

# 弯曲振动矩形板辐射阻抗的计算\*

马焕培 贺西平<sup>†</sup> 兰正康 阿卜力孜·阿卜来提

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

(2012年1月5日收到; 2012年3月17日收到修改稿)

本文推导了四边简支矩形板的辐射阻抗表达式, 利用高斯数值积分方法, 计算了其相对辐射阻抗的数值解. 由不同模式下相对辐射阻抗与频率以及不同长宽比对应的相对辐射阻抗与频率的关系可知, 在中低频段, 模态越低, 辐射阻抗越大, 也就意味着辐射声功率和同振质量越大; 对于一定面积和模态的矩形板,  $r$  ( $r = a/b$ , 长与宽之比) 值越接近 1, 即越接近正方形, 辐射阻和辐射抗越大. 本文的方法能对其他复杂边界条件下的、无振动解析解的矩形板的辐射阻抗数值量级大小提供一个参考, 也可由计算弯曲振动的阻抗自然地过渡到活塞振动阻抗的计算.

**关键词:** 简支边界, 矩形薄板, 辐射阻抗, 数值积分方法

**PACS:** 43.20.Rz, 43.30.Jx, 43.30.Yj

## 1 引言

辐射阻抗的概念在各个领域广泛使用, 对评价辐射体的性能具有重要意义. 文献 [1] 对作为天线辐射体的柱形等离子体的辐射阻抗进行了计算. 文献 [2, 3] 在研究线电流源激励下无耗异向介质层覆盖导体圆柱和有耗异向介质层覆盖普通介质圆柱的电磁特性过程中, 同样涉及到了对辐射阻抗的计算. 在太空探索中, 文献 [4] 计算了在极地木星轨道运动中电力缆索的辐射阻抗. 文献 [5] 基于等价的电力网络, 提出了一个计算口腔声辐射阻抗的模型, 该模型将其准确近似为球形障板上圆形活塞的辐射阻抗. 文献 [6] 在考虑水下圆柱形 Helmholtz 共振器壁面的辐射阻抗的情况下, 对其声学特性进行了分析. 文献 [7] 利用数值方法, 计算了在无限大障板上的一个刚性循环振铃的辐射阻抗. 在噪声控制和换能器阵列的设计中 [8,9], 也经常要考虑辐射阻抗的影响. 有关各种振动源 (体) 辐射阻抗的计算引起了人们的广泛关注, 因为它是描述电磁振荡源或振动源效率的一个重要参数 [10].

关于弯曲振动辐射体的辐射阻抗研究较少, 因相对于活塞振动来说, 弯曲振动面的振动相位各部

分可能都不相同. 即使对有解析解的振动面, 辐射阻抗的计算也相当复杂. 就矩形或方形活塞辐射体而言, 各种解决途径和近似方法被人们相继提出, 例如直接积分 [11], 建立单重积分 [12], 借助几何关系建立四重积分的具体表达式 [13,14], 转化为双重积分 [15]. 这些基于振速分布均匀的活塞振动而提出的方法不能直接拓展至弯曲振动. 一般来说, 研究弯曲振动矩形板的辐射阻抗, 四重积分的计算是必然的. Li 和 Gibeling 通过将四重积分化为多个双重积分, 研究了弯曲振动矩形板的辐射阻抗对辐射声功率的影响 [16]. Sha 等提出一种计算方法, 将活塞振动和弯曲振动矩形辐射体辐射阻抗的计算融为一体, 后又将辐射阻抗的四重积分化为二重积分, 获得与前人的经典方法一致的数值解 [15]. 然而不管是将积分如何简化, 其简化过程都相当繁琐, 最后还是要通过数值方法或其他方法获得数值解.

实际中, 振动系统的振动面或辐射面, 形式是多种多样的. 例如, 本文的研究对象为弯曲振动的矩形板, 要提高其辐射效率, 就需要增大其辐射声阻. 只有有了计算其辐射阻抗的方法, 才有可能从其几何尺寸、材料组成等与其辐射阻抗有关的因素着手进行合理选择. 本文根据瑞利公式, 结合振速非均匀分布的辐射面辐射阻抗的计算方法, 推导

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10874107) 和中央高校基本科研业务费专项资金 (批准号: GK201001008) 资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: hexiping@snnu.edu.cn

了四边简支时带有四重积分的辐射阻抗的表达式. 但被积函数复杂, 无法直接进行解析计算. 我们利用数值方法, 计算出了矩形板声源的辐射阻抗, 避免了复杂的简化运算, 物理意义简单、清楚, 且在特例  $m = n = 0$  时即可转化为矩形活塞声源的辐射阻抗, 与 Burnett<sup>[12]</sup> 计算出来的结果相比较一致. 在此基础上, 对高低不同模态和不同长宽比率的矩形板的辐射阻抗进行了比较分析. 通过本文的工作, 希望能对其他复杂边界条件下的、无振动解析解的矩形板的辐射阻抗数值量级大小提供一个参考.

