

# 动力学变换法探测连续系统不稳定周期轨道\*

马文聪 金宁德† 高忠科

(天津大学电气与自动化工程学院, 天津 300072)

(2012年2月1日收到; 2012年2月22日收到修改稿)

本文利用动力学变换方法和庞加莱截面方法对两种连续混沌动力学系统进行不稳定周期轨道探测研究, 并对 Lorenz 系统进行了替代数据法检验. 结果表明: 基于庞加莱截面的动力学变换改进算法可有效探测连续混沌动力学系统中的不稳定周期轨道.

**关键词:** 不稳定周期轨道, 动力学变换, 连续混沌动力系统, 庞加莱截面

**PACS:** 05.45.TP, 46.15.-x

## 1 引言

众所周知, 复杂混沌奇异吸引子中嵌有不稳定周期轨道 (unstable periodic orbits, UPOs)<sup>[1-3]</sup>. UPOs 表示非线性系统中同时具有周期性和不稳定性的极限环<sup>[4]</sup>, 是混沌奇异吸引子的骨架结构, 其蕴含有丰富的非线性动力学信息, 是理解混沌运动特性的重要途径之一.

自 Ott 研究组发表计算遍历不稳定周期轨道自然测度和 OGY 混沌控制算法的论文后<sup>[5]</sup>, 不稳定周期轨道理论得到了数学、物理、控制学、神经学等多个学科研究人员的广泛关注. 如可以通过 UPOs 公式求取重要的混沌吸引子特征量, 研究周期轨道问题<sup>[6]</sup>. 一些天体运动和量子混沌疤痕中存在着 UPOs 的计算问题<sup>[7]</sup>. OGY 混沌控制及其改进算法中的重要步骤也涉及系统中 UPOs 探测<sup>[8,9]</sup>. 神经动力学方面, 可通过探测 UPOs 研究脑电波或神经发放电现象, 使 UPOs 成为一种描述神经动力系统新语言<sup>[10,11]</sup>.

早期 UPO 探测算法是通过寻找周期轨道上周期性递归点和递归阈值完成探测 (LK 探测算法)<sup>[12]</sup>. 随后产生了动力学变换算法 (DT 算法)<sup>[13,14]</sup> 和 SD 算法<sup>[15]</sup>. DT 算法是通过一种动

力学变换, 对原始离散时间序列进行变换, 再观察变换后数据统计直方图中的奇异性尖峰, 识别尖峰的位置就可以探测 UPOs 的位置. SD 算法是一种探测 UPOs 的迭代求根方法. 经过改进, SD 法和牛顿-拉夫逊求根法可以结合成新的 DL 算法<sup>[16-18]</sup>, 拥有了全局收敛性和局部快速收敛的特性. DT 算法被广泛应用于医学信号探测, 特别是神经放电或脑电波的信号处理, 可以探测出嵌于生物电波中的 UPOs. 但是 DT 探测算法仍具有一定的局限性, 其只能探测离散动力系统中 UPOs. 所以, 本文提出了一种基于庞加莱截面的动力学变换改进算法, 该算法能探测连续系统中的 UPOs, 并且具有检验假 UPOs 的能力, 使探测结果更加准确.

## 2 动力学变换法探测不稳定周期轨道

一般来说, 对有确定方程的混沌动力系统, 可以通过解析或数值计算方法求出不稳定周期轨道. 但有些系统没有明确的方程, 只存在实验时间序列数据, 如何从实验数据中探测不稳定周期轨道是研究混沌系统的一个重要问题.

动力学变换 (DT) 法的基本思路是, 利用一种动力学变换对时间序列进行变换, 再对变换后结果进行统计处理, 得到 DT 变换统计直方图 (histogram

\* 国家自然科学基金 (批准号: 50974095, 41174109, 61104148) 资助的课题.

† E-mail: ndjin@tju.edu.cn

of DT, HDT). HDT 图中会存在奇异性尖峰, 尖峰位置就对应了不稳定周期轨道的位置 [13]. 为了证明得到结果是有效的, 还会对尖峰进行替代数据法的操作. 这种操作可以检验不稳定周期轨道的真伪, 而不会破坏数据统计特性.

假设有一个一维映射

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (1)$$

为估计不动点  $x^* = f(x^*)$  位置, 考虑如下变换:

$$\hat{x} = \frac{x_{n+1} - s(k)x_n}{1 - s_n(k)}, \quad (2)$$

其中

$$s_n(k) = \frac{x_{n+2} - x_{n+1}}{x_{n+1} - x_n} + k(x_{n+1} - x_n), \quad (3)$$

$$k = uR, \quad (4)$$

其中,  $u$  为随机参数, 满足  $u \geq 0$ ;  $R$  表示  $[-1, 1]$  中均匀分布的随机变量.

当  $u = 0$  且  $f(x)$  为一非线性函数时, 方程 (2) 的示意图如图 1 所示. DT 变换将不动点  $x^*$  线性区域中的点  $(x_n, x_{n+1})$  及  $(x_{n+1}, x_{n+2})$  变换为  $\hat{x}$ , 且  $\hat{x}$  非常靠近不动点  $x^*$ .

