

连续纠缠态表象的几种 Schmidt 分解、物理意义与应用*

范洪义¹⁾ 李学超^{2)†}

1) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

2) (中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

(2012 年 2 月 25 日收到; 2012 年 4 月 19 日收到修改稿)

在两粒子连续纠缠态表象 $|\eta\rangle$ 的基础上分别导出了此纠缠态在坐标、动量表象和粒子数表象中的 Schmidt 分解, 阐述了其物理意义. 并且, 用 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解直接给出单模压缩算符对纠缠态的作用结果、双模平移算符的纠缠态表象以及平移算符在 Fock 空间的矩阵元. 文章的讨论可以推广到多粒子连续纠缠态情形.

关键词: 纠缠态, Schmidt 分解, 压缩算符

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

1 引言

量子力学的表象是量子力学态矢的载体, 态矢在此表象的投影就是相应的波函数. Dirac^[1] 首先把薛定谔波函数 $\Psi(x)$ 改写为 $\langle x|\Psi\rangle$, 这样就引入了坐标表象 $\int dx|x\rangle\langle x| = 1$, 而且量子力学的海森堡矩阵形式也可纳入 Dirac 的 ket-bra 形式. 合适的表象变换有助于求解哈密顿能级.

但是在以往的文献中, 常见的只是坐标表象、动量表象、相干态表象^[2,3]. 为描述量子纠缠^[4-9], 应该并可以建立基本的两体纠缠态表象. 本文旨在探索文献 [10] 中建立的两体纠缠态表象的 Schmidt 分解、物理意义及其各种应用. 文章安排如下: 在第二节中简单介绍两体纠缠态表象; 在第三节分别给出了纠缠态 $|\eta\rangle$ 在坐标表象及动量表象中的 Schmidt 分解及其物理解释; 进而在第四节给出其在研究量子压缩的新应用, 结果表明双模压缩也起了纠缠的作用; 在第五节导出了 $|\eta\rangle$ 在粒子数表象中的 Schmidt 分解, 通过其与双模 Fock 态的内积, 得到双变量厄米多项式是两个单变量厄米多项

式的纠缠形式; 最后在第六节介绍了 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解在研究强迫振子矩阵元的应用.

2 两体纠缠态表象的引入

在文献 [10] 中 Fan-Klauder 首次提出了纠缠态表象

$$|\eta\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}|\eta|^2 + \eta a_1^\dagger - \eta^* a_2^\dagger + a_1^\dagger a_2^\dagger\right] |00\rangle, \quad (1)$$

由于 $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{i,j}$, $i = 1, 2$, $a_i |00\rangle = 0$,

$$\begin{aligned} a_1 |\eta\rangle &= (\eta + a_2^\dagger) |\eta\rangle, \\ a_2 |\eta\rangle &= (-\eta^* + a_1^\dagger) |\eta\rangle, \end{aligned} \quad (2)$$

故若令 $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + i\eta_2)$, 则由

$$X_i = \frac{a_i + a_i^\dagger}{\sqrt{2}}, P_i = \frac{a_i - a_i^\dagger}{\sqrt{2}i}, \quad (3)$$

有

$$(X_1 - X_2) |\eta\rangle = \eta_1 |\eta\rangle,$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10874174) 资助的课题.

† E-mail: xuechao@mail.ustc.edu.cn

$$(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2) |\eta\rangle = \eta_2 |\eta\rangle, \quad (4)$$

所以它是两粒子相对坐标 $\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$ 与总动量 $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$ 的共同本征态. 我们命名 $|\eta\rangle$ 为纠缠态表象的原因是因为它符合爱因斯坦等^[11]提出的量子纠缠思想. $|\eta\rangle$ 的特点是正交、完备:

$$\langle \eta' | \eta \rangle = \pi \delta(\eta^* - \eta'^*) \delta(\eta - \eta'), \quad (5)$$

$$\int \frac{d^2\eta}{\pi} |\eta\rangle \langle \eta| = 1. \quad (6)$$

3 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解的导出

引入平移算符 $\mathbf{D}(\eta)$

$$\mathbf{D}_1(\eta) = \exp(\eta \mathbf{a}_1^\dagger - \eta^* \mathbf{a}_1), \quad (7)$$