## 2 辐射阻抗的计算

辐射阻抗的作用本质是反映了振动面振动时, 反抗介质的反作用力而做的功, 此功转变为声场的能量, 其中一部分转变为有功能流, 反映辐射声能等效阻抗中阻的作用; 部分功周期平均为零, 反映场和源之间的能量交换. 振速非均匀分布的辐射面辐射阻抗的表达式为<sup>[17]</sup>

$$Z_r = \frac{W}{u_r u_r^*} = \frac{1}{u_r u_r^*} \iint_s P(x, y) U^*(x, y) ds, \quad (1)$$

其中,  $W$  为整个辐射体的复数辐射声功率,  $P(x, y)$  和  $U(x, y)$  分别为辐射体表面  $(x, y)$  处的复数声压幅值和复数振速幅值 ( $U^*(x, y)$  是  $U(x, y)$  的共轭复数),  $u_r$  为指定的参考速度 ( $u_r^*$  为其共轭复数). 若振动源与矩形板在其中心点连接, 则取其中心点为参考振速, 否则, 可取板的面积平均振速为参考振速.

### 2.1 复数辐射声功率

矩形板表面弯曲振动时, 向周围的媒质中辐射声功率. 如图 1 所示, 为一矩形辐射面,  $a$  和  $b$  分别为其长与宽. 现设想将该辐射面分成无限多个小面元, 面元  $ds'$  的振动在  $ds$  附近的媒质中产生的声压为  $dp$ ,  $ds'$  与  $ds$  之间的距离为  $h$ , 根据瑞利积分公式, 有

$$dp = j \frac{k\rho c}{2\pi h} U(x', y') e^{j(\omega t - kh)} ds', \quad (2)$$

其中,  $k$  为波数,  $\rho$  为媒质密度,  $c$  为声波在媒质中的传播速度,  $U(x', y')$  为辐射体表面上  $(x', y')$  处的振速幅值,  $\omega$  为角频率.

四边简支矩形板的振速幅值为

$$U(x, y) = j\omega A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (3)$$

$m, n = 1, 3, 5, \dots,$

又

$$\begin{aligned} x' &= x - h \cos \theta, \\ y' &= y - h \sin \theta, \\ ds' &= h dh d\theta, \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\theta$  为  $h$  与  $x$  轴反方向的夹角.

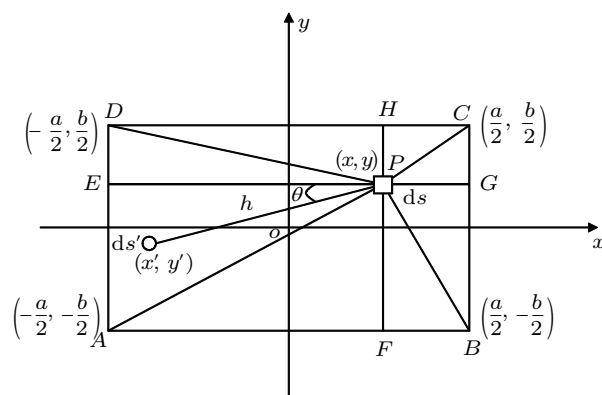


图 1 弯振矩形板积分示意图

将 (3), (4) 式代入 (2) 式, 有

$$\begin{aligned} dp &= -\frac{k\rho c\omega A}{2\pi} \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - h \cos \theta)\right] \\ &\times \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - h \sin \theta)\right] e^{j(\omega t - kh)} dh d\theta, \end{aligned} \quad (5)$$

对上式积分即可得到矩形辐射面上所有面元在  $ds$  处产生的声压. 将辐射面划分成如图 1 所示的 8 个部分, 即

$$\begin{aligned} \theta &\in [0, \theta_1], & h &\in \left[0, \frac{x + a/2}{\cos \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_1, \theta_2], & h &\in \left[0, \frac{y + b/2}{\sin \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_2, \theta_3], & h &\in \left[0, \frac{y + b/2}{\sin \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_3, \theta_4], & h &\in \left[0, \frac{x - a/2}{\cos \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_4, \theta_5], & h &\in \left[0, \frac{x - a/2}{\cos \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_5, \theta_6], & h &\in \left[0, \frac{y - b/2}{\sin \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_6, \theta_7], & h &\in \left[0, \frac{y - b/2}{\sin \theta}\right]; \\ \theta &\in [\theta_7, \theta_8], & h &\in \left[0, \frac{x + a/2}{\cos \theta}\right]. \end{aligned}$$

其中,  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6, \theta_7, \theta_8$  分别为  $PE$  与  $PA, PF, PB, PG, PC, PH, PD, PE$  的夹角. 且

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{y + b/2}{x + a/2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} \theta_3 &= \frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2 - x}{b/2 + y}, & \theta_4 &= \pi, \\ \theta_5 &= \pi + \tan^{-1} \frac{b/2 - y}{a/2 - x}, & \theta_6 &= \frac{3}{2}\pi, \\ \theta_7 &= \frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2 + x}{b/2 - y}, & \theta_8 &= 2\pi. \end{aligned}$$