如果时间序列中有点  $x_n$  接近不动点  $x^*$  时, 点  $x_n$  的变换点  $\hat{x}$  就会被变换到  $x^*$  邻域内. 当大量点  $x_n$  接近  $x^*$  时,  $x^*$  邻域内会存在大量的变换点  $\hat{x}$ . 表现为变换点  $\hat{x}$  的统计直方密度函数  $\hat{\rho}(\hat{x})$  在不动点  $x^*$  附近存在负平方根的奇异性, 即

$$\hat{\rho}(\hat{x}) \sim |\hat{x} - x^*|^{-1/2}, \quad (5)$$

即可以在 DT 变换统计直方图中发现奇异性尖峰. 这个奇异性尖峰正好在不动点  $x^*$  处, 而这就是探测不稳定不动点的关键. 这种方法有别于一般的“递归” (recurrence) 法, 一般的“递归”法是通过在延迟相空间中选取合适的阈值, 来寻找递归往复后互相靠近点的方法来寻找不稳定轨道的方法.

图 2 表示 1000 个 Logistic 映射时间序列数据的往返映射图和 DT 变换统计直方图. 其中映射函数为  $f(x) = rx(1 - x)$ ,  $r = 3.9$ , DT 算法中的随机参数  $u = 15$ . HDT 的尖峰正好处于往返映射和斜率为 1 直线的交点处, 表明 DT 算法确实探测到了离散映射的不稳定不动点  $x^* = \frac{r-1}{r} \approx 0.7436$ .

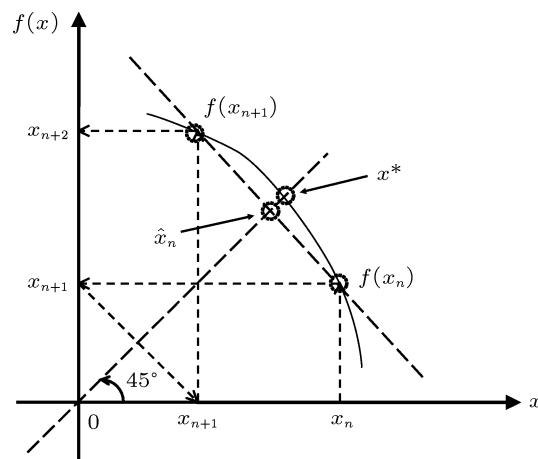


图 1  $u = 0$  时方程 (2) 的示意图

若可以探测离散混沌系统中的一周期不稳定周期轨道, 就能探测系统的任意周期不稳定周期轨道. 具体方法是, 如果想探测二周期的不稳定周期轨道, 就把原来时间序列数据进行 2 单位时间的延迟以后, 再探测处理后的时间序列不稳定不动点, 找到的点其实就是原来时间序列的二周期不稳定周期轨道. 变换的方法类似如下的式子:

$$L_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, \dots\} \xrightarrow{\text{变换到}} L_2 = \{x_1, x_3, x_5, \dots\} \text{ 或 } \{x_2, x_4, x_6, \dots\}. \quad (6)$$

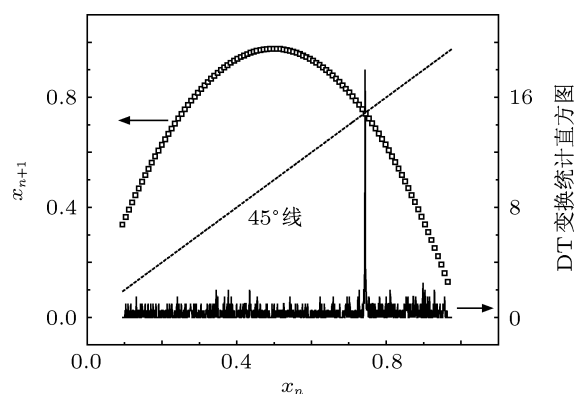


图 2 时间序列往返映射图和 DT 变换统计直方图

DT 算法也具有一定的抗噪性. 以探测系统的不稳定不动点为例, 本文在时间序列中加入一定强度噪声, 再进行不稳定周期轨道探测. 加入噪声的方法如下:

$$\tilde{x}_i = x_i + a \times N(0, 1) \times \text{std}(x), \quad (7)$$

其中,  $\tilde{x}_i$  是加噪时间序列,  $x_i$  是原始时间序列,  $a$  是噪声强度,  $N(0, 1)$  是标准正态分布随机变量,  $\text{std}(x)$  是时间序列  $\{x_n\}$  的标准差.

