

加权方式对网络同步能力的影响*

王丹^{1)†} 井元伟²⁾ 郝彬彬²⁾

1) (沈阳大学装备制造综合自动化重点实验室, 沈阳 110044)

2) (东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

(2011年11月30日收到; 2012年2月27日收到修改稿)

针对真实网络中权值与端点度的相关特性, 提出了一种与始点和终点的度都相关的非对称加权方式. 在不同的网络结构下研究加权方式对同步能力的影响. 研究发现网络异质性越强时, 通过调节网络权值改变网络同步能力的效果越显著, 而网络越匀质时, 调节权值的方式改变网络同步能力的效果越不明显. 仿真实验显示无论在小世界网络还是无标度网络中, 网络都是在节点的输入强度为 1 处获得最优的同步能力.

关键词: 同步优化, 同步能力, 小世界网络, 无标度网络

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r

1 引言

近年来, 耦合动态网络的同步问题已经成为广泛关注的热点研究问题. 研究网络结构特性与同步能力之间的关系是复杂网络同步问题研究的前提和热点之一^[1-3]. 早期的关于同步能力的研究主要集中在具有完全规则拓扑结构的网络^[4], 其中的两个典型例子是耦合映象格子^[5]和细胞神经网络^[6]. 随着小世界和无标度特性的提出, 人们注意到复杂网络的拓扑结构^[7]对网络同步特性起着重要的作用, 使得人们开始关注网络的拓扑结构与网络的同步化行为之间的关系, 希望得到同步最优的网络结构. 目前也有许多文献通过改变网络的拓扑结构来提高网络的同步能力^[8-15]. 但在这些研究中大多假定网络是无权无向的, 然而, 真实世界中的网络很多都是加权的. 事实上, 很多复杂网络的同步都是与网络中边的权值相关的, 并且表现出了节点度和权值的异质性分布, 例如, 神经网络, 航空网络. 为了更符合实际的网络结构, 同时也为了进一步的研究现实网络结构的动力学特性, 越来越多的人开始研究加权耦合的复杂网络特性.

目前也有一些学者对网络的权值与同步能力的关系进行了研究, Motter 等人的研究表明, 网络的度分布异质性降低了网络的同步能力^[16]. 并且通过一种与节点 i 的度相关的加权方式, $G_{ij} = L_{ij}/k_i^\beta$ 来抵消异质性对网络同步能力的影响, 此时网络的强度 S_i 分布是均匀的. 文献 [16] 中加权网络中节点的强度 S_i 定义为

$$S_i = \sum_{j \in \Gamma(i)} w_{ij}, \quad (1)$$

其中, $\Gamma(i)$ 表示节点 i 的邻节点所组成的集合. 在有向网络中, (1) 式所定义的强度 S_i 为节点的输入权值之和. 作者给出当 $\beta = 1$ 时, 耦合矩阵 G 具有更小的特征值比值 R . Chavez 等人提出了一种与边的介数 b_{ij} 相关的一种加权方式, 并且网络同步能力最优时的加权方式与 Motter 等人得到的最优结果相同^[11]. 这是一种基于网络全局信息的加权方式, 作者指出基于全局信息的加权方式能够提高网络的同步能力. 但是, Zhou 和 Motter 等^[17]所提出的基于局部信息的加权方式 $G_{ij} = -k_j^\alpha / \sum_{j \in \Gamma(i)} k_j^\alpha$, 也能使网络的同步能力获得相应的提高, 网络同步最优的时候对应的参数 $\alpha = 0$. 文献 [17] 的结果与文献 [11] 中得到的 $\beta = 1$ 的网络权值是完全对

* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 61104029) 资助的课题.

† E-mail: wangdan0307@126.com

应的. 另外, Zhao 等人在文献 [17] 的基础上引入了参数 β , $G_{ij} = -k_j^\alpha / (\sum_{j \in \Gamma(i)} k_j^\alpha)^\beta$, 并且研究了网络的同步能力与两个参数的关系 [12]. 还有一种典型的加权方法是利用节点的年龄 [18]. Hwang [19] 和 Zou [20] 等人研究了与节点的年龄有关的非对称加权网络同步能力与加权方式之间的关系. 当网络中从旧节点到网络的新节点之间的权值占主导地位时, 网络的同步能力更强.

