

## 高斯涡旋光束的光束传输因子和峭度参数\*

周国泉†

(浙江农林大学理学院, 临安 311300)

(2012年2月4日收到; 2012年2月22日收到修改稿)

基于强度二阶矩定义, 导出了高斯涡旋光束光束传输因子即  $M^2$  因子的解析表达式, 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子唯一取决于拓扑电荷数  $n$ . 数值计算表明, 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子随着拓扑电荷数  $n$  的增大而增大. 基于强度高阶矩, 还导出了高斯涡旋光束经傍轴  $ABCD$  光学系统传输时峭度参数的解析表达式, 高斯涡旋光束的峭度参数取决于拓扑电荷数  $n$ 、参数  $\delta$ 、矩阵元  $A$  和矩阵元  $D$ . 在自由空间传输时, 高斯涡旋光束的峭度参数仅取决于拓扑电荷数  $n$  和参数  $\delta$ . 自由空间传输时, 高斯涡旋光束峭度参数的变化规律为: 峭度参数随参数  $\delta$  的增大先减小而后趋向于一最小值, 随拓扑电荷数  $n$  的增大而减小. 这一研究有助于高斯涡旋光束的实际应用.

**关键词:** 高斯涡旋光束,  $M^2$  因子, 峭度参数

**PACS:** 41.85.Ew, 42.25.Bs, 41.85.-p

## 1 引言

光学涡旋具有特殊的螺旋波前结构和确定的光子轨道角动量, 现已应用于光学微操纵、原子光学、生物医学、非线性光学、量子信息传输、量子计算及通信等领域<sup>[1-3]</sup>. 光学涡旋可以利用螺旋相位板、空间光调制器、全息光栅和模式转换器等方法产生<sup>[4,5]</sup>. 光学涡旋的典型代表就是拉盖尔-高斯涡旋光束. 拉盖尔-高斯涡旋光束的最低阶模就是高斯涡旋光束. Zhu 等人导出了高斯涡旋光束轨道角动量密度的解析表达式, 并据此进行了仿真计算和分析<sup>[6]</sup>. 根据单色光傍轴度的定义, 崔学才等人对高斯涡旋光束的傍轴度进行了研究, 导出了高斯涡旋光束傍轴度的解析表达式, 分析了傍轴度和光束参数间的关系<sup>[7]</sup>. Li 等人导出了高斯涡旋光束在垂直于光轴的单轴晶体中衍射场分量的解析表达式, 并考察了单轴晶体的各向异性对高斯涡旋衍射光束强度分布的影响<sup>[8]</sup>. 吴慧云等人以高斯涡旋光束作为光源应用于中继镜系统, 从而实现了中继镜系统上行链路能量损耗的有效降低<sup>[9]</sup>. Li

还对高斯涡旋光束经圆形光阑行射后近场的偏振奇异性进行了研究<sup>[10]</sup>.

光束传输因子即  $M^2$  因子是基于强度二阶矩定义的, 用于表征光束的传输特性. 峭度参数与强度的四阶矩和二阶矩相关, 用于描述激光束光场分布的平坦程度. 光束传输因子和峭度参数是评估光束传输的重要参数. 目前, 有关高斯涡旋光束  $M^2$  因子和峭度参数的研究还未见报道. 因此, 本文基于强度高阶矩分别导出了高斯涡旋光束  $M^2$  因子和经傍轴  $ABCD$  光学系统传输时峭度参数的解析表达式, 并通过数值计算分析了高斯涡旋光束参数对  $M^2$  因子和峭度参数的影响.

2 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子

在柱坐标系中, 一高斯涡旋光束向半空间  $z \geq 0$  传输,  $z$  轴为光束传输轴. 高斯涡旋光束在源平面  $z = 0$  上的光场分布为

$$U(\rho_0, 0) = \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) \exp(in\theta_0), \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10974179, 61178016) 资助的课题.