可以知道

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}_1(\eta) \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] |00\rangle \\ &= \mathbf{D}_1(\eta) \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] \mathbf{D}_1^{-1}(\eta) \mathbf{D}_1(\eta) |00\rangle \\ &= \exp\left[(\mathbf{a}_1^\dagger - \eta^*) \mathbf{a}_2^\dagger\right] \exp(\eta \mathbf{a}_1^\dagger - \eta^* \mathbf{a}_1) |00\rangle \\ &= \exp\left[(\mathbf{a}_1^\dagger - \eta^*) \mathbf{a}_2^\dagger\right] \exp\left(-\frac{1}{2} |\eta|^2 + \eta \mathbf{a}_1^\dagger\right) |00\rangle \\ &= |\eta\rangle, \end{aligned} \quad (8)$$

即可把 $|\eta\rangle$ 改写为

$$|\eta\rangle = \mathbf{D}_1(\eta) \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] |00\rangle. \quad (9)$$

进一步用坐标本征态的 Fock 表示

$$\begin{aligned} |x\rangle_i &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{x^2}{2} + \sqrt{2}x \mathbf{a}_i^\dagger - \frac{\mathbf{a}_i^{\dagger 2}}{2}\right] |0\rangle_i \\ (i &= 1, 2), \end{aligned} \quad (10)$$

可计算出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \\ & \times \exp\left[-x^2 + \sqrt{2}x (\mathbf{a}_1^\dagger + \mathbf{a}_2^\dagger) - \frac{\mathbf{a}_1^{\dagger 2} + \mathbf{a}_2^{\dagger 2}}{2}\right] |00\rangle \\ &= \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] |00\rangle, \end{aligned} \quad (11)$$

结合 (3) 式和 (9) 式并用 (11) 式和

$$\mathbf{P}_1 |x\rangle_1 = i \frac{d}{dx} |x\rangle_1, \quad (12)$$

得到

$$|\eta\rangle = \mathbf{D}_1(\eta) \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] |00\rangle$$

$$\begin{aligned} &= \exp(\eta \mathbf{a}_1^\dagger - \eta^* \mathbf{a}_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \\ &= \exp\left[\frac{\eta_1 + i\eta_2}{2} (\mathbf{X}_1 - i\mathbf{P}_1) - \frac{\eta_1 - i\eta_2}{2} (\mathbf{X}_1 + i\mathbf{P}_1)\right] \\ & \times \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \\ &= e^{i\eta_1 \eta_2 / 2} \exp(-i\mathbf{P}_1 \eta_1) \\ & \times \exp(i\eta_2 \mathbf{X}_1) \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \\ &= e^{i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \\ & \times \exp(i\eta_2 x) |x + \eta_1\rangle_1 \otimes |x\rangle_2 \\ &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle_1 \\ & \otimes |x - \eta_1\rangle_2 e^{i\eta_2 x}, \\ & \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_1 + i\eta_2), \end{aligned} \quad (13)$$

这就是 $|\eta\rangle$ 在坐标表象中的 Schmidt 分解. 从 (13) 式可以看出: 当测量第一个粒子知道它处于坐标本征态 $|x\rangle_1$ 时, 那么第二个粒子就塌缩到 $|x - \eta_1\rangle_2$, 不管两个粒子相距有多远. 类似地, 我们可得 $|\eta\rangle$ 在动量表象中的 Schmidt 分解.

用动量本征态 $|p\rangle_i$ 的 Fock 表示

$$\begin{aligned} |p\rangle_i &= \frac{1}{\pi^{1/4}} \exp\left[-\frac{p^2}{2} + \sqrt{2}ip \mathbf{a}_i^\dagger + \frac{\mathbf{a}_i^{\dagger 2}}{2}\right] |0\rangle_i \\ (i &= 1, 2), \end{aligned} \quad (14)$$

可以计算出

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \\ &= \frac{1}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp\left[-p^2 + \sqrt{2}ip (\mathbf{a}_1^\dagger - \mathbf{a}_2^\dagger) + \frac{\mathbf{a}_1^{\dagger 2} + \mathbf{a}_2^{\dagger 2}}{2}\right] |00\rangle \\ &= \exp[\mathbf{a}_1^\dagger, \mathbf{a}_2^\dagger] |00\rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