考虑到真实网络中, 边的权值通常是与边的两个端点都相关的. 本文基于文献 [16], 提出了一种基于 w_{ij} 两个端点的度 k_i, k_j 的非对称加权方案. 首先研究了小世界网络和无标度网络中加权方式与网络同步能力的影响. 其次, 研究了度分布的异质性的不同网络网络的加权方式与同步能力之间的关系.

2 与节点度相关的加权方式

考虑一个由 N 个相同节点组成的动态网络, 其中每个节点是一个 n 维系统, 其状态变量用 $x_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示, 那么第 i 个节点的动态方程表达式为

$$\dot{x}_i = f(x_i) + \sigma \sum_{j=1}^N G_{ij} h(x_j), \quad (2)$$

其中, f 描述单个孤立节点的动态特性, h 为内部耦合函数, σ 为耦合强度, $G = (G_{ij})_{N \times N}$ 为耦合矩阵. 假设 G 的所有特征值满足

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N, \quad (3)$$

此时主稳定方程为

$$\dot{\eta} = [Df(s) + \alpha Dh(s)]\eta, \quad (4)$$

其中, $\alpha = \sigma \lambda_i$, λ_i 为耦合矩阵 G 的特征值. 网络中边 (i, j) 的权值为 G_{ij} , 当 $G_{ij} = G_{ji}$ 时, 网络是无向网络; 当 $G_{ij} \neq G_{ji}$ 时, 网络是有向网络.

在这里, 采用如下的网络同步能力判定标准: 对于类型 I 网络而言, 同步能力可以由耦合矩阵 G 的第二大特征值 λ_2 描述, λ_2 越小网络的同步能力越强. 对于类型 II 网络的同步能力通过特征值之比 $R = \lambda_N / \lambda_2$ 来描述, R 越小网络的同步能力越强, 相反 R 越大网络的同步能力越差. 因此, 分析网络同步问题就也转变为分析耦合矩阵特征值的问题.

定义一个矩阵 L^* , 具体元素如下式求得, 相当于对原来的耦合矩阵 L 的对角线元素进行了修改得到的.

$$L_{ij}^* = \begin{cases} L_{ij}, & j \neq i, \\ -\sum_{j=1, j \neq i}^N L_{ij} k_i^\alpha k_j^{-\beta}, & j = i, \end{cases} \quad (5)$$

其中, k_i, k_j 分别为节点 i 和 j 的度; α, β 分别为一个可调参数; L_{ij} 为网络耦合矩阵 L 在第 i 行第 j 列的元素 (对角元素 $L_{ii} = -k_i$, 如果节点 i 与节点 j 之间有连接 $L_{ij} = 1$, 没有连接 $L_{ij} = 0$).

考虑如下形式的加权网络:

$$G_{ij} = L_{ij}^* / k_i^\alpha k_j^\beta, \quad (6)$$

其中, G_{ij} 表示节点 j 到节点 i 的边权, 当 $\alpha \neq 0$, 或者 $\beta \neq 0$ 时, 这个网络为加权有向网络, 当 $\alpha = \beta \neq 0$ 时, 这个网络为一般的无向网络, $\alpha = \beta = 0$ 时, 网络为无权无向网络. 如果耦合矩阵 G 满足同步的判定条件, G 的特征值满足 (3) 式. 那么可以用耦合矩阵的特征值来描述网络同步能力的大小. 下面我们证明, 按照 (6) 式定义的耦合矩阵是对称且行零和的, 其特征值满足 (3) 式.

首先, 把 (6) 式写出矩阵形式

$$G = D^{-\alpha} L^* D^{-\beta}, \quad (7)$$

其中, $D = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$ 为由节点的度组成的对角矩阵.