† E-mail: zhoughoquan178@sohu.com

式中,  $\rho_0$  和  $\theta_0$  分别为源平面上的径向和角向坐标,  $n$  表征光学涡旋的拓扑电荷数. 由于  $n$  取正整数和取负整数时的光场强度分布相同, 故在以下讨论中指定  $n$  取正整数. 三维激光束的  $M^2$  因子定义为<sup>[11]</sup>

$$M^2 = 2\pi\sigma_0\sigma_\infty, \quad (2)$$

式中,  $\sigma_0$  为源平面上空间域中光强分布的二阶矩,  $\sigma_\infty$  为远场平面上空间频率域中光强分布的二阶矩. 当光束经傍轴光学系统传输时, 其  $M^2$  因子不变. 因此, 简单起见, 下面计算高斯涡旋光束的  $M^2$  因子时考虑的是其在自由空间的传输. 根据标准定义, 高斯涡旋光束在源平面上空间域中的强度二阶矩为

$$\begin{aligned} \sigma_0^2 &= \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho_0^2 |U(\rho_0, z)|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |U(\rho_0, z)|^2 \rho_0 d\rho_0 d\theta_0} \\ &= \frac{w_0^2}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

在上式的推导过程中, 运用了如下积分式<sup>[12]</sup>:

$$\int_0^\infty t^n \exp(-st) dt = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad (4)$$

利用傅里叶变换可得到远场观察平面  $z$  上空间 - 频率域中高斯涡旋光束的光场分布<sup>[13]</sup>

$$\begin{aligned} U(f, z) &= \frac{\exp(-ikz)}{i\lambda z} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\rho_0^2}{w_0^2}\right) \\ &\quad \times \exp(in\theta_0) \exp[-2i\pi f\rho_0 \\ &\quad \times \cos(\theta_0 - \theta)] \rho_0 d\rho_0 d\theta_0, \end{aligned} \quad (5)$$

式中,  $k = 2\pi/\lambda$  为波数,  $\lambda$  为光波长,  $f = \rho/\lambda z$  为空间频率,  $\rho$  和  $\theta$  分别为远场观察平面  $z$  上的径向和角向坐标. 对 (5) 式连续使用积分公式<sup>[12]</sup>

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ix \cos \phi + in\phi) d\phi, \quad (6) \\ &\quad \times \int_0^\infty t \exp(-\alpha t^2) J_n(\beta t) dt \\ &= \frac{1}{2\alpha n!} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)^{n/2} \\ &\quad \times \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right) {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; n + 1; \frac{\beta^2}{4\alpha}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

式中,  $J_n(\cdot)$  为第一类  $n$  阶贝塞尔函数,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数,  ${}_1F_1(\cdot; \cdot; \cdot)$  为库默尔函数且定义为<sup>[12]</sup>

$${}_1F_1(a; b; x) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+a)}{\Gamma(m+b)m!} x^m. \quad (8)$$

最终, 远场观察平面  $z$  上空间 - 频率域中高斯涡旋光束的光场分布为

$$\begin{aligned} U(f, z) &= \frac{i^{n-1} \pi^n w_0^n z_r}{n! z} \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right) f^n \\ &\quad \times \exp(-\pi^2 w_0^2 f^2) \\ &\quad \times {}_1F_1\left(\frac{n}{2}; n + 1; \pi^2 w_0^2 f^2\right) \\ &\quad \times \exp(in\theta - ikz), \end{aligned} \quad (9)$$

式中,  $z_r = kw_0^2/2$  为瑞利距离. 高斯涡旋光束在远场观察平面  $z$  上空间 - 频率域中的强度二阶矩为

$$\begin{aligned} \sigma_\infty^2 &= \frac{\int_0^\infty f^3 |U(f, z)|^2 df}{\int_0^\infty f |U(f, z)|^2 df} = \frac{1}{2\pi^2 w_0^2} \\ &\quad \times \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(m'+n/2)(m+m'+n+1)!}{2^{m+m'}(m+n)!(m'+n)!m!m'!}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(m'+n/2)(m+m'+n)!}{2^{m+m'}(m+n)!(m'+n)!m!m'!}}. \end{aligned} \quad (10)$$