结合 (9) 式和 (15) 式以及

$$\mathbf{X}_1 |p\rangle_1 = -i \frac{d}{dp} |p\rangle_1, \quad (16)$$

得到

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= \exp(\eta \mathbf{a}_1^\dagger - \eta^* \mathbf{a}_1) \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \\ &= e^{i\eta_1 \eta_2 / 2} \exp(-i\mathbf{P}_1 \eta_1) \\ & \times \exp(i\eta_2 \mathbf{X}_1) \int_{-\infty}^{\infty} dp |p\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \\
 &\quad \times \exp(-i\mathbf{P}_1\eta_1) |p+\eta_2\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \\
 &= e^{i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \\
 &\quad \times \exp[-i\eta_1(p+\eta_2)] |p+\eta_2\rangle_1 \otimes |-p\rangle_2 \\
 &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dp |p+\eta_2\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |-p\rangle_2 e^{-i\eta_1 p}, \quad (17)
 \end{aligned}$$

这就是 $|\eta\rangle$ 在动量表象中的 Schmidt 分解. 从 (17) 式可以看出: 当测量第二个粒子知道它处于动量本征态 $|-p\rangle_2$ 时, 那么第一个粒子就塌缩到 $|p+\eta_2\rangle_1$, 也不管两个粒子相距有多远. (13) 式和 (17) 式说明 $|\eta\rangle$ 的纠缠行为和方式. 在下面我们还可以在粒子数表象中研究其的纠缠.

4 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解 (13) 式在研究量子压缩的新应用

用 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解 (13) 式可以研究 $|\eta\rangle$ 在单模压缩下的纠缠特性. 回忆单模压缩是 $S_1 = e^{(\lambda/2)(a_1^2 - a_1^{\dagger 2})}$, 它的坐标表示是 [12]

$$\begin{aligned}
 S_1(\mu) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mu}} |x/\mu\rangle_1 \langle x|, \\
 \mu &= e^\lambda, \quad (18)
 \end{aligned}$$

故有

$$S_1|x\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} |x/\mu\rangle_1. \quad (19)$$

现在对 $|\eta\rangle$ 实行单模 (第一个模) 压缩, 根据 (13) 和 (18) 式得到

$$\begin{aligned}
 S_1(\mu)|\eta\rangle &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{\mu}} |x/\mu\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |x-\eta_1\rangle_2 e^{i\eta_2 x} \\
 &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\mu} dx' |x'\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |\mu(x'-\eta_1/\mu)\rangle_2 e^{i\eta_2\mu x'}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

把 (20) 式与 (13) 式比较, 并注意 $S_1(1/\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\mu} dx |\mu x\rangle_2 \langle x|$, 就得到

$$S_1(\mu)|\eta\rangle = S_1(1/\mu) \left| \eta' = \frac{\eta_1/\mu + i\eta_2\mu}{\sqrt{2}} \right\rangle, \quad (21)$$

可见对态矢 $|\eta = \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\sqrt{2}}\rangle$ 的第一模的压缩 (压缩参数为 μ) 等价于对另一态矢 $|\eta'\rangle$ 的第二模的反压

缩 (压缩参数为 $1/\mu$), 而 $\eta' = \frac{\eta_1/\mu + i\eta_2\mu}{\sqrt{2}}$. 这充分体现了 $|\eta\rangle$ 这个态具有量子纠缠的本性.

我们再用 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解研究 $|\eta\rangle$ 在双模压缩下的纠缠特性. 回忆双模压缩是 $S_2 = e^{\lambda(a_1 a_2 - a_1^\dagger a_2^\dagger)}$, 它的双模坐标表示是 [12]

$$\begin{aligned}
 S_2(\mu) &= \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 |x_1 \cosh \lambda - x_2 \sinh \lambda, \\
 &\quad -x_1 \sinh \lambda + x_2 \cosh \lambda\rangle \langle x_1, x_2|, \\
 \mu &= e^\lambda. \quad (22)
 \end{aligned}$$