由于

$$\begin{aligned} & \det(D^{-\alpha} L^* D^{-\beta} - \lambda I) \\ &= \det(D^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} L^* D^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} - \lambda I), \end{aligned} \quad (8)$$

对于任何 λ 都成立, 所以, 有非对称矩阵 G 的所有特征值等于一个对称矩阵 H 的特征值为

$$H = D^{-\frac{\alpha-\beta}{2}} L^* D^{-\frac{\alpha-\beta}{2}}. \quad (9)$$

由 H 为实对称矩阵可知, 矩阵 G 的所有特征值为实数, 另外由 H 是半负定矩阵可知, G 的所有特征值是负数或者是 0. 下面证明 G 为满足行零和的矩阵.

G 第 i 行所有元素之和为

$$\begin{aligned} G_i &= k_i^{-\alpha} \sum_{j=1}^N L_{ij}^* k_j^{-\beta} \\ &= k_i^{-\alpha} \left(\sum_{j=1, j \neq i}^N L_{ij} k_j^{-\beta} \right. \\ &\quad \left. + \left(-\sum_{j=1, j \neq i}^N L_{ij} k_i^\beta k_j^{-\beta} \right) k_i^{-\beta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= k_i^{-\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N L_{ij} k_j^{-\beta} \\
 &\quad - k_i^{-\alpha} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N L_{ij} k_j^{-\beta} \\
 &= 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

所以 G 的最大特征值 λ_1 为 0. 如果网络是连通的, 那么对于任何 α, β 都有, $\lambda_i < 0$ ($i = 2, 3, \dots, N$). 可以通过耦合矩阵的特征值 λ_2 和特征值比值 R 来描述网络的同步能力. 目前针对加权方式与同步能力的研究主要集中在类型 II 网络, 本文针对此类网络进行仿真分析.

3 仿真分析

3.1 小世界网络

Newman 和 Watts 在 1999 年, 在规则网络的基础上, 利用随机化加边原则构造的模型被称为 NW 小世界模型 [21]. NW 小世界网络是介于最近邻耦合网络和全局耦合网络之间的一种网络模型, 通过对最近邻耦合网络增加连接, 使网络具有更小的平均最短路径和大的簇系数, 增加边的概率为 $0 \leq p \leq 1$, 本文选取 $p = 0.5$.

对于近邻耦合的规则网络, 任何固定的耦合强度 σ , 无论 σ 是多大, 如果这个网络充分大, 则这个网络不能同步. 相反, 全局耦合的规则网络, 其同步能力与网络的规模无关, 只要同步化区域 (α_2, α_1) 满足 $\alpha_2/\alpha_1 < 1$ ($\alpha_2, \alpha_1 < 0$), 就可以实现同步. 小世界网络的同步能力介于两者之间. 但是这些结论都是建立在网络是无权的网络基础上的. 对于加权网络, 网络中边的权值是与边的两个节点的度相关的加权方式下, 同步能力和两个节点的度具有什么样的相关性时, 网络同步能力强? 边与节点的度具有什么样相关性时, 网络的同步能力弱呢? 图 1 给出了 NW 网络的规模为 $N = 500$ 时, 网络同步能力与两个可调参数 α, β 之间的关系.

从图 1 中可以看出 R 与参数 α, β 之间的关系. R 值越小, 网络同步能力越强. 当网络中的两个参数 α, β 之中, $\alpha = 0$ 时, $G_{ij} = L_{ij}^*/k_i^\alpha k_j^\beta = L_{ij}^*/k_j^\beta$, 边的权值仅与初点 j 的度 k_j 相关. $\beta = 0$ 时, $G_{ij} = L_{ij}^*/k_i^\alpha k_j^\beta = L_{ij}^*/k_i^\alpha$, 边的权值仅与初点 i 的度 k_i 相关, 所提出加权方式退化为文献 [17] 所研究的情况. 由图 1 可以看出, $\alpha \approx 1$ 时网络获得最好的同步能力. 而当网络的 $\alpha > 0$ 或者 $\alpha < -2$ 时, 网络的同步能力受 β 的影响很小. 这意味着, 网

络的边权 G_{ij} 与终点 i 的相关性, 对网络的同步能力影响更大. 当边权与终点的度近似成反比的时候, 网络同步能力最好.