因此, 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子最终为

$$M^2 = \left( \frac{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(m'+n/2)(m+m'+n+1)!}{2^{m+m'}(m+n)!(m'+n)!m!m'!}}{\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(m'+n/2)(m+m'+n)!}{2^{m+m'}(m+n)!(m'+n)!m!m'!}} \right)^{1/2}. \quad (11)$$

高斯涡旋光束的  $M^2$  因子唯一取决于拓扑电荷数  $n$ .

### 3 高斯涡旋光束的峭度参数

在柱坐标系中, 光束的峭度参数定义为 [14]

$$K = \frac{\langle \rho^4 \rangle}{\langle \rho^2 \rangle^2}, \quad (12)$$

式中,  $\langle \rho^4 \rangle$  和  $\langle \rho^2 \rangle$  分别为空间域中强度的四阶矩和二阶矩, 其具体表达式为

$$\langle \rho^l \rangle = \frac{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \rho^l |U(\rho, z)|^2 \rho d\rho d\theta}{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |U(\rho, z)|^2 \rho d\rho d\theta}, \quad l = 2, 4, \quad (13)$$

其中,  $U(\rho, z)$  为观察平面  $z$  上的光场分布. 高斯涡旋光束经傍轴  $ABCD$  光学系统的传输由柯林斯公式表征 [15]

$$U(\rho, z) = \frac{\exp(-ikz)}{i\lambda B} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} U(\rho_0, 0) \times \exp\left\{-\frac{ik}{2B}[A\rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\theta - \theta_0)]\right\}$$

$$a(\nu) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{m'=0}^\infty \frac{\Gamma(m+n/2)\Gamma(m'+n/2)(m+m'+n+\nu)!}{(m+n)!(m'+n)!m!m'!(\delta^2+iA\delta)^m(\delta^{*2}-iA^*\delta^*)^{m'}\gamma^{m+m'}}, \quad \nu = 0, 1, 2, \quad (17)$$

式中, 辅助参数  $\gamma$  和  $\delta$  分别定义为

$$\gamma = \frac{1}{\delta^2 + iA\delta} + \frac{1}{\delta^{*2} - iA^*\delta^*} + \frac{iD}{\delta} - \frac{iD^*}{\delta^*}, \quad (18)$$

$$\delta = B/z_r, \quad (19)$$

式中, 星号表示取复共轭. 观察平面  $z$  上高斯涡旋光束的峭度参数取决于拓扑电荷数  $n$ 、参数  $\delta$ 、矩阵元  $A$  和矩阵元  $D$ .

### 4 数值计算与分析

图 1 给出了高斯涡旋光束的  $M^2$  因子随拓扑电荷数  $n$  的变化关系. 当拓扑电荷数  $n$  为零时,  $M^2$  因子为 1. 随着拓扑电荷数  $n$  的增大,  $M^2$  因子也增大. 但是  $M^2$  因子的增长速率随拓扑电荷数  $n$  的增大而逐渐减缓. 然而  $M^2$  因子没有极限值, 也就是说  $M^2$  因子会一直随拓扑电荷数  $n$  的增大而增大, 这一点也可以从 (11) 式推知. 图 2 给出了高斯涡旋光束在远场平面上空间 - 频率域中的归一化强度分布. 实际上, 拓扑电荷数  $n$  对束腰尺寸没有任何

$$+D\rho^2\} \rho_0 d\rho_0 d\theta_0, \quad (14)$$

式中,  $ABCD$  为源平面到观察平面间光学系统的变换矩阵元. 将 (1) 式代入 (14) 式进行积分, 观察平面  $z$  上高斯涡旋光束的光场分布为