令

$$M = \cos \left[ \frac{m\pi}{a}(x - h \cos \theta) \right] \times \cos \left[ \frac{n\pi}{b}(y - h \sin \theta) \right] e^{-ikh},$$

不考虑 (5) 式中的时间因子, 对  $dp$  进行积分, 得到辐射面上所有面元在  $ds$  处产生的声压幅值为

$$p = -\frac{k\rho c\omega A}{2\pi} \left\{ \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} M dh d\theta + \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} M dh d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} M dh d\theta + \int_{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}}^{\pi} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} M dh d\theta + \int_{\pi}^{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} M dh d\theta + \int_{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} M dh d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} M dh d\theta + \int_{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}}^{2\pi} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} M dh d\theta \right\}. \quad (6)$$

由复数辐射声功率  $W = \iint_s P(x, y)U^*(x, y)ds$ , 结合 (3) 和 (6) 式, 可推导出整个辐射体表面的复数辐射声功率的表达式 (推导过程见附录 A) 为

$$W = \frac{2jk\rho c\omega^2 A^2}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a}(x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b}(y - h \sin \theta) \right] \times \cos \left( \frac{m\pi}{a}x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b}y \right) e^{-ikh} dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a}(x - h \cos \theta) \right] \times \cos \left[ \frac{n\pi}{b}(y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a}x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b}y \right) e^{-ikh} dh d\theta dy dx \right\}. \quad (7)$$

## 2.2 以面平均振速为参考的辐射阻抗

对于弯振矩形板, 面平均振速为

$$\langle u \rangle = \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} U(x, y) dy dx}{ab}. \quad (8)$$

由 (1) 式, 结合 (3), (7) 和 (8) 三式, 可推导出以面平均振速为参考的辐射阻抗为

$$Z' = \rho cab(R' + jX'), \quad (9)$$

式中,  $R'$  和  $X'$  分别代表相对辐射阻和相对辐射抗 (推导过程见附录 B).

对于四边简支的弯曲振动矩形板,  $m = n = 1$  模态是最低阶的模态. 该模态下有  $x = -\frac{a}{2}$ ,  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = -\frac{b}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$  四条节线. 取矩形板的面积  $s = 0.005 \text{ m}^2$ ,  $r = \frac{a}{b} = 2$ , 利用高斯数值积分方法, 计算以面平均振速为参考的弯振矩形板相对

辐射阻抗与  $k\sqrt{ab}$  的变化关系, 如图 2 所示.

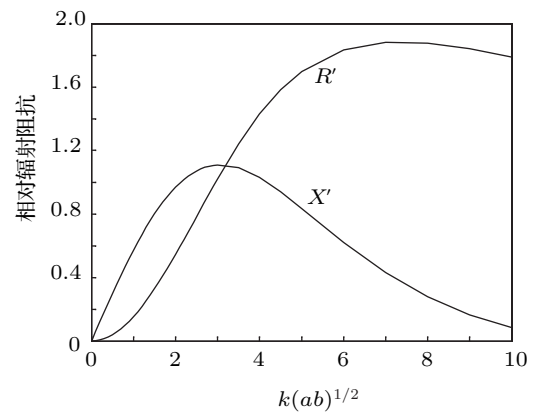


图 2  $m = n = 1$  模态以面平均振速为参考相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  变化曲线

## 3 以中心点振速为参考的辐射阻抗

对于弯振矩形板, 其中心点  $(0, 0)$  处的振速幅

值为

$$U(0,0) = j\omega A. \quad (10)$$

同理, 由 (7), (10) 两式可推导出以中心点振速为参考的辐射阻抗  $Z$  为

$$Z = \rho cab(R + jX), \quad (11)$$

式中,  $R$  和  $X$  分别代表相对辐射阻和相对辐射抗 (推导过程见附录 C).

在  $m = n = 1$  模式下, 以中心点振速为参考, 仍以  $s = 0.005 \text{ m}^2$ ,  $r = \frac{a}{b} = 2$  的矩形板为例, 计算出在弯振筒支边界条件下相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化关系, 如图 3 所示.

由图 2 和图 3 可以看出, 在两种参考速度下, 对于同一模态和尺寸固定的矩形板, 辐射阻抗的大小虽然不同, 但其随频率变化的趋势是一样的. 弯振矩形板的辐射阻抗是波数和长、宽度的函数. 在中低频段,  $0 < k\sqrt{ab} < 6$  时, 辐射阻随频率的增加而增加, 而在高频段,  $k\sqrt{ab} > 6$  时, 辐射阻达到或接近最大值, 因此声源向外界辐射的声功率在高频段比在低频段大. 对于辐射抗,  $0 < k\sqrt{ab} < 3$  时, 辐射抗随频率不断增加,  $k\sqrt{ab} > 3$  时, 辐射抗开始下降, 因此同振质量在高频段较低频段小. 该结论在

图 2 和图 3 中是一致的.