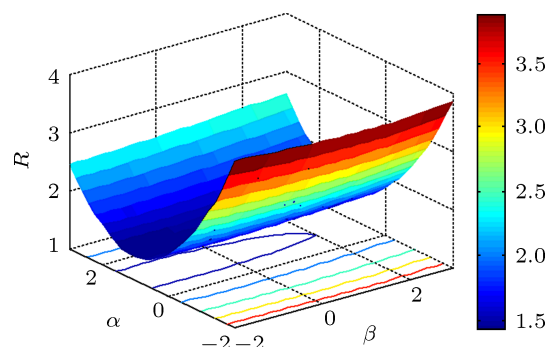


图 1 NW 小世界网络特征值比值 R 与参数 α, β 的关系

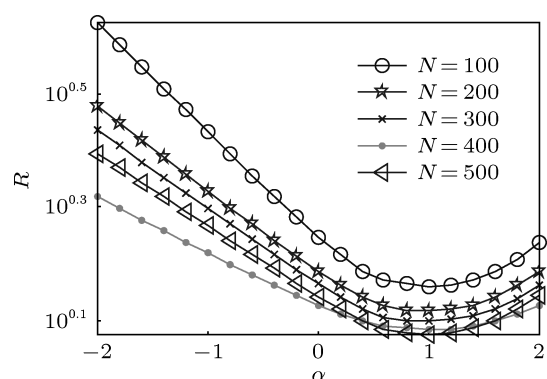


图 2 $\beta = 0$ 时 NW 小世界网络特征值比值 R 与参数 α 的关系

图 2 给出网络规模不同的情况下, 当参数 $\beta = 0$ 时, 网络同步能力与参数 α 的关系, 其中 $\alpha = 0$ 的点, 对应无权网络. 可以看出: 无论在哪一种网络规模下, $0 < \alpha < 2$ 时, 网络同步能力增强. 在 $\alpha = 1$ 时, 网络的同步能力最强, 这与文献 [16] 得到的结论是相同的.

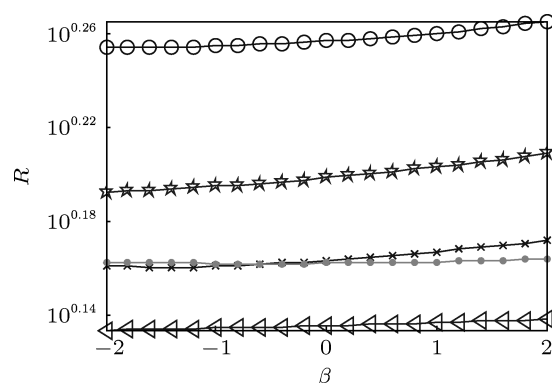


图 3 $\alpha = 1$ 时 NW 小世界网络特征值比值 R 与参数 β 的关系

图 3 给出 $\alpha = 1$, 网络规模不同时, 参数 β 对同步能力的影响. 图 3 中不同的曲线对应不同的网

络规模,用“○”标记规模 $N = 100$ 的网络,标记符号“○, ☆, ×, ·, △”依次表示网络节点数为 100—500,网络规模逐渐增加.可以看出,当 NW 小世界网络的规模越大,参数 β 对网络同步能力的影响越小,甚至几乎没有影响.

3.2 无标度网络

最近的研究表明,真实网络中许多复杂网络,包括 Internet, WWW 以及新陈代谢网络等的连接度分布函数具有幂律形式.这类网络的节点的度分布服从幂律分布的网络称为无标度网络.为了解释幂律分布的产生机理,Barabási 和 Albert 提出了一个无标度网络模型^[22],现被称为 BA 模型. BA 模型是最基本的一种无标度网络模型.在这部分中,主要研究的是边的权值与两个节点度相关的情况下,BA 无标度网络的同步能力.仿真中,采用网络规模为 500,研究网络特征比值 R 与两个参数之间的关系.