$$U(\rho, z) = \frac{i^{n-1} B z_r^{n+1} \Gamma(1+n/2) \rho^n}{n! w_0^n (B^2 + iABz_r)^{1+n/2}} \times \exp\left(-\frac{z_r^2 \rho^2}{w_0^2 (B^2 + iABz_r)} - \frac{ikD\rho^2}{2B} - ikz + in\theta\right) \times {}_1F_1\left[\frac{n}{2}; n+1; \frac{z_r^2 \rho^2}{w_0^2 (B^2 + iABz_r)}\right]. \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (12) 式和 (13) 式, 运算后可得到观察平面  $z$  上高斯涡旋光束的峭度参数

$$K = \frac{a(0)a(2)}{[a(1)]^2}, \quad (16)$$

其中,  $a(0)$ ,  $a(1)$  和  $a(2)$  的表达式为

影响, 但他影响着远场发散角. 拓扑电荷数  $n$  越大, 高斯涡旋光束的远场光斑也就越大, 中空范围也越大, 进而导致发散角也越大, 最终使得  $M^2$  因子变大.

下面考察自由空间传输时高斯涡旋光束峭度参数的变化规律. 在此情形下, 矩阵元  $A = 1$ ,  $B = z$ ,  $C = 0$ ,  $D = 1$ , 峭度参数仅取决于拓扑电荷