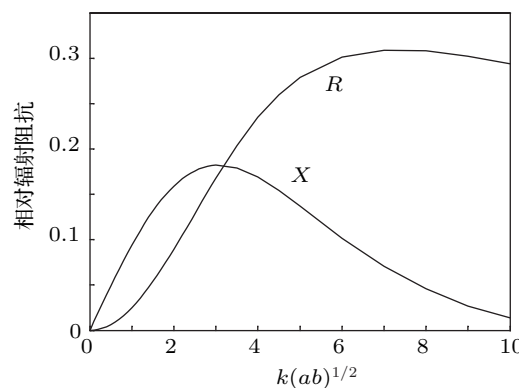


图 3  $m = n = 1$  模态以中心点振速为参考相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线

#### 4 $m = n = 0$ 时的辐射阻抗

当  $m = n = 0$  时, 声源的速度幅值转化为一常数, 即速度分布均匀, 此时声源的振动就是活塞振动. (9) 和 (11) 式均转化为矩形活塞振动辐射阻抗的表达式, 即

$$Z = \rho cab(R + jX), \quad (12)$$

其中

$$R = \frac{2k}{\pi ab} \cdot \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \sin(kh) dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \sin(kh) dh d\theta dy dx \right\}, \quad (13a)$$

$$X = \frac{2k}{\pi ab} \cdot \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos(kh) dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos(kh) dh d\theta dy dx \right\}. \quad (13b)$$

根据上述两式, 利用高斯数值积分方法, 计算出活塞声源的相对辐射阻抗的数值解, 并与 Burnett 等 [12] 的结果进行对比 (见附录 D). 可以看出, 相对辐射阻的最大误差不大于 0.0468%, 相对辐射抗的最大误差不大于 0.4056%, 说明本文的计算精度是非常高的, 同时也验证了本文方法的正确性.

#### 5 不同振动模态辐射阻抗的比较

仍以  $s = 0.005 \text{ m}^2$ ,  $r = \frac{a}{b} = 2$  为例, 中心点振速为参考, 利用高斯数值积分方法, 取  $m = n = 1$ ,  $m = 3, n = 1$  或  $(m = 1, n = 3)$ ,  $m = n = 3$  三种

模态, 计算相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化关系.

图 4 为三种模态相对辐射阻随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线 ( $R_{11}$ ,  $R_{13}$ ,  $R_{33}$  分别为对应三种模态的相对辐射阻). 当中心点振速一定时, 辐射阻与系统向外界辐射出的声功率成正比. 由该图可看出, 对于同一矩形板的不同模态,  $0 < k\sqrt{ab} < 6$  时, 随着  $k\sqrt{ab}$  的增加, 辐射阻逐渐增大, 而高模态增加速度缓慢,  $k\sqrt{ab} > 6$  时, 低模态辐射阻开始略微下降, 另两种模态辐射阻则继续增加; 而对于一固定的频率, 低模态的辐射阻最大, 即辐射声功率最大, 因此简支弯振矩形板的辐射声功率主要是由低模态的辐射阻决定的.

图 5 为三种模态相对辐射抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线 ( $X_{11}, X_{13}, X_{33}$  分别为对应三种模态的相对辐射抗). 当中心点振速一定时, 辐射抗 ( $x_r = \omega M_r$  其中  $x_r, M_r$  分别为辐射抗和同振质量) 与声源的同振质量成正比. 可以看出, 对于同一矩形板的不同模态,  $0 < k\sqrt{ab} < 3$  时, 随着频率的增加, 辐射抗逐渐增大, 低模态增加速度较高模态快,  $k\sqrt{ab} > 3$  时, 低模态辐射抗开始下降, 另外两种模态辐射抗继续增加; 而对于中低频而言, 低模态的辐射抗最大, 即同振质量最大.