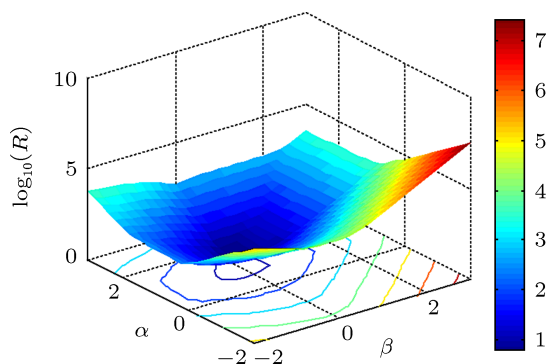


图 4 BA 无标度网络特征比值 R 与参数 α, β 的关系

图 4 给出了网络的同步能力与两个参数之间的关系,为了便于观察, z 轴选取为 $\log_{10} R$. 图 4 中, $\alpha = 0, \beta = 0$ 对应无权网络, $\alpha < -1, \beta > 2$ 时,网络特征比值显著增加.

图 5—7 研究无标度网络的同步能力仅与一个参数有关的情况,其中图 5 给出了当网络权值形式为 $G_{ij} = L_{ij}^*/k_j^\beta$ 时,网络同步能力与参数 β 之间的关系.当网络规模不同时,总能找到一个 $\beta < 0$ 的区间,使得网络的特征比值比 $\beta = 0$ 时小,也就是比无权网络的同步能力强.图 6 给出了网络的 $G_{ij} = L_{ij}/k_i^\alpha$ 时,网络同步能力与参数 α 之间的关系.由图 6 可以看出,不同的网络规模下,网络都在 $\alpha = 1$ 这一点获得最好的同步能力,由 (1) 式可知,此时网络的输入强度为 1.