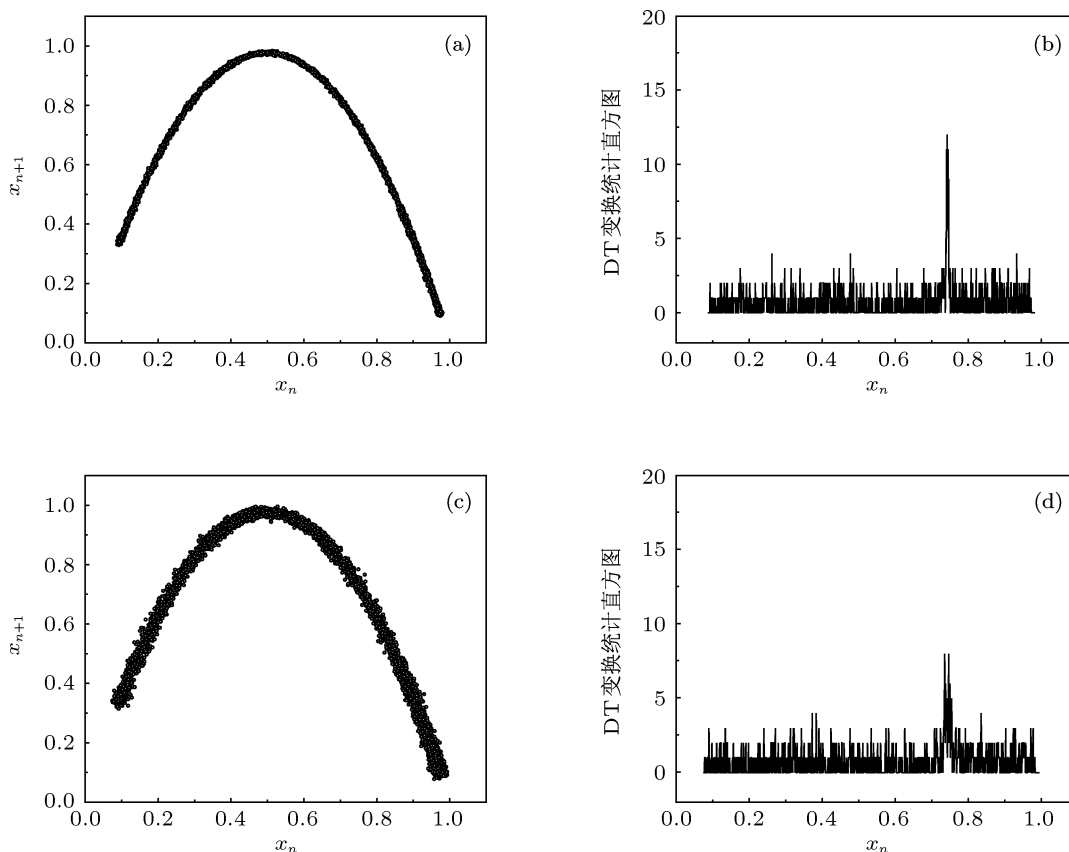


图 3 不同噪声强度往返映射图和 DT 变换统计直方图 (a)  $a = 1\%$  时往返映射图; (b)  $a = 1\%$  时 DT 变换统计直方图; (c)  $a = 3\%$  时往返映射图; (d)  $a = 3\%$  时 DT 变换统计直方图

图 3 中分别设定噪声强度为  $a = 1\%$  和  $a = 3\%$ , 可以看出探测的尖峰依然存在, 但是峰值缩小了一些, 说明 DT 算法对噪声有一定的鲁棒性, 但是噪声过强时也会使探测结果失效.

庞加莱 (Poincaré) 提出了一种方法, 可以分析多变量自治系统的运动. 在  $N$  维系统的  $N$  维相空间中适当选取  $N - 1$  维超截面, 通常称此截面为庞加莱截面 (Poincaré). 选取庞加莱截面要有利于观察系统的运动变化特征, 如截面不能与大多数轨线相切. 关于原来相空间连续流轨道在庞加莱截面上的截点分别为  $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ , 庞加莱映射  $T$  可表示如下:

$$P_{n+1} = TP_n. \quad (8)$$

在判断系统的拟周期性行为及是否为混沌的问题上, 连续流和庞加莱截面离散映射的效果是一样的. 由于 DT 算法只能应用到离散动力系统中, 如果要把 DT 算法应用到连续动力系统中, 必须在相空间中摆放庞加莱截面, 使连续流转化成离散映射, 对离散映射应用 DT 算法探测不稳定周期轨道, 再把探测结果带回到连续系统中, 求出连续系统的不

稳定周期轨道, 我们定义此算法为基于庞加莱截面的动力学变换改进算法.

### 3 DT 算法对连续混沌系统的探测

#### 3.1 对 Rossler 连续系统探测

Rössler 方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(y + x), \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + (x - c)z, \end{aligned} \quad (9)$$

其中, 当  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$  时, 系统处于混沌状态.

图 4 表示三维 Rössler 系统混沌吸引子. 由于 Rössler 系统的解是一个连续的流, 不能直接应用 DT 算法探测不稳定周期轨道. 所以, 需应用庞加莱截面方法使连续流变成离散映射. 图 5(a), (b) 示意了摆放庞加莱截面和将连续流转换为离散映射的方法. 摆放庞加莱截面的方法并不唯一. 较好的放置应如图 5(a) 所示, 在轨线互不相交叉的地方

摆放庞加莱截面, 摆放的方向尽量不要与轨线相切, 本例中选取  $x = 0$  处摆放庞加莱截面. 在图 5(b) 中, 以方程值由负变正的每一个时刻计时, 将两个时

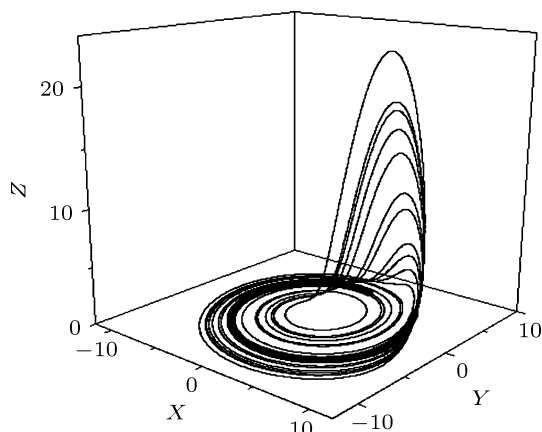


图 4 Rössler 三维系统混沌奇怪吸引子

刻之间的时间间隔记录下来, 作为要探测的时间序列  $\{T_n\}$ . 因为高维奇怪吸引子中互不交叉的轨线在低维投影图中可能会产生虚假的交点, 如果在这些虚假交点附近摆放庞加莱截面, 有可能会影响庞加莱截点的有效性, 而截面与轨线相切有可能使轨线与截面不相交, 不利于探测.