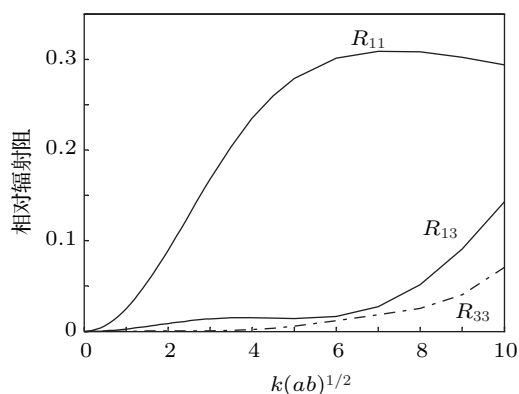


图 4 以中心点振速为参考三种模态相对辐射阻的对比

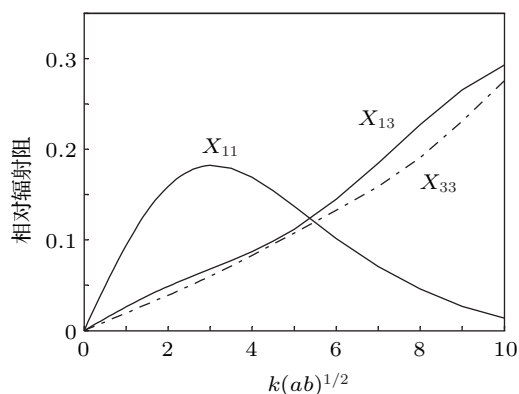


图 5 以中心点振速为参考三种模态相对辐射抗的对比

## 6 $m = n = 1$ 模态不同长宽比下辐射阻抗的比较

这里, 以常用模态  $m = n = 1$  为例, 对不同长宽比率的矩形板的辐射阻抗进行了比较.

当比率  $r = 1$  时, 长宽相等, 辐射阻抗即为方形板的辐射阻抗. 以中心点振速为参考, 面积仍然为  $s = 0.005 \text{ m}^2$ , 分别计算  $m = n = 1$  模态长宽比  $r = a/b = 1, 2$  或  $0.5, 4$  或  $0.25, 10$  或  $0.1, 100$

或  $0.01$  时, 矩形板相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的关系曲线.

图 6 为矩形板不同长宽比率时相对辐射阻随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线. 可以看出, 对于比率  $r$  不同的矩形板,  $0 < k\sqrt{ab} < 6$  时, 辐射阻随着  $k\sqrt{ab}$  的增大而增大, 且比率  $r$  越接近 1, 增加速度越快,  $k\sqrt{ab} > 6$  时, 比率  $r$  接近 1 的矩形板, 辐射阻有略微下降, 而比率远离 1 的矩形板, 辐射阻则继续增加; 矩形面积和振动模态一定时, 对于同一频率, 比率  $r$  越接近于 1, 对应的辐射阻越大, 也就是说, 方形薄板的辐射阻最大, 比率  $r$  越远离 1, 对应的辐射阻越小, 即辐射声功率越小.

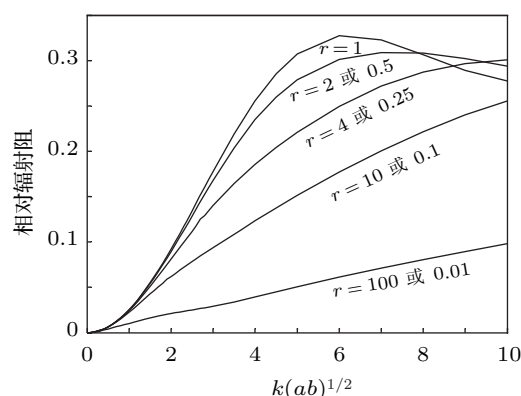


图 6 不同比率矩形板相对辐射阻随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线

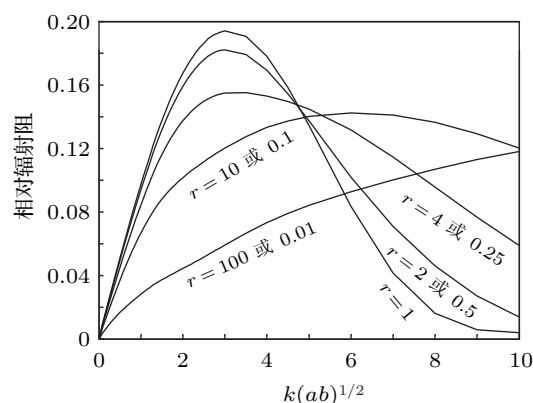


图 7 不同比率矩形板相对辐射抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线

图 7 为矩形板不同长宽比率时相对辐射抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线. 可以看出, 对于面积一定, 长宽比率  $r$  不同的矩形板,  $0 < k\sqrt{ab} < 3$  时, 比率  $r$  越远离 1, 辐射抗增加的越缓慢,  $k\sqrt{ab} > 3$  时, 比率  $r$  越接近于 1, 辐射抗下降的越快, 意味着同振质量下降的越迅速; 就中低频而言, 对于一特定的频率,  $r$  值接近 1 的辐射抗较  $r$  值远离 1 的辐射抗大.

## 7 结论

本文推导了四边简支弯振矩形板辐射阻抗的表达式, 利用高斯数值积分方法, 求得了矩形薄板活塞振动和弯曲振动相对辐射阻抗的数值解,  $m = n = 1$  模态以两种振速为参考的相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线, 三种模态相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的变化曲线, 以及  $m = n = 1$  模态不同比率的矩形板相对辐射阻抗随  $k\sqrt{ab}$  的关系曲线. 得出的结论为:

1. 对于一矩形板的不同模态, 在中低频段, 随着  $k\sqrt{ab}$  的增加, 辐射阻抗逐渐增大; 而对于一固定的频率, 低模态的辐射阻和辐射抗最大, 即辐射声

功率和同振质量最大.

