得出的结果, 我们认为这个跳跃是一种相变现象. 它说明随着初始上类节点活跃比例的增加, 网络演化终态的活跃节点比例将在临界值 (记为 f_{1c}) 处突然增加, 出现不连续的跳跃现象. 以疾病传播为例, 它的现实意义在于当人群中有相当数量 (比例达到临界值 f_c 或以上) 的人感染疾病, 则经过一段时间后该疾病会在该人群中发生大规模的爆发. 相同条件下随 f_2 的增加, 上类节点活跃比例发生相变时对应的 f_1 值减少, 这由二分网的特殊性决定, 上类节点要达到活跃就要求下类节点的活跃节点达到一定数量, 即满足上类节点的活跃阈值. 因此, 当 f_2 越大时, 上类节点越容易被激活; 当 f_2 取 0.5 时, 上类节点的活跃比例在 f_1 趋于 0 时就达 97% 以上.

3.2 活跃阈值 Ω 比例对 S_a 的影响

取定 Ω_1 为 10, 改变 Ω_2 的值, 以类节点为例进行研究.

3.2.1 $f_1 = f_2$

将 Ω_2 分别取为 8, 14 和 20 时, 活跃节点比例随初始活跃比例的变化如图 4 所示.

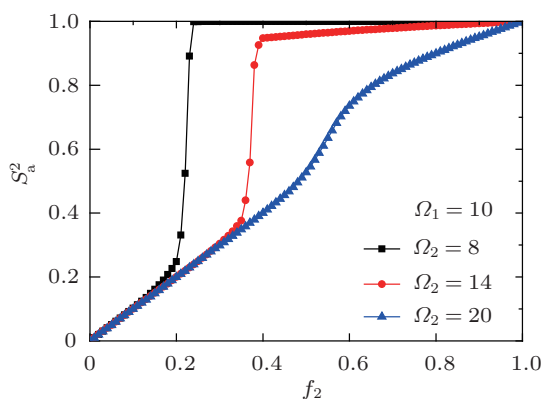


图 4 $\Omega_1 = 10$ 时不同 Ω_2 值下类节点活跃比例变化情况

从图 4 中可以看出, 当 $\Omega_2 = 20$ 时, 下类节点的活跃比例变化的相变现象消失, 只是发生连续变化. 随着 Ω_2 的减小, 下类节点的活跃比例变化的相变现象逐渐明显, 这是由于当 Ω_2 减少时, 下类节点中将有更多的点满足活跃阈值, 使得其相变临界值 f_{2c} 也逐渐减少. 当 Ω_1 和 Ω_2 的大小相当时, 下类节点的活跃比例变化的相变现象最为明显.

3.2.2 $f_1 = 0.2, f_2$ 变化

固定 $\Omega_1 = 10$ 和 $f_1 = 0.2$ 不变时, 二分网中下类节点活跃比例变化如图 5 所示.

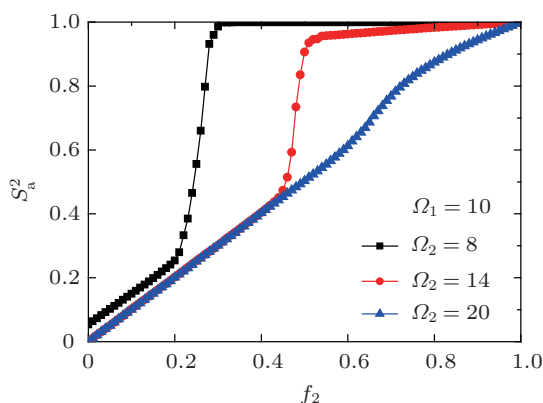


图 5 $\Omega_1 = 10, f_1 = 0.2$ 时, 在不同 Ω_2 值下下类节点活跃比例变化情况

从图 5 中可以看出, 随 Ω_2 的增大, 下类节点活跃比例的突变现象与 f_1 变化的情况 (图 4 所示) 类似.