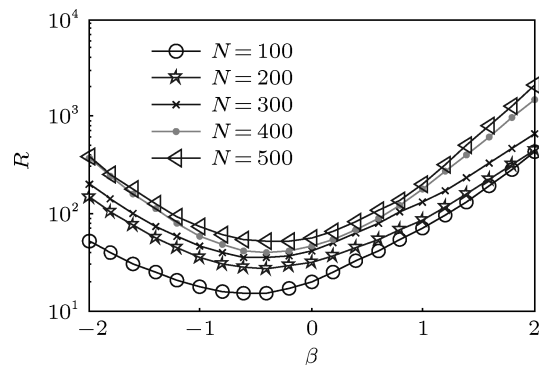


图 5 $\alpha = 0$ 时 BA 无标度网络特征比值 R 与参数 β 的关系

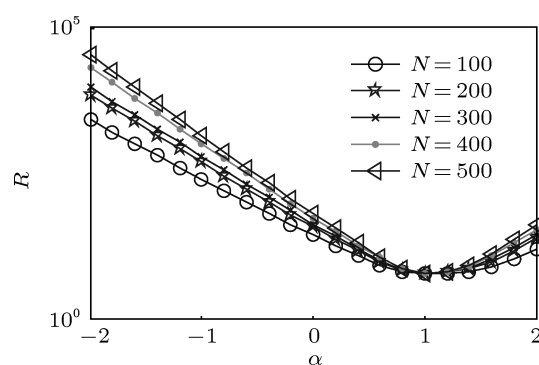


图 6 $\beta = 0$ 时 BA 无标度网络特征比值 R 与参数 α 的关系

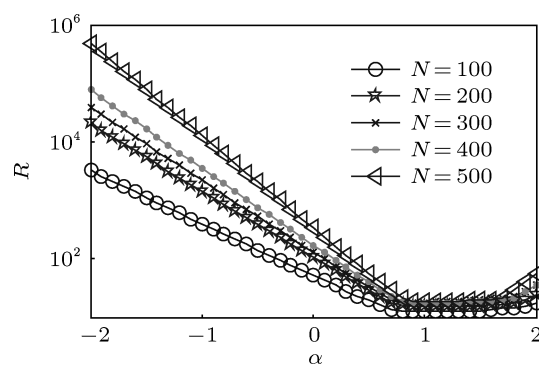


图 7 $\beta = 1$ 时 BA 无标度网络特征比值 R 与参数 α 的关系

此外,我们研究了当 $\beta \neq 0$ 时,同步能力与参数 α 之间的关系.图 7 给出了 $\beta = 1$ 时,网络同步能力与参数 α 之间的关系.由图 7 我们可以看到,图中各个网络规模所对应的曲线底部都有一段比较平直直线,网络获得最小的特征比值时,对应的 α 不是一个点,而是一个区域.这个区域在网络规模不同时,略有差异.可见,当 β 取不同的值时,网络的最优同步能力所对应的参数有所不同.综上所述,两个参数 α, β 对网络的同步能力都有影响,共同决定着网络的同步能力.

3.3 度分布可调网络

前面研究了 NW 小世界网络和 BA 无标度网络加权方式对网络同步能力的影响,发现度分布异质性不同时,网络的权值对同步能力的影响也是不同的.下面研究度分布介于两者之间的异质可调网络,在度分布异质性不同时,网络加权方式对网络同步能力的影响.采用文献 [23] 提出的度分布可调网络模型,该模型是在 BA 无标度演化网络模型的基础上加入了随机连接,演化过程中新加入的节点选取节点时,按照概率 ε 进行随机选取,按照概率 $(1-\varepsilon)$ 进行度优先选取.通过调节参数 $\varepsilon \in [0, 1]$,调节网络的度分布异质性,当 $\varepsilon = 0$ 时,对应异质性的 BA 无标度网络,幂率指数 $\gamma = 3$.当 $\varepsilon = 1$ 时,对应匀质的随机网络.当 $0 < \varepsilon < 1$ 时,网络介于匀质网络和 BA 无标度网络之间.

考虑到现实中的科学合作网络,航空网络等权值 $w_{ij} = (k_i k_j)^\theta$,也即本文提出的加权方式中, $\alpha = \beta$ 的情况.首先研究网络 $\alpha = \beta$ 时,网络的权值参数 α, β 在不同的异质性参数 ε 下,对网络同步能力的影响.

图 8 给出了网络特征值比值 R 与参数 α, β 和 ε 之间的关系.仿真采用的网络规模为 $N = 500$.当 $\alpha = \beta$ 时,网络权值 $G_{ij} = L_{ij}^*/(k_i k_j)^\alpha$, $\alpha = 0$ 对应无权的网络, $\alpha \neq 0$ 时为加权网络.当 $\varepsilon = 0$ 时,对应异质性的无标度网络,此时 $\alpha < 0$,网络的特征值比值指数性增加,网络的同步能力减弱.当 $0 < \alpha < 1$ 时,网络同步能力增加.而 $\varepsilon = 1$ 时,网络是匀质性的网络,同样有当 $\alpha < 0$ 时,网络的同步能力减小.当 $0 < \alpha < 1$ 时,网络同步能力增加.但是网络的特征值比值变化范围小得多.因此,当 $\alpha = \beta$ 时,网络权值 $G_{ij} = L_{ij}^*/(k_i k_j)^\alpha$,网络异质性越强,通过调节网络权值改变网络同步能力的效果越显著,而网络越匀质,则调节权值的方式改变网络同步能力效果越不明显.