现在我们对 $|\eta\rangle$ 实行双模压缩, 根据 (13) 和 (22) 式得到

$$\begin{aligned}
 S_2(\mu)|\eta\rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 |x_1 \cosh \lambda - x_2 \sinh \lambda, \\
 &\quad -x_1 \sinh \lambda + x_2 \cosh \lambda\rangle \langle x_1, x_2| \\
 &\quad \times e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x'\rangle_1 \otimes |x'-\eta_1\rangle_2 e^{i\eta_2 x'} \\
 &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \iint_{-\infty}^{\infty} dx_1 dx_2 \\
 &\quad \times |x_1 \cosh \lambda - x_2 \sinh \lambda, -x_1 \sinh \lambda + x_2 \cosh \lambda\rangle \\
 &\quad \times \delta(x_1 - x') \delta(x_2 - x' + \eta_1) e^{i\eta_2 x'} \\
 &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x' \cosh \lambda - (x' - \eta_1) \sinh \lambda\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |-x' \sinh \lambda + (x' - \eta_1) \cosh \lambda\rangle_2 e^{i\eta_2 x'} \\
 &= e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx' |x' e^{-\lambda} + \eta_1 \sinh \lambda\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |x' e^{-\lambda} - \eta_1 \cosh \lambda\rangle_2 e^{i\eta_2 x'} \\
 &= e^\lambda e^{-i\eta_1\eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' |x''\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |x'' - e^\lambda \eta_1\rangle_2 e^{ie^\lambda \eta_2 (x'' - \eta_1 \sinh \lambda)} \\
 &= e^\lambda e^{-ie^{2\lambda} \eta_1 \eta_2/2} \int_{-\infty}^{\infty} dx'' |x''\rangle_1 \\
 &\quad \otimes |x'' - e^\lambda \eta_1\rangle_2 e^{ie^\lambda \eta_2 x''}, \quad (23)
 \end{aligned}$$

对照纠缠态 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解的标准形式 (13), 可知上式可简写为

$$\begin{aligned}
 S_2(\mu)|\eta\rangle &= e^\lambda |e^\lambda \eta\rangle, \\
 \mu &= e^\lambda, \quad (24)
 \end{aligned}$$

这表明双模压缩算符把 $|\eta\rangle$ 压缩为 $e^\lambda |e^\lambda \eta\rangle$, 再由 (6) 式可知

$$S_2(\mu) = \int \frac{\mu d^2 \eta}{\pi} |\mu \eta\rangle \langle \eta|. \quad (25)$$

这样就用 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解导出了 $S_2(\mu)$ 在纠缠态表象中的一个简洁表示, 这表明双模压缩也起了纠缠的作用.

5 $|\eta\rangle$ 在粒子数表象中的 Schmidt 分解

双变量厄米多项式 $H_{m,n}(\xi, \xi^*)$ 的生成函数公式

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{t^m t'^n}{m!n!} H_{m,n}(\xi, \xi^*) = \exp(-tt' + t\xi + t'\xi^*), \quad (26)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{m,n}(\xi, \xi^*) &= \sum_{l=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!}{l!(m-l)!(n-l)!} (-1)^l \xi^{m-l} \xi^{*n-l}, \end{aligned} \quad (27)$$

把 $|\eta\rangle$ 展开

$$\begin{aligned} |\eta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \exp\left[-\left(\mathbf{ia}_1^\dagger\right)\left(\mathbf{ia}_2^\dagger\right) + \left(\mathbf{ia}_1^\dagger\right)(-i\eta) + \left(\mathbf{ia}_2^\dagger\right)i\eta^*\right] |00\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{m,n} \frac{\left(\mathbf{ia}_1^\dagger\right)^m \left(\mathbf{ia}_2^\dagger\right)^n}{m!n!} \\ &\quad \times H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*) |00\rangle \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \sum_{m,n} \frac{i^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} \\ &\quad \times H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*) |m, n\rangle. \end{aligned} \quad (28)$$

因此, 取 $|\eta\rangle$ 与双模 Fock 态 $|m, n\rangle = |m\rangle_1 |n\rangle_2$ 的内积, $|m\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{m!}} \mathbf{a}_i^{\dagger m} |0\rangle_i$, 得

$$\langle m, n | \eta \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \frac{i^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*). \quad (29)$$

