

两子系统在周期切换连接下的振荡行为及其机理*

余跃¹⁾²⁾ 张春¹⁾ 韩修静¹⁾ 毕勤胜^{1)†}

1) (江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

2) (南通大学理学院, 南通 226019)

(2012 年 1 月 17 日收到; 2012 年 4 月 11 日收到修改稿)

研究了两非线性系统在周期切换连接下的分岔和混沌行为. 通过局部分析, 分别给出了两子系统参数空间诸如 Fold 分岔、Hopf 分岔等临界条件, 进而考虑两子系统存在不同稳态解时通过周期切换连接下的复合系统的分岔特性, 给出了不同的周期振荡行为, 并揭示了其相应的产生机理. 指出系统轨迹可以由切换点分割成不同的部分, 分别受两子系统的控制, 而随参数的变化, 切换点数目成倍增加, 导致系统由倍周期分岔序列进入混沌. 同时, 在其演化过程中, 虽然子系统定性保持不变, 但由于切换导致的非光滑性, 复合系统不仅仅表现为两子系统动力特性的简单连接, 而是会产生各种分岔, 导致诸如混沌等复杂振荡行为.

关键词: Rössler 系统, 蔡氏电路, 周期切换, 倍周期分岔

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

1 引言

自然科学如物理、化学、生物以及各种实际工程技术领域的许多实际问题会涉及到不同子系统之间的切换, 如含有双向开关切换的控制电路^[1,2]、反应催化中的自激振荡^[3]、心脏扩张收缩的跳动过程^[4]、复杂网络模型^[5]以及机械系统中对摩擦行为的控制^[6]等. 这些问题的理论模型大都可以由两组或两组以上的微分方程组加上切换条件, 组成切换系统来刻画, 也即根据切换条件, 整个系统的行为分别在不同子系统间来回振荡. 切换条件的给出主要有状态和时间两种, 两类条件可以结合并根据实际问题给出.

由于切换系统有着广泛的应用背景, 同时在不同的切换系统中存在着大量的特殊非线性行为, 其复杂性分析及其相应的机理研究引起了各国学者的广泛关注, 并开展了大量的研究工作. Bhattacharyya 和 Mukhopadhyay^[7] 讨论了一类生态切换系统的机理, Branicky^[8] 证明了由有限多个连续子

系统组成的切换系统的稳定性, Xie 和 Wang^[9] 分析了时滞切换系统的稳定性, Cheng 等^[10] 讨论了切换系统的稳定性控制, 文献 [11, 12] 对某些特定切换系统阐述了鲁棒稳定性方面的问题. 迄今为止, 虽然在切换系统的复杂性研究取得了一定的进展^[13,14], 但相关成果大都是分析线性切换系统的稳定性及相应的控制策略. 许多问题, 如参数变化对切换系统动力学行为的影响、不同切换模式下系统行为的差别、各种特殊振荡行为及其相应的产生机理, 还有待进一步的工作.

非线性切换系统的数学模型代表了一类非光滑系统^[15,16], 尽管状态空间连续, 但系统的向量场不连续, 而是通过切换条件交替使得轨线受到不同子系统控制, 比一般非光滑系统更加复杂. 本文考虑通过周期切换连接 Rössler 系统^[17,18] 和蔡氏电路^[19,20] 的三维混杂系统, 分析参数变化及周期切换对其动力学演化过程的影响, 给出不同的振荡行为及其相应的产生机理, 揭示出系统轨迹可以由切换点分割成不同的部分, 分别受两子系统的控制; 而随参数的变化, 切换点数目成倍增加, 导致系统

* 国家自然科学基金 (批准号: 20976075, 10972091) 资助的课题.

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn

由倍周期分岔序列进入混沌.