2. 对于同一模态, 矩形板面积一定长宽比率不同时, 就中低频而言, 比率  $r$  越近于 1, 辐射阻和辐射抗越大, 即方形板的辐射阻和辐射抗最大.

3. 在两种参考速度下, 对于同一模态和固定尺寸的矩形板, 辐射阻抗的大小虽然不同, 但其随频率变化趋势相同.

4. 弯曲振动辐射阻抗表达式在  $m = n = 0$  时即可转化为矩形活塞振动的辐射阻抗, 涵盖了弯曲振动和活塞振动, 具有普遍意义.

这些结论对提高矩形辐射体的辐射效率和改进整个振动系统的性能提供了理论依据.

## 附录 A 复数辐射声功率

面元  $ds$  受到声场作用力为

$$dF = pds = pdydx, \quad (\text{A1})$$

面元  $ds$  振动时给声场提供的复数功率为

$$dW = dF * U^*(x, y), \quad (\text{A2})$$

而

$$U^*(x, y) = -j\omega A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 1, 3, 5, \dots, \quad (\text{A3})$$

令

$$N = \cos\left[\frac{m\pi}{a}(x - h \cos \theta)\right] \cos\left[\frac{n\pi}{b}(y - h \sin \theta)\right] \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{-jk h},$$

将 (6), (A1), (A3) 式代入 (A2) 式, 得

$$\begin{aligned} dW = & \frac{jk\rho c\omega^2 A^2}{2\pi} \left\{ \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \right. \\ & + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}}^{\pi} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \\ & + \int_{\pi}^{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \int_{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}}^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \\ & \left. + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}}^{2\pi} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \right\}, \quad (\text{A4}) \end{aligned}$$

对整个辐射体表面积分, 有

$$\begin{aligned} W = & \frac{jk\rho c\omega^2 A^2}{2\pi} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \right. \\ & + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}}^{\pi} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \\ & \left. + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\pi}^{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \right. \\ & \left. + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}}^{2\pi} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \right\} \end{aligned}$$

$$+ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}}^{2\pi} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \}, \quad (\text{A5})$$

因为

$$\begin{aligned} & \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{\pi}{2} + \tan^{-1} \frac{a/2-x}{b/2+y}}^{\pi} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\pi}^{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}} \int_0^{\frac{x-a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\pi + \tan^{-1} \frac{b/2-y}{a/2-x}}^{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx \\ &= \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}} \int_0^{\frac{y-b/2}{\sin \theta}} N dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\frac{3}{2}\pi + \tan^{-1} \frac{a/2+x}{b/2-y}}^{2\pi} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} N dh d\theta dy dx, \end{aligned} \quad (\text{A6})$$

将 (A6) 式代入 (A5), 并把  $N$  值代入, 得到辐射体表面辐射声功率的表达式为

$$\begin{aligned} W &= \frac{2jk\rho c\omega^2 A^2}{\pi} \times \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \right. \\ &\quad \times \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \\ &\quad \left. \times \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

## 附录 B 面平均振速为参考的辐射阻抗

面平均振速为

$$\langle u \rangle = \frac{j\omega A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx}{ab}, \quad (\text{B1a})$$

$$\langle u \rangle^* = - \frac{j\omega A \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx}{ab}, \quad (\text{B1b})$$

弯曲振动矩形辐射体以面平均振速为参考的辐射阻抗为

$$\begin{aligned} Z' &= \frac{W}{u_r u_r^*} = \frac{W}{\langle u \rangle \cdot \langle u \rangle^*} = \rho cab \cdot \frac{2jkab}{\pi} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right\} \\ &= \rho cab (R' + jX'), \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

其中

$$R' = \frac{2kab}{\pi} \left\{ \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kh) dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right\}$$

$$+ \left. \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kh) dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right\}, \quad (\text{B3a})$$

$X' =$

$$\frac{2kab}{\pi} \left\{ \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cos(kh) dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right. \\ \left. + \frac{\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cos(kh) dh d\theta dy dx}{\left[ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) dy dx \right]^2} \right\}. \quad (\text{B3b})$$

## 附录 C 中心点振速为参考的辐射阻抗

中心点振速为

$$U(0,0) = j\omega A, \quad (\text{C1a})$$

$$U^*(0,0) = -j\omega A, \quad (\text{C1b})$$

弯曲振动矩形薄板以中心点振速为参考的辐射阻抗为

$$Z = \frac{W}{u_r u_r^*} = \frac{W}{U(0,0) \cdot U^*(0,0)} = \frac{2jk\rho c}{\pi} \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \right. \\ \times \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \\ \times \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-jkh} dh d\theta dy dx \left. \right\} = \rho cab(R + jX), \quad (\text{C2})$$