另一方面, 由 (13) 式及

$$\begin{aligned} {}_1\langle x | m \rangle_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi 2^m m!}} H_m(x) e^{-x^2/2} \\ &= {}_1\langle m | x \rangle_1, \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $H_m(x)$ 是单变量厄米多项式, 可得

$$\begin{aligned} \langle m, n | \eta \rangle &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \langle m | x \rangle_1 \\ &\quad \otimes {}_2\langle n | x - \eta_1 \rangle_2 e^{i\eta_2 x} \\ &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{2^{m+n} m! n!}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\times \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2 + x\eta_1 - \eta_1^2/2} \\ &\times H_m(x) H_n(x - \eta_1) e^{i\eta_2 x}, \end{aligned} \quad (31)$$

所以比较 (29) 式和 (31) 式得到

$$\begin{aligned} H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*) &= e^{-\eta^2/2} \frac{(-i)^{m+n}}{\sqrt{\pi 2^{m+n}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \\ &\quad \times H_m(x) H_n(x - \eta_1) e^{\sqrt{2}\eta x}. \end{aligned} \quad (32)$$

可见双变量厄米多项式是两个单变数厄米多项式的纠缠形式. 而 (28) 式是 $|\eta\rangle$ 在粒子数表象中的 Schmidt 分解, 当测量粒子 1 发现它处于 Fock 态 $|m\rangle_1$ 时, 粒子 2 也处于 Fock 态, 而后者事先并不知道对粒子 1 做何种方式的测量.

6 $|\eta\rangle$ 的 Schmidt 分解直接给出平移算符在 Fock 空间的矩阵元

由于 ${}_1\langle m | x \rangle_1 = {}_1\langle x | m \rangle_1$, 就可把 (31) 式中的第二步改写为

$$\begin{aligned} \langle m, n | \eta \rangle &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx {}_1\langle m | e^{i\eta_2 X_1} | x \rangle_1 \\ &\quad \otimes {}_2\langle n | e^{i\eta_1 P_2} | x \rangle_2 \\ &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx {}_1\langle m | e^{i\eta_2 X_1} | x \rangle_1 \\ &\quad \otimes {}_2\langle x | e^{-i\eta_1 P_2} | n \rangle_2, \end{aligned} \quad (33)$$

为了实现对 dx 的积分, 引入一个置换算符 $\mathfrak{P}_{12}$, 它能把 $|x\rangle_2$ 变为 $|x\rangle_1$, 即

$$\begin{aligned} |x\rangle_1 &= \mathfrak{P}_{12} |x\rangle_2, \quad \mathfrak{P}_{12} |x\rangle_1 = |x\rangle_2, \\ \mathfrak{P}_{12}^2 &= 1, \quad \mathfrak{P}_{12} = \mathfrak{P}_{12}^\dagger = \mathfrak{P}_{12}^{-1}, \end{aligned} \quad (34)$$

这样定义的 $\mathfrak{P}_{12}$ 还具有如下性质:

$$\mathfrak{P}_{12} e^{-i\eta_1 P_2} \mathfrak{P}_{12}^{-1} = e^{-i\eta_1 P_1}, \quad (35)$$

$$\mathfrak{P}_{12} \mathbf{a}_2 \mathfrak{P}_{12}^{-1} = \mathbf{a}_1, \quad \mathfrak{P}_{12} \mathbf{a}_1 \mathfrak{P}_{12}^{-1} = \mathbf{a}_2, \quad (36)$$

$$\mathfrak{P}_{12} |n\rangle_2 = |n\rangle_1, \quad \mathfrak{P}_{12} |n\rangle_1 = |n\rangle_2. \quad (37)$$

利用 $\mathfrak{P}_{12}$ 就把 (33) 式变为

$$\begin{aligned} \langle m, n | \eta \rangle &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx {}_1\langle m | e^{i\eta_2 X_1} | x \rangle_1 \\ &\quad \times {}_1\langle x | \mathfrak{P}_{12} e^{-i\eta_1 P_2} | n \rangle_2 \\ &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} \int_{-\infty}^{\infty} dx {}_1\langle m | e^{i\eta_2 X_1} | x \rangle_1 \\ &\quad \times {}_1\langle x | \mathfrak{P}_{12} e^{-i\eta_1 P_2} \mathfrak{P}_{12}^{-1} \mathfrak{P}_{12} | n \rangle_2 \\ &= e^{-i\eta_1 \eta_2 / 2} {}_1\langle m | e^{i\eta_2 X_1} e^{-i\eta_1 P_1} \mathfrak{P}_{12} | n \rangle_2 \end{aligned}$$

$$= e^{-i\eta_1\eta_2/2} {}_1\langle m| e^{i\eta_2 X_1} e^{-i\eta_1 P_1} |n\rangle_1, \quad (38)$$