2 切换系统的数学模型

一般而言, 阈值或开关等引起的系统之间的切换可以分为两类, 一是定义于时域上, 即时间满足一定条件引起的向量场变化, 另一是定义于空间上, 即状态变量满足相关条件导致的系统切换. 为分析切换系统的复杂性及其机理, 考虑 Rössler 振子 (子系统 1) 和蔡氏电路系统 (子系统 2) 之间存在周期 T 切换时动力特性, 其相应的数学模型可以表示为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - z, & \dot{y} &= x + \mu y, \\ \dot{z} &= xz - \delta z + \eta, & t &\in [2nT, (2n+1)T], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha [y - g(x)], & \dot{y} &= x - y + z, \\ \dot{z} &= -\beta y, & t &\in [(2n+1)T, (2n+2)T], \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = bx + \frac{1}{2}(a-b)(|x+c| - |x-c|)$.

由于整个系统的向量场在两子系统之间做周期 T 切换, 从而导致系统存在一类非光滑点, 也即切换点, 连接由两子系统定义的轨道. 显然, 不仅是周期切换, 同时两子系统的行为及其分岔模式, 都会影响系统的动力学演化过程, 因此, 有必要分析两子系统的各种稳态运动及其相应的分岔特性, 进而探讨周期切换下整个系统的动力学行为.

3 子系统的分岔分析

3.1 Rössler 系统的平衡点及其稳定性

由子系统 1 可知, 当 $\eta^2 < 4\mu\delta$ 时, Rössler 系统不存在平衡点, 而当 $\eta^2 > 4\mu\delta$ 时, 存在两对对称的平衡点, 表示为

$$E_{R0}^{\pm} \left\{ \frac{1}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\mu\eta} \right), -\frac{1}{2\mu} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\mu\eta} \right), \frac{1}{2\mu} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\mu\eta} \right) \right\}.$$

分析其相应的特征方程可知, $E_{R0}^{\pm}$ 分别可以通过 Fold 分岔和 Hopf 分岔失稳, 图 1 给出了 $\delta = 4$ 时子系统的分岔集.

分岔集将参数 (μ, η) 平面划分为三个区域, 其中在区域③中不存在平衡点, 在区域① E_{R0}^{+} 不稳定, 而 E_{R0}^{-} 为稳定的焦点, 图 2(a) 给出

了 $\mu = 0.25, \eta = 6$ 时平衡点附近的轨线分布. E_{R0}^{-} 在参数穿越 Hopf 分岔集时会导致周期振荡解, 如当 $\mu = 0.2, \eta = 2$ 时, 存在围绕平衡点 $(0.1026, -0.5131, 0.5132)$ 的稳定极限环 (如图 2(b)).