其中

$$R = \frac{2k}{\pi ab} \cdot \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \right. \\ \times \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kh) dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \\ \times \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \sin(kh) dh d\theta dy dx \left. \right\}, \quad (\text{C3a})$$

$$X = \frac{2k}{\pi ab} \cdot \left\{ \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_0^{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}} \int_0^{\frac{x+a/2}{\cos \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \right. \\ \times \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cos(kh) dh d\theta dy dx + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{\tan^{-1} \frac{y+b/2}{x+a/2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{y+b/2}{\sin \theta}} \cos \left[ \frac{m\pi}{a} (x - h \cos \theta) \right] \\ \times \cos \left[ \frac{n\pi}{b} (y - h \sin \theta) \right] \cos \left( \frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left( \frac{n\pi}{b} y \right) \cos(kh) dh d\theta dy dx \left. \right\}. \quad (\text{C3b})$$

## 附录 D 矩形活塞辐射阻抗数值解

在计算矩形活塞相对辐射阻抗过程中,均以矩形面积  $s = 0.005 \text{ m}^2$ ,  $r = \frac{a}{b} = 2$  为例,其结果见下表 1 所示.

表 1 本文数值解与 Burnett 等的数值解的比较

| $k\sqrt{ab}$ | Burnett 等的计算结果 |           | 本文的计算结果   |           | 本文结果相对 Burnett 等计算结果的误差 |         |
|--------------|----------------|-----------|-----------|-----------|-------------------------|---------|
|              | $R$            | $X$       | $R$       | $X$       | $R/\%$                  | $X/\%$  |
| 0.1          | 0.0015904      | 0.0459310 | 0.0015901 | 0.0459304 | -0.0189                 | -0.0013 |
| 0.2          | 0.0063485      | 0.0915909 | 0.0063473 | 0.0915899 | -0.0189                 | -0.0011 |
| 0.3          | 0.0142348      | 0.1367117 | 0.0142321 | 0.1367104 | -0.0190                 | -0.0010 |
| 0.4          | 0.0251837      | 0.1810307 | 0.0251790 | 0.1810295 | -0.0187                 | -0.0007 |
| 0.5          | 0.0391049      | 0.2242938 | 0.0390978 | 0.2242929 | -0.0182                 | -0.0004 |
| 0.6          | 0.0558842      | 0.2662576 | 0.0558741 | 0.2662575 | -0.0181                 | -0.0000 |
| 0.7          | 0.0753844      | 0.3066922 | 0.0753711 | 0.3066933 | -0.0176                 | 0.0004  |
| 0.8          | 0.0974480      | 0.3453832 | 0.0974310 | 0.3453862 | -0.0175                 | 0.0009  |
| 0.9          | 0.1218979      | 0.3821341 | 0.1218771 | 0.3821395 | -0.0171                 | 0.0014  |
| 1.0          | 0.1485404      | 0.4167678 | 0.1485158 | 0.4167762 | -0.0166                 | 0.0020  |
| 1.1          | 0.1771671      | 0.4491284 | 0.1771386 | 0.4491404 | -0.0161                 | 0.0027  |
| 1.2          | 0.2075575      | 0.4790821 | 0.2075251 | 0.4790984 | -0.0156                 | 0.0034  |
| 1.3          | 0.2394811      | 0.5065188 | 0.2394451 | 0.5065400 | -0.0150                 | 0.0042  |
| 1.4          | 0.2727009      | 0.5313523 | 0.2726614 | 0.5313789 | -0.0145                 | 0.0050  |
| 1.5          | 0.3069750      | 0.5535209 | 0.3069325 | 0.5535536 | -0.0138                 | 0.0059  |
| 1.6          | 0.3420603      | 0.5729875 | 0.3420151 | 0.5730266 | -0.0132                 | 0.0068  |
| 1.7          | 0.3777143      | 0.5897390 | 0.3776670 | 0.5897850 | -0.0125                 | 0.0078  |
| 1.8          | 0.4136984      | 0.6037863 | 0.4136495 | 0.6038396 | -0.0118                 | 0.0088  |
| 1.9          | 0.4497798      | 0.6151632 | 0.4497299 | 0.6152240 | -0.0111                 | 0.0099  |
| 2.0          | 0.4857340      | 0.6239252 | 0.4856839 | 0.6239938 | -0.0103                 | 0.0110  |
| 2.5          | 0.6565904      | 0.6318029 | 0.6565485 | 0.6319091 | -0.0064                 | 0.0168  |
| 3.0          | 0.7986259      | 0.5923315 | 0.7986055 | 0.5924587 | -0.0026                 | 0.0215  |
| 3.5          | 0.9020401      | 0.5260750 | 0.9020444 | 0.5262212 | 0.0005                  | 0.0278  |
| 4.0          | 0.9680253      | 0.4524255 | 0.9680453 | 0.4525690 | 0.0021                  | 0.0317  |
| 4.5          | 1.0053083      | 0.3847169 | 1.0053259 | 0.3848532 | 0.0018                  | 0.0354  |
| 5.0          | 1.0250797      | 0.3284066 | 1.0250769 | 0.3285458 | -0.0003                 | 0.0424  |
| 6.0          | 1.0436807      | 0.2424852 | 1.0436282 | 0.2427002 | -0.0050                 | 0.0887  |
| 7.0          | 1.0433494      | 0.1689001 | 1.0433352 | 0.1692576 | -0.0014                 | 0.2117  |
| 8.0          | 1.0115300      | 0.1132201 | 1.0116713 | 0.1136669 | 0.0140                  | 0.3946  |
| 9.0          | 0.9658445      | 0.1016260 | 0.9661645 | 0.1020382 | 0.0331                  | 0.4056  |
| 10.0         | 0.9469798      | 0.1262691 | 0.9474232 | 0.1265694 | 0.0468                  | 0.2378  |