图 6(a) 为时间间隔  $\{T_n\}$  序列图. 如图 6(b) 所示, 探测出来的不稳定不动点是  $T^* \approx 5.8755$ . 这个数值就是方程 (9) 在  $a = 0.2, b = 0.2, c = 5.7$  条件下, 连续流的一周期不稳定周期轨道的时间周期  $T^*$ . 再以这个时间周期  $T^*$  为演化时间长度, 通过方程 (9) 可以容易寻找到递归靠近的点. 再以递归靠近点为起始点, 让方程 (9) 演化时间长度为  $T^*$ , 所得到的轨线就是一周期不稳定周期轨道. 如图 7(a)—(f) 所示, 探测出的轨线的就是一周期不稳定周期轨道, 同理也可以从系统中探测到二周期和三周期的不稳定周期轨道.

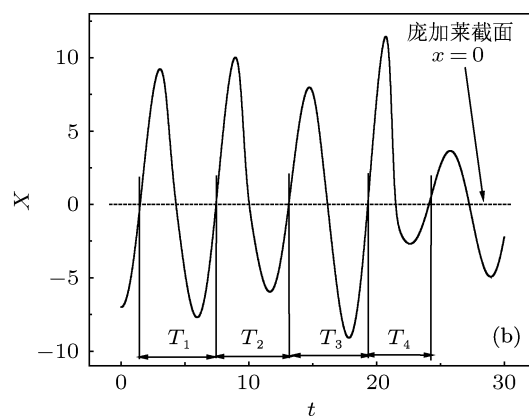
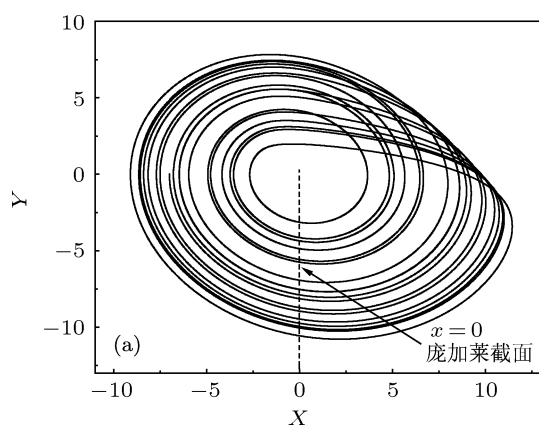


图 5 摆放庞加莱截面示意图 (a) 在  $x-y$  相空间中设置庞加莱截面; (b) 取时间间隔  $T_i$  为离散时间序列

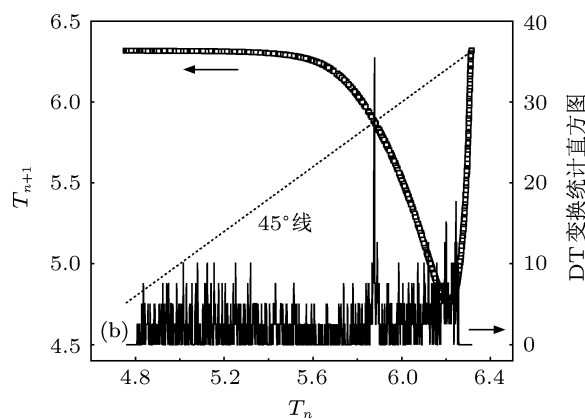
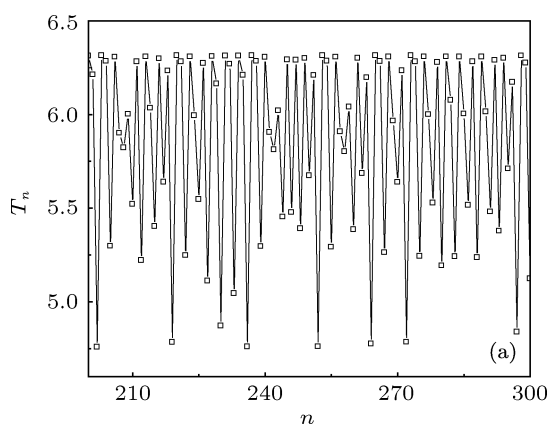


图 6 时间序列的往返映射图和 DT 变换统计直方图 (a) 时间间隔  $T_n$  序列图; (b)  $\{T_n\}$  往返映射和 DT 变换统计直方图