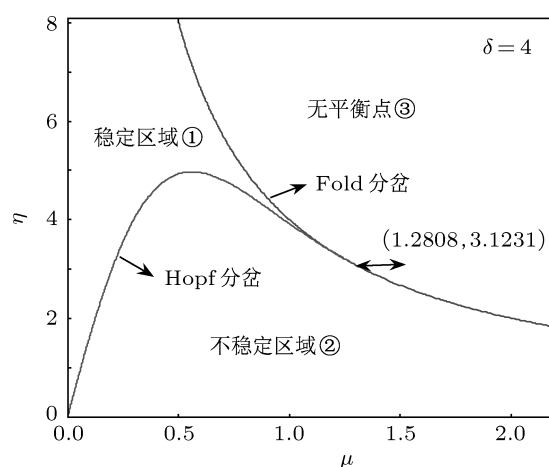


图 1 Rössler 系统在参数 (μ, η) 平面上的分岔集

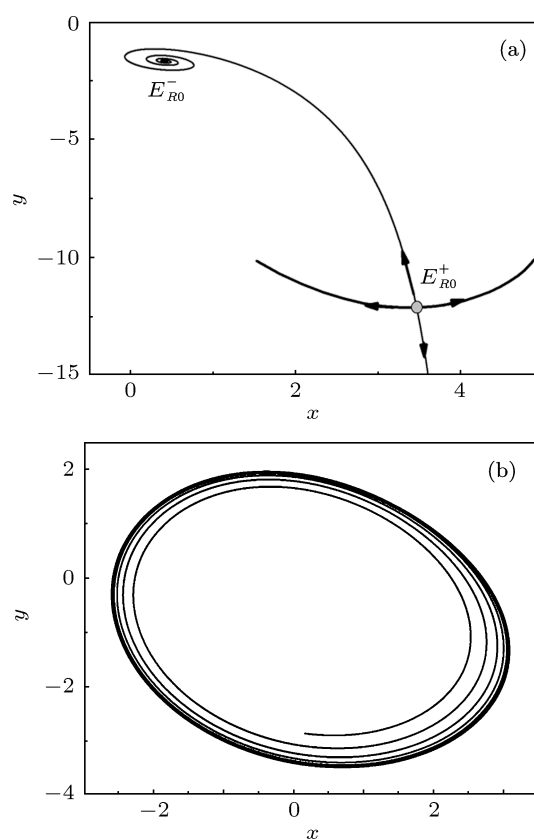


图 2 Rössler 系统的相图 (a) $\mu = 0.25, \eta = 6$; (b) $\mu = 0.2, \eta = 2$

随着参数的变化, Rössler 系统会呈现出诸如稳定的平衡态、周期振荡等不同的动力特性, 在一定

条件下,甚至会产生混沌运动.在切换过程中,所取参数不同,参与切换的子系统的轨迹也不一样,同时,参数的变化也会使得该子系统的各种分岔行为影响到系统的切换演化过程.

3.2 蔡氏系统的平衡点及其稳定性

对于具有分段线性特性的蔡氏电路系统,分段函数将相空间划分为三个区域,而每一区域中,分别存在着一个平衡点,表示为 $E_{C0}^0(0, 0, 0)$ 和 $E_{C0}^{\pm}\{\pm(a-b)c/b, 0, \mp(a-b)c/b\}$,其稳定性由其相应的 Jacobian 矩阵的特征值决定,如图 3(a)给出了 $\beta = 20$ 时平衡点 E_{C0}^0 的局部行为, E_{C0}^0 由区域②中的鞍点由简单分岔演化为区域①中的稳定焦点;图 3(b)进一步给出了 $a = 0.5, b = -0.15, c = 1.0, \alpha = 5.0$ 时的系统结构,由两鞍点 $E_{C0}^{\pm}$ 定义的鞍曲面将相空间划分为三个子空间,其中心区域构成稳定焦点 E_{C0}^0 的吸引盆.

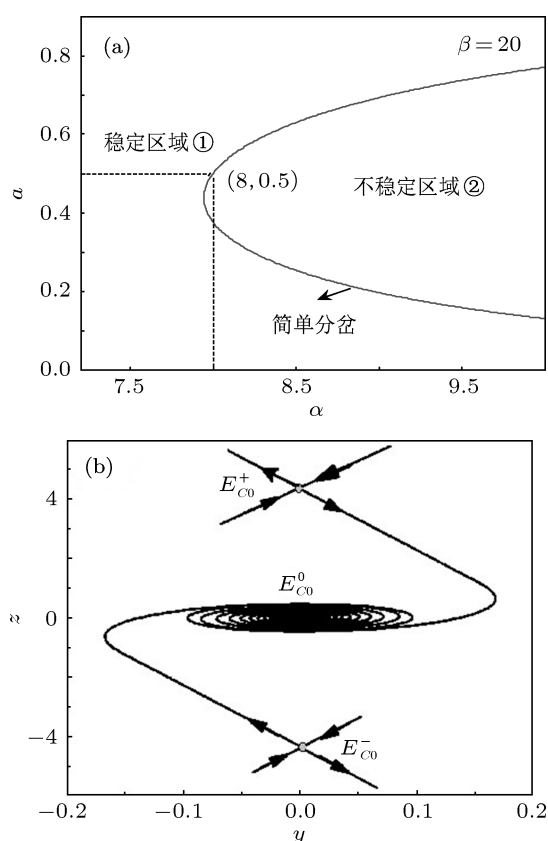


图3 蔡氏系统 (a) 分岔图; (b) 平衡点结构

$E_{C0}^{\pm}$ 也同样存在相应的局部特性,并根据参数的变化,产生相应的分岔行为,同时,在非光滑分界面上,也会引起各种非常规分岔,导致系统结构的

变化,产生诸如周期振荡等非线性现象.