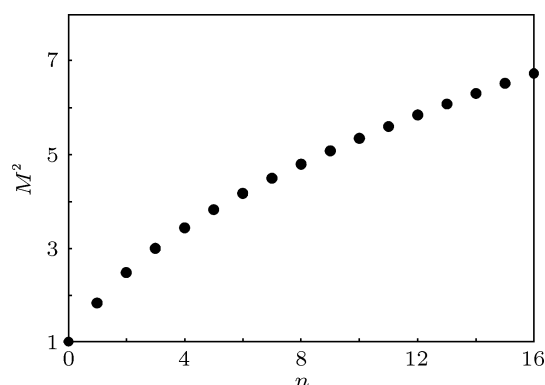


图 1 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子随拓扑电荷数  $n$  的变化关系

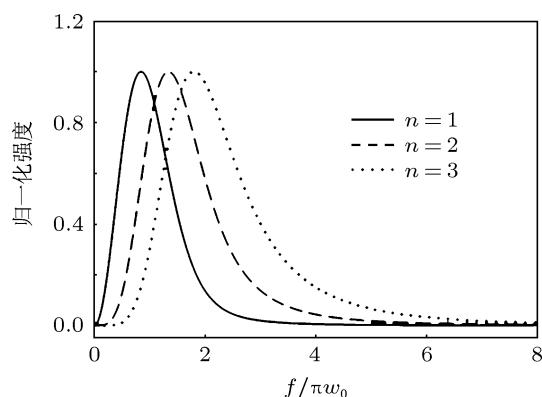


图2 高斯涡旋光束在远场平面上空间-频率域中的归一化强度分布

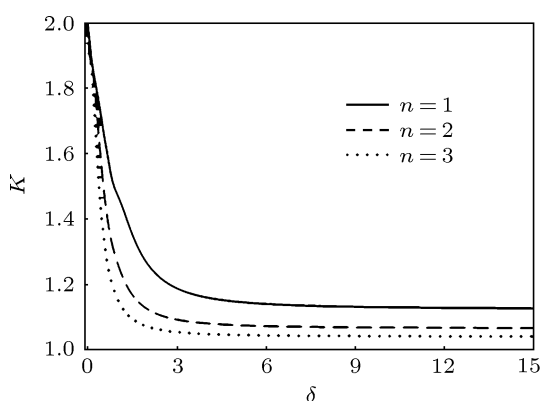


图3 不同拓扑电荷数的高斯涡旋光束其峭度参数随参数  $\delta$  的变化关系

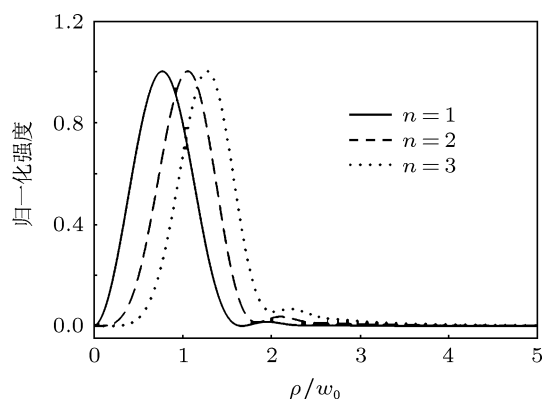


图4 高斯涡旋光束在近场观察平面  $\delta = 0.4$  上的归一化强度分布

数  $n$  和参数  $\delta = z/z_r$ . 图3给出了不同拓扑电荷数的高斯涡旋光束其峭度参数随参数  $\delta$  的变化关系. 当拓扑电荷数  $n$  为零时, 峭度参数独立于参数  $\delta$ , 始

终保持为 2, 这和现有结果符合. 在源平面上, 高斯涡旋光束的峭度参数与拓扑电荷数  $n$  无关, 始终等于 2. 在其他观察平面上, 高斯涡旋光束的峭度参数均小于 2. 当拓扑电荷数  $n$  为非零整数时, 峭度参数随参数  $\delta$  的增大先减小而后趋向于一最小值. 但这一最小值与拓扑电荷数  $n$  有关, 拓扑电荷数  $n$  越大这一最小值也就越小. 图3表明: 当拓扑电荷数  $n$  很大时, 远场的峭度参数就趋向于 1. 由于  $M^2$  因子和二阶矩有关, 而峭度参数和二阶阶、四阶矩有关, 因此  $M^2$  因子没有极限值和远场峭度参数有极限值这两个结论并不矛盾. 在相同的观察平面 (源平面除外) 上, 拓扑电荷数  $n$  越大, 峭度参数就越小, 光强分布也就越平坦, 这一点也具体体现在图2上. 图4给出了高斯涡旋光束在近场观察平面  $\delta = 0.4$  上的归一化强度分布, 拓扑电荷数  $n$  越大光强分布就越平坦. 图2和图4反映了高斯涡旋光束在自由空间传输时具有良好的稳定性.

## 5 结论

基于强度二阶矩定义, 导出了高斯涡旋光束  $M^2$  因子的解析表达式, 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子唯一由拓扑电荷数  $n$  决定. 高斯涡旋光束的  $M^2$  因子随着拓扑电荷数  $n$  的增大而增大, 但增长速率随拓扑电荷数  $n$  的增大而逐渐减缓. 基于强度高阶矩, 还导出了高斯涡旋光束经傍轴 ABCD 光学系统传输时峭度参数的解析表达式, 高斯涡旋光束的峭度参数取决于拓扑电荷数  $n$ 、参数  $\delta$ 、矩阵元  $A$  和矩阵元  $D$ . 作为数值计算的例子, 考察了自由空间传输时高斯涡旋光束峭度参数的变化规律. 在自由空间传输时, 高斯涡旋光束的峭度参数仅取决于拓扑电荷数  $n$  和参数  $\delta = z/z_r$ . 高斯涡旋光束的峭度参数随参数  $\delta$  的增大先减小而后趋向于一最小值, 但这一最小值与拓扑电荷数  $n$  相关联. 在相同的观察平面 (源平面除外) 上, 高斯涡旋光束的峭度参数随拓扑电荷数  $n$  的增大而减小. 这一研究加深了对高斯涡旋光束传输特性的认识, 有助于高斯涡旋光束的实际应用.