所以结合 (29) 式有

$$\begin{aligned} & {}_1\langle m| e^{i\eta_2 X_1} e^{-i\eta_1 P_1} |n\rangle_1 \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} e^{i\eta_1\eta_2/2} \frac{i^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*), \end{aligned} \quad (39)$$

由于

$$\begin{aligned} & \exp(i\eta_2 X_1) \exp(-iP_1\eta_1) \\ &= \exp(i\eta_2 X_1 - iP_1\eta_1) e^{i\eta_1\eta_2/2} \\ &= \exp\left[\frac{\eta_1 + i\eta_2}{2}(X_1 - iP_1) - \frac{\eta_1 - i\eta_2}{2}(X_1 + iP_1)\right] e^{i\eta_1\eta_2/2} \\ &= \exp\left(\eta a_1^\dagger - \eta^* a_1\right) e^{i\eta_1\eta_2/2} \\ &= D_1(\eta) e^{i\eta_1\eta_2/2}, \end{aligned} \quad (40)$$

所以 (39) 式给出平移算符在 Fock 空间的矩阵元

$$\begin{aligned} & {}_1\langle m| D_1(\eta) |n\rangle_1 \\ &= e^{-\frac{1}{2}|\eta|^2} \frac{i^{m+n}}{\sqrt{m!n!}} H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*), \end{aligned} \quad (41)$$

该矩阵元在固体物理以及量子光学中都有广泛的应用, 但以 $H_{m,n}(-i\eta, i\eta^*)$ 形式出现的 ${}_1\langle m| D_1(\eta) |n\rangle_1$ 的表达式尚未见于以往的文献.

7 结 论

本文的讨论揭示了如何在两粒子连续纠缠态表象 $|\eta\rangle$ 的基础上做 Schmidt 分解, 并阐述了其物理意义, 它对分析量子纠缠的功效以及各种应用具有一定的参考价值. 这些可以推广到将来对多粒子连续纠缠态的情形.

- [1] Dirac P A M 1930 *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford:Clarendon Press)
- [2] Glauber R 1963 *J. Phys. Rev.* **130** 2529
- [3] Glauber R 1963 *J. Phys. Rev.* **131** 2766
- [4] Reed M D, DiCarlo L, Nigg S E, Sun L, Frunzio L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2012 *Nature* **482** 382
- [5] Li P B, Gao S Y, Li F L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 014303

- [6] Cheng G L, Chen A X, Zhong W X 2011 *Opt. Commun.* **284** 4028
- [7] Hou S Y, Yang K 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 064203
- [8] Hulya Y A, Alessio S 2011 *Phys. Lett. A* **375** 1864
- [9] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050303
- [10] Fan H Y, Klauder J R 1994 *Phys. Rev. A* **49** 70
- [11] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [12] Fan H Y, Fan Yue 1996 *Phys. Rev. A* **54** 958

The physical significances and applications of Schmidt decompositions of continuum bipartite entangled state representation*

Fan Hong-Yi¹⁾ Li Xue-Chao²⁾†

1) (Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

2) (Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China)

(Received 25 February 2012; revised manuscript received 19 April 2012)

Abstract

According to the continuum bipartite entangled state representation $|\eta\rangle$ we derive the Schmidt decomposition of $|\eta\rangle$, respectively in the coordinate representation, momentum representation and the particle number representation, and explain their physical significances. As the applications of the Schmidt decomposition, we directly derive the action of the single-mode squeeze operator on $|\eta\rangle$, the two-mode squeeze operator's entangled state representation, as well as the matrix element of displacement operator in the Fock space. Generalization of our discussion in this paper to the multipartite entangled state cases is feasible.

Keywords: entangled state, Schmidt decomposition, squeezed operator

PACS: 03.65.Ud, 42.50.Dv

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10874174).

† E-mail: xuechao@mail.ustc.edu.cn