- [1] Zhao G W, Xu Y M, Chen C 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3458 (in Chinese) [赵国伟, 徐跃民, 陈诚 2006 物理学报 **55** 3458]
- [2] Wang H L, Wu Q, Meng F Y, Li L W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2608 (in Chinese) [王海龙, 吴群, 孟繁义, 李乐伟 2007 物理学报 **56** 2608]
- [3] Wang H L, Wu Q, Meng F Y, Li L W, Wu J 2007 *Acta Phys. Sin.* **57** 4883 (in Chinese) [王海龙, 吴群, 孟繁义, 李乐伟, 吴健 2008 物理学报 **57** 4883]
- [4] Sanchez-Torres A, Sanmartin J R, Donoso J M, Charro M 2010 *Adv. in Space Res.* **45** 1050
- [5] Vojnovic M, Mijic M 2005 *Applied Acoustics*. **66** 481
- [6] Wang Z F, Hu Y M, Meng Z, Ni M 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 7022 (in Chinese) [王泽锋, 胡永明, 孟洲, 倪明 2008 物理学报 **57** 7022]
- [7] Bouwkamp C J 1971 *J. Sound. Vib.* **17** 499
- [8] Ma D Y 2004 *Theory of Modern Acoustic* (Beijing: Science Press) p249-250 (in Chinese) [马大猷 2004 现代声学理论基础 (北京: 科学出版社) 第 249—250 页]
- [9] Zhou F H 1984 *Underwater Acoustic Transducer and Array* (Beijing: National Defense Industry Press) p200-336 (in Chinese)

- [周福洪 1984 水声换能器及基阵 (北京: 国防工业出版社) 第 200—336 页]
- [10] Zhang H L 2007 *Theoretical Acoustics* (Beijing: Higher Education Press) p231 (in Chinese) [张海澜 2007 理论声学 (北京: 高等教育出版社) 第 231 页]
- [11] Arase E M 1964 *J. Acoust. Soc. Am.* **36** 1521
- [12] Burnet D S, Soroka W W 1972 *J. Acoust. Soc. Am.* **51** 1618
- [13] Bank G, Wright J R 1990 *J. Aud. Eng. S.* **38** 350
- [14] Lee J, Seo I 1996 *J. Sound. Vib.* **198** 299
- [15] Sha K, Yang J, Gan W S 2005 *J. Sound. Vib.* **282** 179
- [16] Li W L, Gibeling H J 2000 *J. Sound. Vib.* **229** 1213
- [17] He Z Y, Zhao Y F 1981 *Theoretical Basis of Acoustics* (Beijing: National Defense Industry Press) p274 (in Chinese) [何祚镛, 赵玉芳 1981 声学理论基础 (北京: 国防工业出版社) 第 274 页]

# Calculations of radiation impedance of a rectangular plate with flexural vibration\*

Ma Huan-Pei He Xi-Ping<sup>†</sup> Lan Zheng-Kang Abulizi·Abulaiti

(Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonic, College of Physics & Information Technology, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

(Received 5 January 2012; revised manuscript received 17 March 2012)

## Abstract

The radiation impedance expressions of flexural vibration rectangular plate with simply supported boundary are derived, and the numerical results are obtained by using the Gauss numerical integral method. Some conclusions can be obtained on the basis of the curves of relative radiation impedances versus frequency in the different modes and those corresponding to different aspect ratios. The lower the mode, the greater the radiation impedance in the low frequency is, so are the acoustic radiated power and the quality with vibration. For a rectangular plate of certain area and mode, the more the value of  $r$  ( $r = a/b$ , aspect ratio) approximates to 1, that is, the closer the square is, the greater the radiation resistance and the radiation reactance are. The method offers a reference for determining magnitude of the radiation impedance of the rectangular plate in other complicated boundary conditions (they may be no analytical displacement solutions). The method of calculating the radiation impedance of flexural vibration can be naturally transplanted into the case of piston vibration.

**Keywords:** simply supported boundary, rectangular plate, radiation impedance, the method of numerical integration

**PACS:** 43.20.Rz, 43.30.Jx, 43.30.Yj

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874107), and the Fundamental Research Funds of China for the Central Universities (Grant No. GK201001008).

<sup>†</sup> E-mail: hexiping@snnu.edu.cn