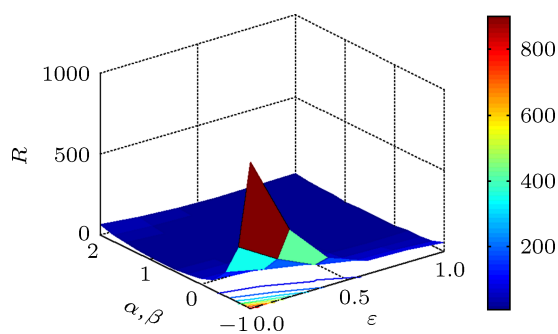


图 8 $\alpha = \beta$ 时网络的第二大特征值 λ_2 与 ε 和 α, β 的关系

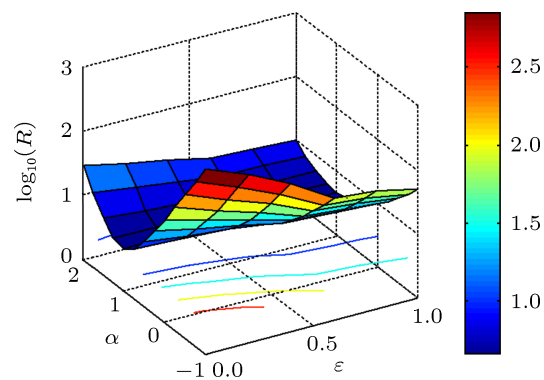


图 9 $\beta = 0$, 小网络的特征值比值 R 与参数 α, ε 的关系

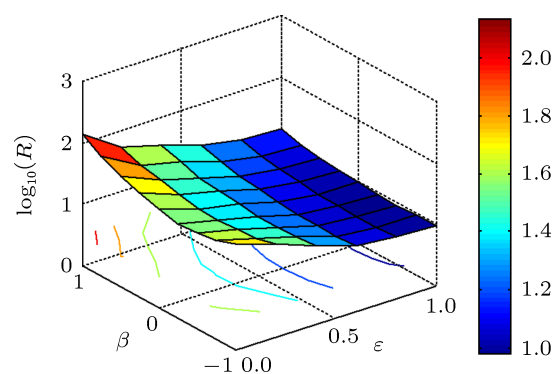


图 10 当 $\alpha = 0$ 时,网络的特征值比值 R 与参数 ε, β 的关系

当网络边仅与其始点度相关 ($\alpha = 0$) 或者仅与其终点度相关 ($\beta = 0$) 情况下,我们研究网络异质性不同时,参数 β 或者 α 对网络同步能力的影响.图 9 与图 10 给出了网络中边的权值仅与始点度或者终点度相关时,同步能力在网络异质性不同时与权值的关系,为了便于观察,将 z 轴取为 $\log_{10} R$.其中图 9 给出了 $\beta = 0$ 时,不同异质性网络的特征值比值 R 与参数 α 的关系.在 ε 从 0—1 变化过程中,都可以通过给网络加权来调节网络的同步能力.当 $\beta = 0$ 时,权值 $G_{ij} = L_{ij}/k_i^\alpha$, $\alpha = 0$ 对应无权网络, $\alpha \neq 0$ 对应加权网络.当 $\varepsilon = 0$ 时,网络为无标度网络.此时, $\alpha < 0$ 网络耦合矩阵特征值比值显著增加,同步能力变弱. $\alpha > 0$, 网络同步能力增强.无论是异质性网络,还是匀质性的,网络都是在 $\alpha = 1$ 时获得最优同步能力.图 10 给出了 $\alpha = 0$ 时,权值 $G_{ij} = L_{ij}^*/k_j^\beta$ 仅与始点度相关的网络同步能力与参数 β, ε 的关系.当 $\beta \in (\alpha, 0)$ 时,加权方式可以提高网络同步能力.使得网络同步能力增强的参数 β 取值范围与网络异质性有关,异质性越强 α 取值越大,同步能力提高的 β 的取值区间越小.

4 结论

本文提出了与边的两个节点度都相关的非对称网络加权网络模型并证明了所提出的非对称网络模型可以用耦合矩阵的特征值大小来判断网络的同步能力. 进一步研究了网络同步能力与两个可

调参数的关系. 通过研究发现网络异质性越强, 通过调节网络权值改变网络同步能力的效果越显著; 网络越匀质, 则调节权值的方式改变网络同步能力效果越不明显. 本文的研究结果对帮助设计同步能力强的网络具有一定的借鉴作用, 例如神经网络等加权网络.