4 切换系统的振荡行为及其机理

4.1 切换系统的动力学演化过程

通过上述分析可知,在不同的参数条件下,子系统会呈现出不同的动力特性,这些特性均会对切换系统的行为产生影响.为揭示切换系统的动力学演化过程,取定参数 $\mu = 0.2, \eta = 2, \delta = 4, a = 0.5, b = -0.15, c = 1.0, \beta = 20, T = 10.0$, 并取 α 为分岔参数,给出了切换系统的分岔图(见图 4).

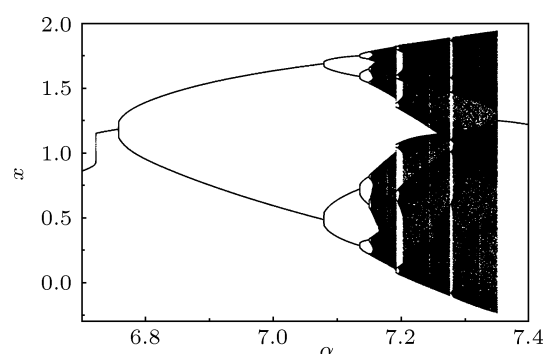


图4 切换系统的分岔图

显然,在此参数条件下,子系统 1 为稳定的周期解,而当 $\alpha < 8$ 时,子系统 2 存在稳定的焦点 E_{C0}^0 ,切换系统的轨迹会以周期 T 在这两类吸引子上来回变换(参见图 5).

当 $\alpha < 6.784$ 时,切换系统表现为稳定的 $2T$ 周期解,其周期由切换周期 T 决定(见图 5(d)). 同时,在切换系统的周期轨道上,明显存在两个不同的切换点(图 6(a) 和 (c) 中的 A 和 B 点),分别导致轨迹在两子系统之间来回变换. 另外,由于两子系统的稳态解存在着一定的特性,如 Rössler 系统的极限环在 z 方向变化较小,而趋于蔡氏系统的稳定焦点 E_{C0}^0 的轨线几乎垂直于 $y = 0$ 平面,从而导致切换系统周期轨道在两子系统部分几乎分别分布在相互垂直的子区域中(见图 5(b)). 必须说明的是,虽然两子系统均存在稳态解,但是切换系统的轨迹不是在两子系统的稳态解之间切换,而是分别趋于两稳态解的过渡过程之间的切换. 这是因为,当系统在每一子系统时,轨迹将趋于稳态吸引子,但尚未到达就因为周期切换条件满足,轨迹即以该点为初始点向另一子系统的稳态解逼近.

当临界条件 $\alpha = 6.784$ 时, 经数值计算可知, 此时切换系统的周期轨道的 Floquet 指数等于 $\alpha = -1.0$, 并穿越单位圆, 虽然两子系统均依然存在稳态解, 但由于切换系统周期轨道整体失稳, 产生倍周期分岔 (见图 4), 导致周期 $4T$ 解, 倍周期分岔序列进一步使得切换系统产生混沌振荡, 直到 $\alpha = 7.358$ 时产生突变, 又回到周期 $2T$ 解.