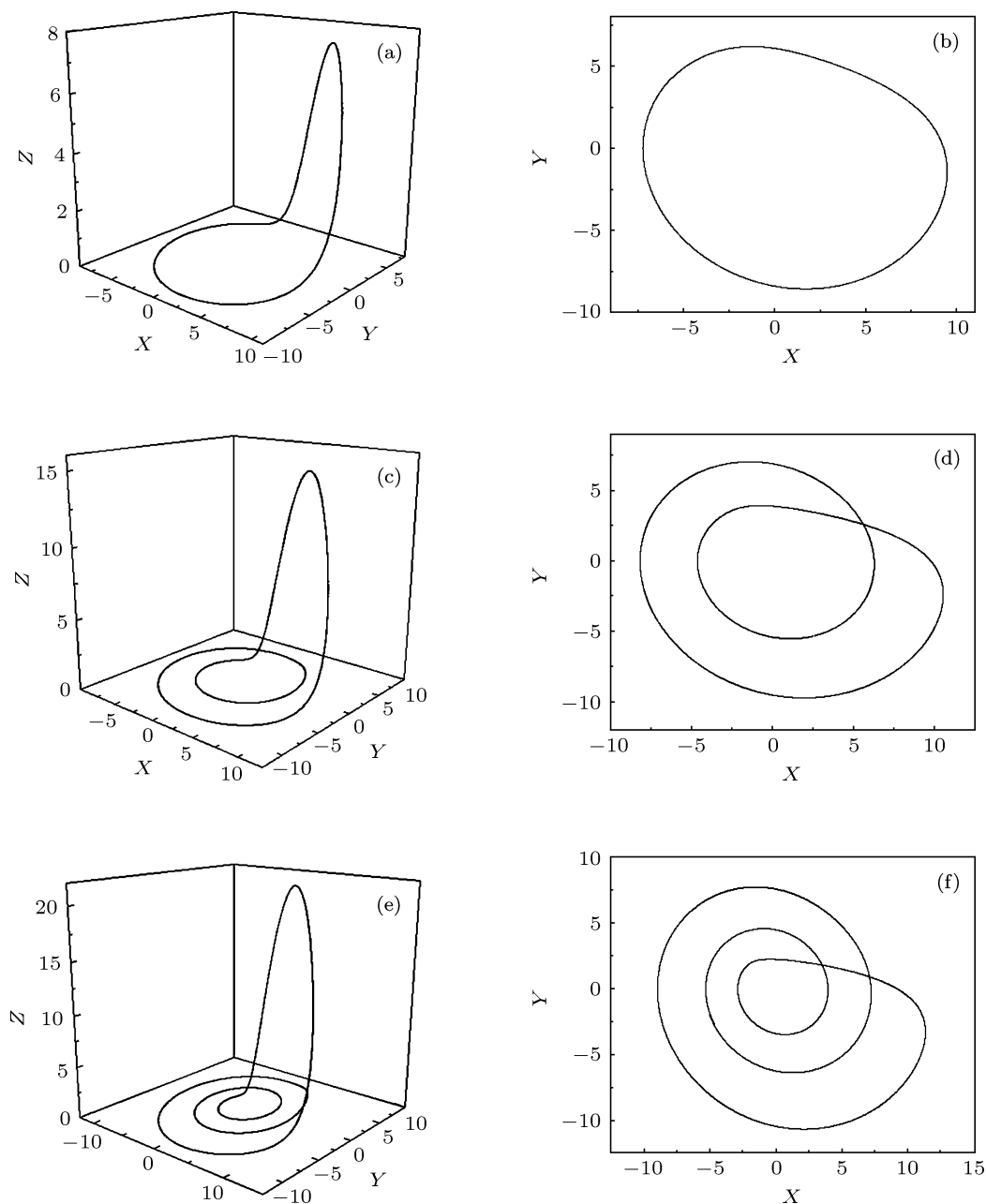


图7 Rössler 系统的多周期不稳定周期轨道 (a) 三维坐标一周期不稳定周期轨道; (b)  $x-y$  轴坐标一周期不稳定周期轨道; (c) 三维坐标二周期不稳定周期轨道; (d)  $x-y$  轴坐标二周期不稳定周期轨道; (e) 三维坐标三周期不稳定周期轨道; (f)  $x-y$  轴坐标三周期不稳定周期轨道

### 3.2 对 Lorenz 连续系统探测

Lorenz 方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\sigma(x - y), \\ \dot{y} &= -xz + rx - y, \\ \dot{z} &= xy - bz, \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 当参数为  $\sigma = 10, r = 25, b = 8/3$  时, 系统处于混沌状态. 图 8 为此参数下三维洛伦兹吸引子.

如图 9 所示, 按照对待连续流的方法, 摆放庞加莱截面, 取时间间隔  $\{T_n\}$  序列. 因为摆放庞加莱截面的位置并不唯一, 所以还是在轨线不相交的地方摆放庞加莱截面. 本例选在  $x = 8$  的位置摆放庞加莱截面. 图 10(a) 为时间序列  $\{T_n\}$  的往返映射图. 图 10(b) 为对截取到的时间序列  $\{T_n\}$  进行 DT 算法探测不稳定周期轨道.

图 10(b) 出现了两个尖峰, 但其中一个假的, 所以需用替代数据法加以检验. 实现替代数据的方

法是, 时间序列  $\{T_n\}$  的各数值不变, 只是随机打乱数据之间的顺序. 这样做可以使时间序列非线性的短期关联消失, 而数据随机统计性规律不变, 可以检验由混沌理论所作出的假设是否正确. 本文中用序列  $\{sT_n\}$  表示对  $\{T_n\}$  进行替代数据操作以后的时间序列.