-
- [1] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [2] Zhao M, Wang B B, Jiang P Q, Zhou T 2005 *Prog. in Phys.* **25** 273 (in Chinese) [赵明, 汪秉宏, 蒋品群, 周涛 2005 物理学进展 **25** 273]
- [3] Zhao M, Zhou T, Chen G R, Wang B B 2008 *Prog. in Phys.* **28** 22 (in Chinese) [赵明, 周涛, 陈关荣, 汪秉宏 2008 物理学进展 **28** 22]
- [4] Metz F L, Neri I, Bollé D 2011 *Phys. Rev. E* **84** 055101
- [5] Lü L, Li G, Cai Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7517 (in Chinese) [吕翎, 李钢, 柴元 2008 物理学报 **57** 7517]
- [6] Yang X K, Cai L, Zhao X H, Feng Z W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3740 (in Chinese) [杨晓阔, 蔡理, 赵晓辉, 冯朝文 2010 物理学报 **59** 3740]
- [7] Cai M, Du H F, Ren Y K, Marcus W F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110513 (in Chinese) [蔡萌, 杜海峰, 任义科, 费尔德曼 2011 物理学报 **60** 110513]
- [8] Gao J X, Havlin S, Xu X M, Eugene Stanley H 2011 *Phys. Rev. E* **84** 046115
- [9] Yuan W J, Zhou C S 2011 *Phys. Rev. E* **84** 016116
- [10] Zeng A, Son S W, Yeung C H, Fan Y, Di Z 2011 *Phys. Rev. E* **83** 045101
- [11] Chavez M, Hwang D U, Amann A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 218701
- [12] Zhao M, Zhou T, Wang B H 2006 *Eur. Phys. J. B* **53** 375
- [13] Watanabe T, Masuda N 2010 *Phys. Rev. E* **82** 046102
- [14] Gorochoowski T E, Bernardo M D, Grierson C S 2010 *Phys. Rev. E* **81** 056212
- [15] Zhu J F, Zhao M, Yu W W, Zhou C S, Wang B H 2010 *Phys. Rev. E* **81** 026201
- [16] Motter A E, Zhou C, Kurths J 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016116
- [17] Motter A E, Zhou C, Kurths 2006 *American Institute of Physics Conference Series* **776** 201
- [18] Lu Y F, Zhao M, Zhou T, Wang B H 2007 *Phys. Rev. E* **76** 057103
- [19] Hwang D U, Chavez M, Amann A 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 138701
- [20] Zou Y L, Zhu J, Chen G R 2006 *Phys. Rev. E* **74** 046107
- [21] Newman M E J, Watts D J 1999 *Phys. Lett. A* **263** 341
- [22] Barabási A L, Albert R 1999 *Science* **286** 509
- [23] Jesús G G, Moreno Y 2006 *Phys. Rev. E* **73** 056124

Effect of weighted scheme on synchronizability based on different network structures*

Wang Dan^{1)†} Jing Yuan-Wei²⁾ Hao Bin-Bin²⁾

1) (*Key Laboratory of Manufacturing Industrial Integrated Automation, Shenyang University, Shenyang 110044, China*)

2) (*College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang 110004, China*)

(Received 30 November 2011; revised manuscript received 27 February 2012)

Abstract

Motivated by the observations that the weight of a link in realistic networks is strongly correlated with the product of the corresponding degrees, we present an asymmetrical weighted scheme relating to the degrees of starting point and terminal point, and investigate the effects of weighted scheme on synchronizability in light of different network structures. The results show that the more heterogeneous the degree distribution of network, the more remarkable the effect on enhanced synchronizability by the weighted method is. However, there is little effect on enhanced synchronizability by the weighted method for the homogeneous random network. It is shown that no matter whether small world networks or scale-free networks, the synchronizability is maximal when the total strength of all in-links of every node is equal to one.

Keywords: synchronization-optimal, synchronizability, small world networks, scale-free networks

PACS: 05.90.+m, 02.50.-r

* Project support by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104029).

† E-mail: wangdan0307@126.com