4.2 切换系统的两切换点周期解振荡机理

当 $\alpha < 6.784$ 时, 切换系统存在稳定的周期解, 如 $\alpha = 5$ (见图 5), 在该周期解的轨道上存在两不同的切换点, 分别指向两子系统. 假设周期切换轨道的起点是从 Rössler 系统开始的, 即在 $[0, T]$ 时间内, 系统受 Rössler 系统支配, 所以从起点 A 开始, 轨迹将会沿着 Rössler 系统轨线 $\widehat{ACB}$ 旋转. 在未达到切换条件时, 轨迹将一直在 Rössler 系统内运动并趋向稳定的极限环 (如图 2(b)). 但是, 当轨迹运动到 $B(-0.016, 0.152)$ 时, 满足周期切换条件, 即时间 $t = T$, 切换导致系统转向于蔡氏电路, 轨迹改受蔡氏电路的向量场控制, 即以切换点 B 为状

态初值, 进入子系统 2, 在 $[T, 2T]$ 时间内, 轨迹向蔡氏电路的焦点逼近, 沿 $\widehat{BDA}$ 运动. 如果不存在切换, 轨迹将最终逼近稳定的焦点. 但是当 $t = 2T$ 时, 周期切换条件重新满足, 此时轨迹刚好重新回到切换点 $A(0.046, 0.019)$, 导致切换系统再次以 A 为初值, 受子系统 1 控制, 趋于 Rössler 系统稳定的极限环. 上述过程重复进行, 得到周期为 $2T$ 的周期解.

显然, 两切换点 A 和 B 将切换系统的周期轨道划分为两部分, 分别以 A 和 B 为初值, 受两子系统控制, 趋于两子系统的稳态解. 同时, 由于在此参数条件下, 子系统 1 和 2 的稳态解分别为周期轨道和焦点. 一般而言, 周期轨道具有稳定的振幅, 而焦点则存在相应的趋于该点的衰减过程, 因而切换系统的周期轨道会表现出与簇发现象 (bursting phenomenon) 比较一致的振荡特性, 也即微幅振荡或静平衡态 (沉寂态) 与大幅振荡 (激发态) 的耦合, 但是两者之间存在着本质的区别, 在簇发中由分岔点连接沉寂态和激发态, 而在切换系统的周期轨道中, 则是有切换点连接的两过程, 不存在分岔现象.