- [1] Simpson N, Dholakia N, Allen L, Padgett M 1997 *Opt. Lett.* **22** 52
- [2] Gahagan K T, Swartzlander Jr G A 1998 *J. Opt. Soc. Am. B* **15** 524
- [3] Molina-Terriza G, Torres J P, Torner L 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 013601
- [4] Lu X H, Huang H Q, Zhao C L, Wang J F, Chen H 2008 *Laser & Optoelectronics Progress* **45** 50 (in Chinese) [陆璇辉, 黄慧琴, 赵承良, 王将峰, 陈和 2008 激光与光电子学进展 **45** 50]
- [5] Li Y Y, Chen Z Y, Liu H, Pu J X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1743 (in Chinese) [李阳月, 陈子阳, 刘辉, 蒲继雄 2010 物理学报 **59** 1734]
- [6] Zhu Y Y, Lü W, Zhang J C, Jing M J, Li J, Guan X W 2009 *Proc. SPIE* **7507** 750705
- [7] Cui X C, Lian X X, Lü B D 2011 *High Power Laser and Particle Beams* **23** 20 (in Chinese) [崔学才, 连校许, 吕百达 2011 强激光与粒子束 **23** 20]
- [8] Li J, Xin Y, Chen Y R, Xu S X, Wang Y Q, Zhou M C, Zhao Q, Chen F N 2011 *Eur. Phys. J. Appl. Phys.* **53** 20701
- [9] Wu H Y, Huang Z H, Wu W M, Xu X J, Chen J B, Zhao Y J 2011 *Acta Opt. Sin.* **31** 0414002 (in Chinese) [吴慧云, 黄值河, 吴武明, 许晓军, 陈金宝, 赵伊君 2011 光学学报 **31** 0414002]
- [10] Li J L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 124001
- [11] Siegman A 1990 *Proc. SPIE* **1224** 2
- [12] Gradshteyn I S, Ryzhik I M 1980 *Table of integrals, series, and products* (New York: Academic Press)
- [13] Goodman J W 1996 *Introduction to Fourier Optics, 2nd ed.* (New York: McGraw-Hill)
- [14] Bock B D 1975 *Multivariate statistical method in behavioral research* (New York: McGraw-Hill)
- [15] Erdelyi A, Magnus W, Oberhettinger F 1954 *Tables of Integrals Transforms* (New York: McGraw-Hill)

# The beam propagation factor and the kurtosis parameter of a Gaussian vortex beam\*

Zhou Guo-Quan<sup>†</sup>

(School of Sciences, Zhejiang A & F University, Lin'an 311300, China)

(Received 4 February 2012; revised manuscript received 22 February 2012)

## Abstract

Based on the definition of the second-order moment of intensity, the analytical expression for the beam propagation factor, namely the  $M^2$  factor, of a Gaussian vortex beam is derived, which is uniquely determined by the topological charge  $n$ . The numerical result indicates that the  $M^2$  factor of a Gaussian vortex beam increases with the increase of topological charge  $n$ . By means of the higher-order moment of intensity, the analytical expression for the kurtosis parameter of a Gaussian vortex beam passing through a paraxial  $ABCD$  optical system is also presented, which depends on topological charge  $n$ , parameter  $\delta$ , transfer matrix elements  $A$  and  $D$ . When propagating in free space, the kurtosis parameter of a Gaussian vortex beam is determined by topological charge  $n$  and parameter  $\delta$ . With the increase of parameter  $\delta$ , the kurtosis parameter of a Gaussian vortex beam in free space first decreases and finally tends to a minimal value. Moreover, the kurtosis parameter of a Gaussian vortex beam in free space decreases with the increase of topological charge  $n$ . This research is helpful for the practical application of the Gaussian vortex beam.

**Keywords:** Gaussian vortex beam,  $M^2$  factor, kurtosis parameter

**PACS:** 41.85.Ew, 42.25.Bs, 41.85.-p

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10974179, 61178016).

<sup>†</sup> E-mail: zhouguoquan178@sohu.com