如图 11(b) 所示, 第一个尖峰减小一些, 而第二个尖峰明显减弱, 说明第二个尖峰的有效性更强. 经过证实, 确实只有第二个峰是真正的一周期不稳定周期轨道. 探测到的一周期不稳定周期轨道的周期时间是  $T^* \approx 1.673$ . 如图 12 所示, 利用探测到的周期时间  $T^*$  可容易找到方程 (10) 在  $\sigma = 10, r = 25, b = 8/3$  条件下的一周期不稳定周期轨道. 若利用第一个尖峰所表示的时间间隔  $T' \approx 0.6$  进行探测, 探测出的轨道都有一个反复

测试总也不能闭合的缺口, 如图 13 所示, 说明此探测的轨道不是真实的不稳定周期轨道.

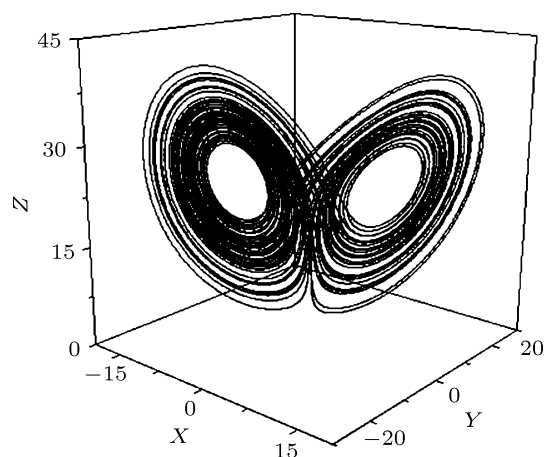


图 8 Lorenz 三维系统混沌奇异吸引子

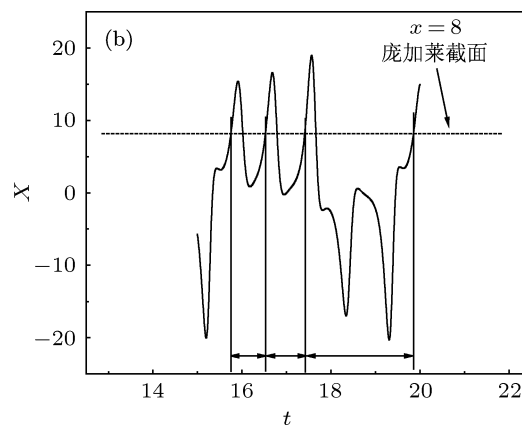
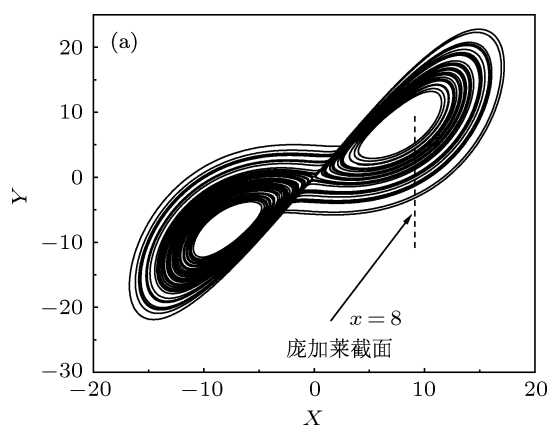


图 9 摆放庞加莱截面示意图 (a) 摆放庞加莱截面; (b) 时间间隔  $T_n$  作为新的时间序列

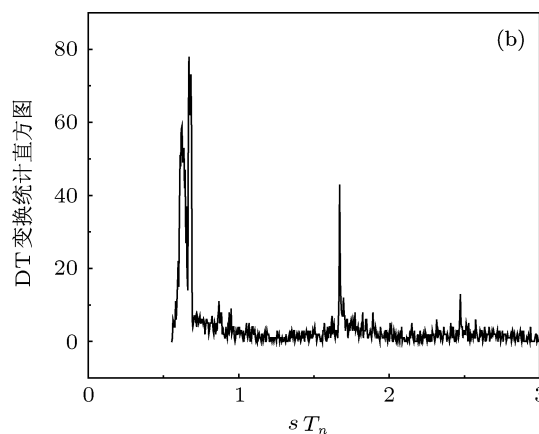
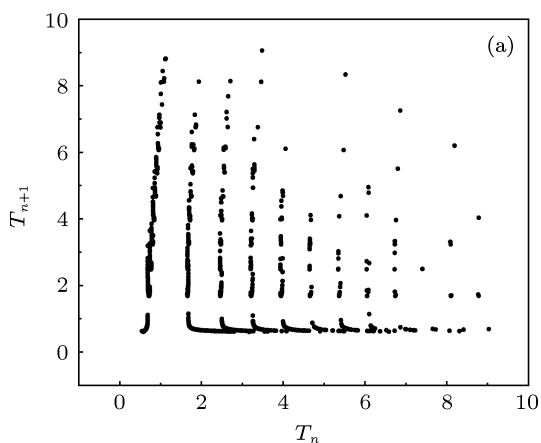


图 10 时间序列往返映射图和 DT 变换统计直方图 (a) 时间间隔  $T_n$  的往返映射图; (b) 时间间隔  $T_n$  的 DT 变换统计直方图