3.2.3 平均度对 S_a 的影响

二分网两类节点之间的平均度相互牵制, 存在

关系 $k_1 N_1 = k_2 N_2$, 因此, 在讨论平均度对节点活跃比例的影响时, 只对 k_1 或 k_2 进行改变即可. 这里, 我们保持 $f_2 = 0.2$, 分别取 $k_1 = 10, 15, 20$ 和 25 , 讨论上类节点活跃比例随初始活跃比例的变化情况, 结果如图 6 所示. 从图 6 可以看出上类节点活跃比例存在相变情况, 相同条件下随 f_1 的增加, 平均度越大, 上类节点活跃比例发生相变时对应的 f_1 值越小. 从平均场角度来看, 网络平均度越大, 网络中节点的邻居数量越多, 满足活跃阈值条件的节点数也越多, 从而相变点 f_c 就越小.

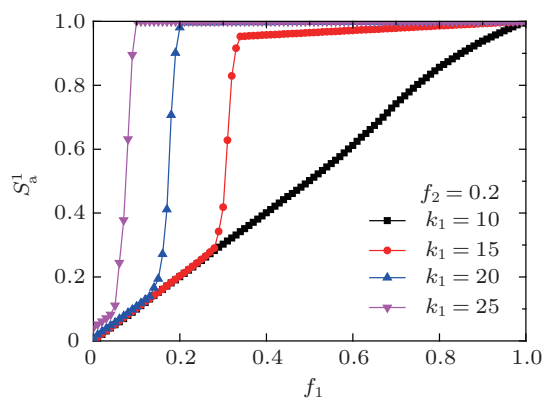


图 6 不同 k 值下上类节点活跃比例变化情况

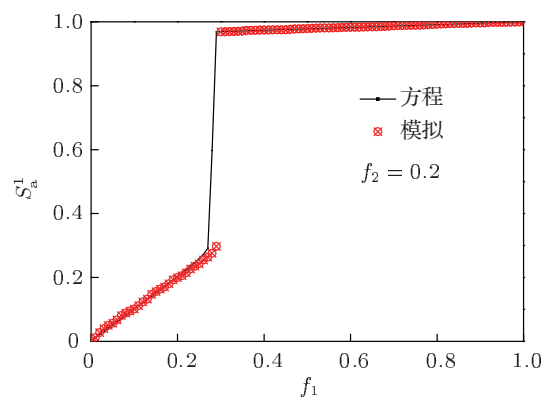


图 7 上类节点活跃比例方程解和模拟解的对比

3.3 动力学方程的研究

为验证动力学方程与模拟过程具有一致性, 我们在进行计算时将方程中的参数设定为与进行模拟时的一致, 即取定上类节点个数 $N_1 = 2000$, 平均度 $\langle k_1 \rangle = 16$; 下类节点个数 $N_2 = 1600$, 平均度 $\langle k_2 \rangle = 20$. 取定下类节点的初始活跃比例 $f_2 = 0.2$, 研究随着上类节点初始活跃比例 f_1 的变化, 二分网中两类节点活跃比例的变化情况,

将方程的解与模拟的结果进行比较,如图7所示.

4 结论

本文借鉴靴襻渗流在单顶点网络上的研究方法,研究了随机无向二分网上的靴襻渗流,探寻临界现象,给出了动力学方程以及模拟结果.当改变活跃阈值、平均度或者初始活跃比例时,二分网两类节点活跃比例随初始活跃变化具有相变现象;同

时,本文验证了动力学方程和模拟结果的一致性.不论是在单顶点网上还是在二分网上,随着初始活跃比例的变化,活跃节点的比例都存在相变现象,这在研究疾病传播和舆论传播等方面具有很重要的意义.在接下来的工作中,不仅可以探讨二分网络的结构性质对于靴襻渗流的影响,还可以将靴襻渗流引入到加权网络和耦合网络,探讨权重的作用以及级联效应等.