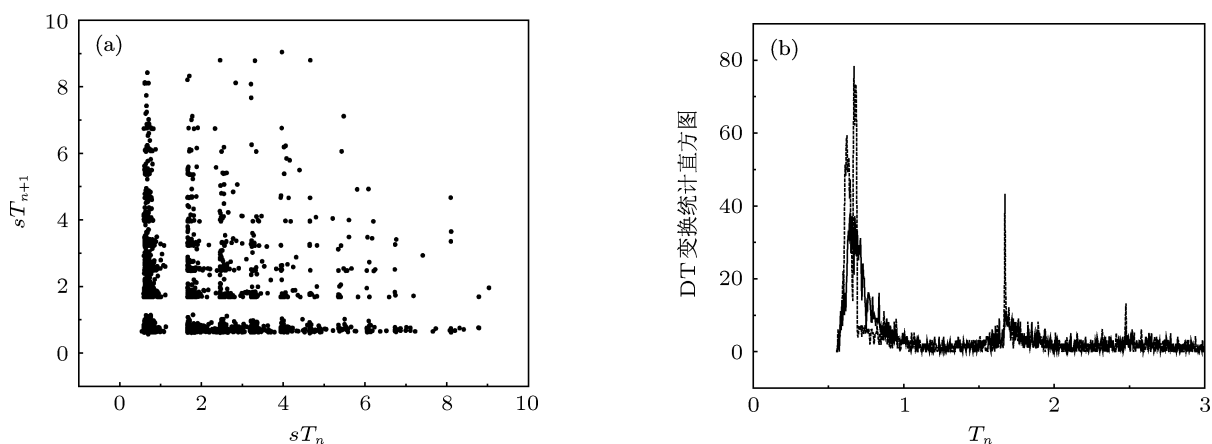


图 11 时间序列替代数据往返映射图和 DT 变换统计直方图 (a) 时间间隔  $T_n$  替代数据  $sT_n$  往返映射; (b) 原数据 (虚线) 和替代数据 (实线)DT 变换统计直方图

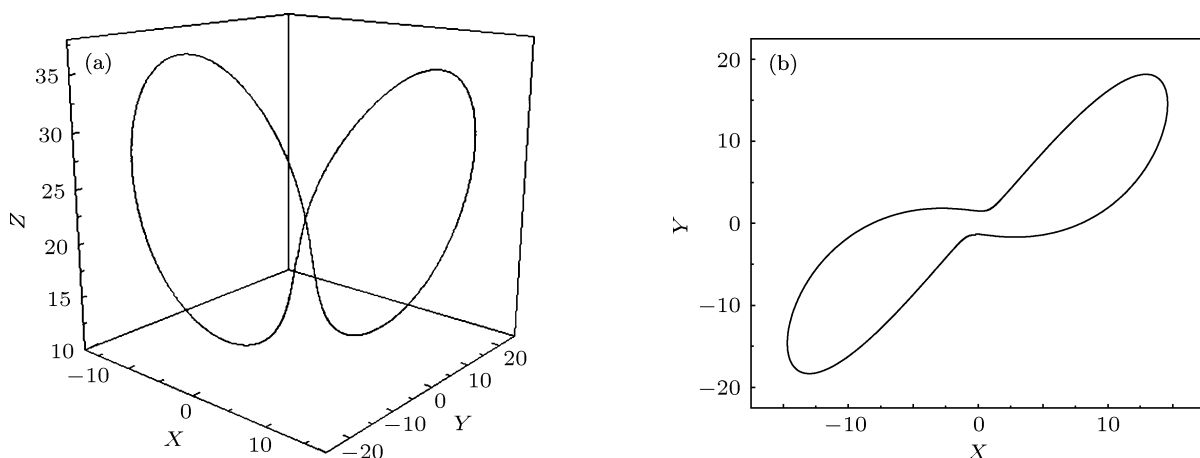


图 12 Lorenz 系统一周期不稳定周期轨道 (a) 三维坐标一周期不稳定周期轨道; (b)  $x-y$  轴坐标一周期不稳定周期轨道

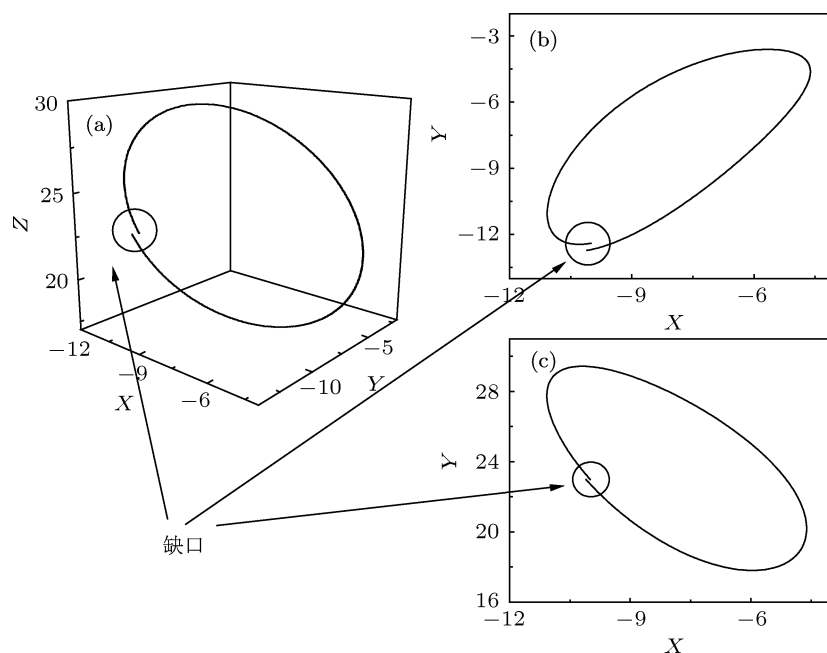


图 13 Lorenz 吸引子中假不稳定周期轨道始终存在一个反复测试也不能闭合的明显缺口 (a) 三维空间中假不稳定周期轨道; (b)  $x-y$  平面中假不稳定周期轨道; (c)  $x-z$  平面中假不稳定周期轨道