-
- [1] Chalupa J, Leath P L, Reich G R 1979 *J. Phys. C* **12** L31
- [2] Wu K, Gu Z N 1996 *Acta Phys. Sin.* **45** 1905 (in Chinese) [吴克, 顾镇南 1996 物理学报 **45** 1905]
- [3] Yi L, Xiao Y, Yao K L 1993 *Acta Phys. Sin. (Overseas Ed.)* **2** 458
- [4] Zheng M S, Liu Y P 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 304 (in Chinese) [郑茂盛, 刘云鹏 1993 物理学报 **42** 304]
- [5] Ye G X, Xu Y Q, Wang J S, Zhang Q R 1994 *Acta Phys. Sin.* **43** 4 (in Chinese) [叶高翔, 许宇庆, 王劲松, 张其瑞 1994 物理学报 **43** 4]
- [6] Eckmann J P, Feinerman O, Gruendlinger L, Moses E, Soriano J, Tlusty T 2007 *Phys. Rep.* **449** 54
- [7] Soriano J, Martinez M R, Tlusty T, Moses E 2008 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **105** 13758
- [8] Goltsev A V, Abreu F V de, Dorogovtsev S N, Mendes J F F 2010 *Phys. Rev. E* **81** 1921
- [9] Adler J, Palmer R G, Meyer H M 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 882
- [10] Nakanishi H, Takano H 1986 *Phys. Lett.* **115A** 117
- [11] Ertel W, Frobose K, Jackle J 1988 *J. Chem. Phys.* **88** 5027
- [12] Sellitto M, Biroli G, Toninell C 2005 *Europhys. Lett.* **69** 496
- [13] Toninelli C, Biroli G, Fisher D S 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 5702
- [14] Chalupa J, Leath P L, Reich G R 1981 *J. Phys. C: Solid State Phys.* **14** 3187
- [15] Ma Z F, Zhang P, Wu Y, Li W H, Zhuang Y Q, Du L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 7201
- [16] Holroyd A E 2003 *Probab. Theory Relat. Fields* **125** 195
- [17] Holroyd A E 2006 *Electron. J. Probab.* **11** 418
- [18] Balogh J, Bollobas B 2006 *Probab. Theory Relat. Fields* **134** 624
- [19] Balogh J, Pittel B G 2007 *Random Struct. Alg.* **30** 257
- [20] Fontes L R G, Schonmann R H 2008 *J. Stat. Phys.* **132** 839
- [21] Watts D J 2002 *PNAS* **99** 5766
- [22] Baxter G J, Dorogovtsev S N, Goltsev A V, Mendes J F F 2010 *Phys. Rev. E* **82** 1103
- [23] Chen H B, Fan Y, Fang J Q, Di Z R 2007 *Acta Phys. Sin.* **58** 1383 (in Chinese) [陈宏斌, 樊瑛, 方锦清, 狄增如 2007 物理学报 **58** 1383]
- [24] Fan Y, Suo L N, Shen X S, Hu Y Q 2008 *J. BNU (Natural Science)* **44** 103 (in Chinese) [樊瑛, 索丽娜, 沈晓松, 胡延庆 2008 北京师范大学学报(自然科学版) **44** 103]
- [25] Ma W D, Wang L, Li R P, Shui H S, Zhou M T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1381 (in Chinese) [马卫东, 王磊, 李幼平, 水鸿寿, 周明天 2008 物理学报 **57** 1381]
- [26] Latapy M, Magnien C, Vecchio N D 2008 *Soc. Networks* **30** 31

Bootstrap percolation on bipartite networks*

Wan Bao-Hui¹⁾ Zhang Peng²⁾ Zhang Jing¹⁾ Di Zeng-Ru¹⁾ Fan Ying^{1)†}

1) (*Department of Systems Science, School of Management, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*)

2) (*School of Science, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

(Received 11 November 2011; revised manuscript received 17 January 2012)

Abstract

Bootstrap percolation was first used in statistic physics to study the phenomenon that magnetic-order goes down and disappears because of the disturbance of nonmagnetic impurity. With the development of complex network, the application of bootstrap percolation in network has attracted much attention. In the real world, many systems naturally exhibit the two-branch structure. And bipartite network is one of important networks in complex networks. In this paper, we use the dynamics equation and computational simulation to study the bootstrap percolation in bipartite networks. The parameters we focus on are the node initial active ratios f_1 and f_2 and active thresholds Ω_1 , and Ω_2 . We draw the conclusion that the ratio of active nodes has discontinuous transition, which will gradually disappear with parameters varying. We also prove the consistency between the dynamic equation and simulation results.

Keywords: bipartite networks, bootstrap percolation, proportion of active nodes

PACS: 64.60.ah, 05.70.Jk, 05.10.-a

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70771011, 61174150, 11147119), the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-09-0228), and the Fundamental Research Fund for the Central Universities, China (Grant No. G470422).

† E-mail: yfan@bnu.edu.cn