## 4 结论

对混沌时间序列进行动力学变换算法 (DT 算法) 后会在不稳定周期轨道的位置产生奇异性尖峰, 如果采用合适的参量会使尖峰更加清晰准确. 对于离散系统, 可以直接应用 DT 算法探测系统中的不稳定周期轨道; 对于连续系统, 先应用庞加莱截面法使连续的流变成离散的映射, 将连续的流数据变成离散的时间间隔的时间序列, 再对离散时间

序列应用 DT 算法探测时间间隔的不稳定周期轨道, 求出一个时间周期, 根据这个时间周期可以容易求出流数据中的不稳定周期轨道, 定义此算法为基于庞加莱截面的动力学变换改进算法. 本文分别以 Rössler 系统和 Lorenz 系统为例, 验证了基于庞加莱截面的动力学变换改进算法在连续混沌动力学系统不稳定周期轨道探测上的有效性. 本研究丰富发展了传统的动力学变换算法, 可为时间序列不稳定周期轨道探测研究提供新思想, 开拓新途径.

- [1] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1988 *Phys. Rev. A* **37** 1711
- [2] Auerbach D, Cvitanovic P, Eckmann J P, Gunaratne G, Procaccia I 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 2387
- [3] Biham O, Wenzel W 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 819
- [4] Pierson D, Moss F 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 2124
- [5] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Rhys. Rev. Lett.* **64** 1196
- [6] Zhang X H, Shen K 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 2186 (in Chinese) [张晓辉, 沈柯 1999 物理学报 **48** 2186]
- [7] Berry M V 1989 *Proc. R. Soc. Lond.* **A423** 219
- [8] Luo X S, Chen G R, Wang B H, Fang J Q, Zou Y L, Quan H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 790 (in Chinese) [罗晓曙, 陈关荣, 汪秉宏, 方锦清, 邹艳丽, 全宏俊 2003 物理学报 **52** 790]
- [9] Wu S H, Hao J H, Xu H B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020509
- [10] Xie Y, Xu J X, Kang Y M, Hu S J, Dan Y B 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1112 (in Chinese) [谢勇, 徐建学, 康艳梅, 胡三觉, 段玉斌 2003 物理学报 **52** 1112]
- [11] So P, Francis J T, Netoff T I, Gluckman B J, Schiff S J 1998 *Biophysical Journal* **74** 2776
- [12] Lathrop D P, Kostelich E J 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4028
- [13] So P, Ott E, Schiff S J, Kaplan D T, Sauer T, Grebogi C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4705
- [14] So P, Ott E, Sauer T, Gluckman B J, Grebogi C, Schiff S J 1997 *Phys. Rev. E* **55** 5398
- [15] Schmelcher P, Diakonov F K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **23** 4733
- [16] Davidchack R L, Lai Y C 1999 *Phys. Rev. E* **60** 6172
- [17] Davidchack R L, Lai Y C, Klebanoff A, Bollt E M 2001 *Rhys. Rev. A* **287** 99
- [18] Pei X, Dolan K, Moss F, Lai Y C 1998 *Chaos* **8** 853

# Detecting unstable periodic orbits from continuous chaotic dynamical systems by dynamical transformation method\*

Ma Wen-Cong Jin Ning-De<sup>†</sup> Gao Zhong-Ke

(School of Electrical Engineering and Automation, Tianjin University, Tianjin 300072, China)

(Received 1 February 2012; revised manuscript received 22 February 2012)

## Abstract

Detecting unstable periodic orbits (UPOs) from chaotic dynamic systems is a challenging problem. For a large number of complex systems, we can collect some experimental time series data but cannot find theoretical models to describe them. Thus, detecting unstable periodic orbits from experimental data can help us understand the chaotic properties of physical phenomenon without using theoretical models. We, in this paper, first use the dynamical transformation (DT) algorithm to detect unstable periodic orbits from chaotic systems, and find that the original DT algorithm can detect the UPOs from the time series of chaotic discrete map, but it is infeasible for the time series from continuous chaotic flow. In this regard, we then propose an improved DT algorithm that is based on the Poincare section method to detect the UPOs from continuous chaotic flow. In particular, we transform the continuous flow data into discrete map time series in terms of Poincare section, and then detect unstable periodic orbits from the transformed discrete map time series. In addition, we take Rössler and Lorenz chaotic systems as examples to demonstrate the effectiveness of our proposed method.

**Keywords:** unstable periodic orbits, dynamical transformation, continuous chaotic dynamical system, Poincare section

**PACS:** 05.45.TP, 46.15.-x

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 50974095, 41174109, 61104148).

<sup>†</sup> E-mail: ndjin@tju.edu.cn