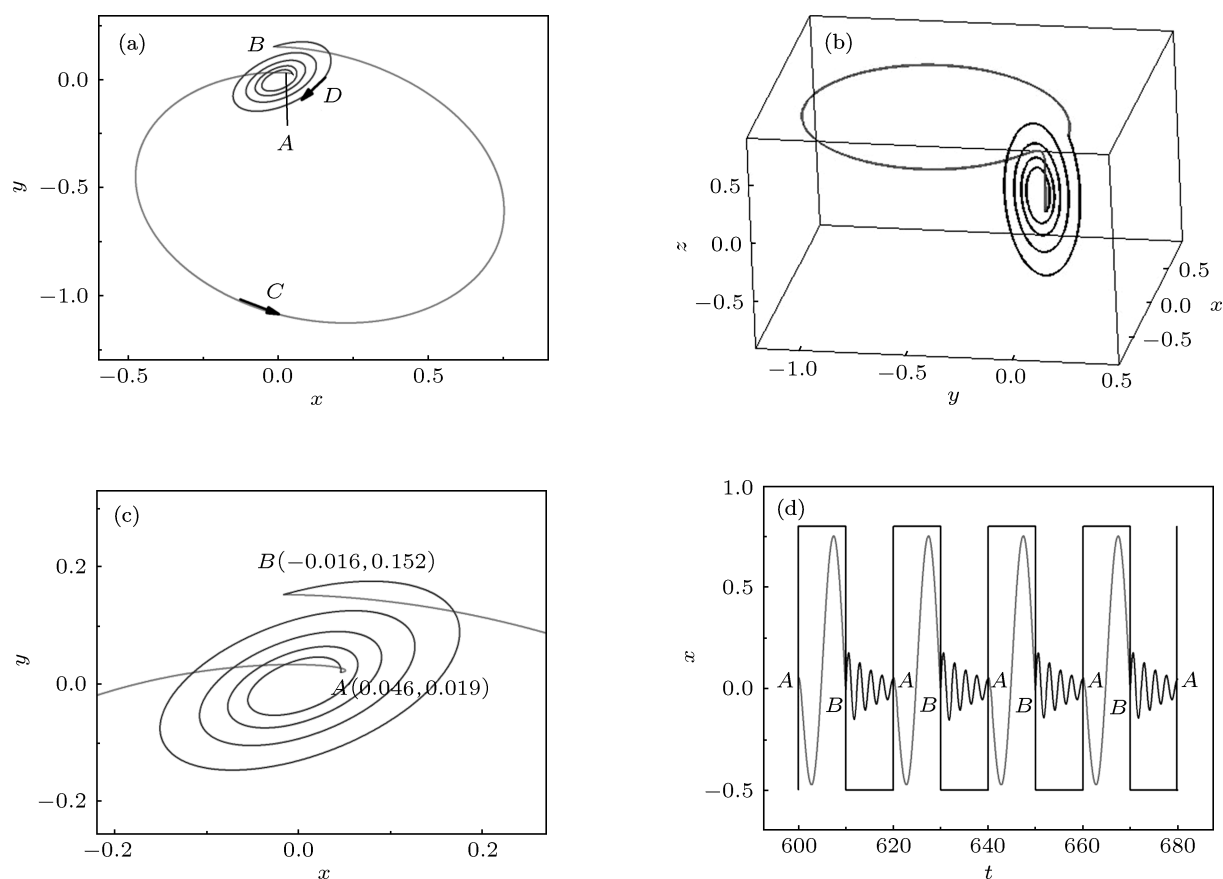
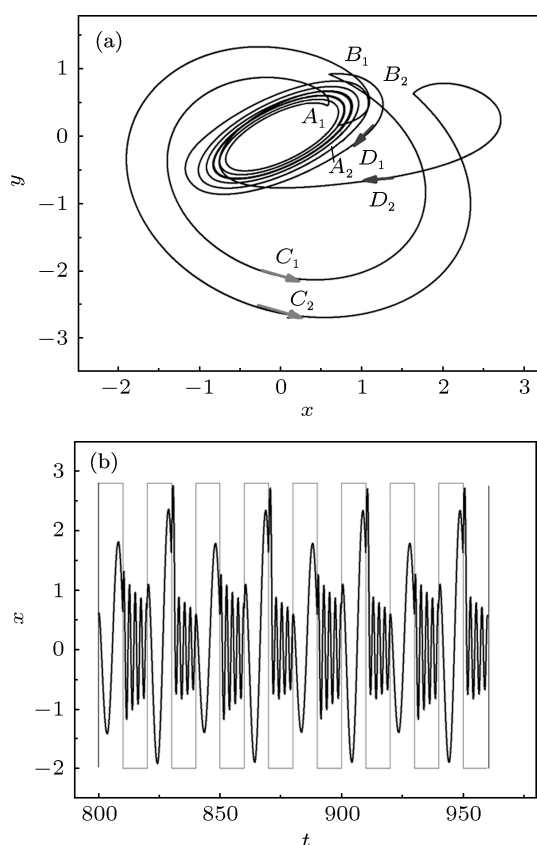


图5 $\alpha = 5$ 时的周期解 (a) 平面相图; (b) 空间相图; (c) 切换点局部放大图; (d) 时间历程

另外, 当 $\alpha = 5$ 时, 蔡氏系统稳定焦点 E_{C0}^0 的特征值分别为 $\lambda_{1,2} = -0.2083 \pm 4.022I$, $\lambda_3 = -3.083$, 因此, 当系统转向该子系统时, 其衰减频率为 $\Omega_S = 4.022$, 而从图 5(d) 的数值模拟中可以计算其衰减频率为 4.021, 基本一致.

4.3 切换系统倍周期解的振荡机理

随着 α 增大, 当 $\alpha = 6.784$, 产生倍周期分岔, 导致具有四个切换点的周期 $4T$ 解 (见图 6), 切换点由原来的两个变化为四个. 这意味着切换系统的轨迹在每一周期内在两子系统内来回两次振荡.

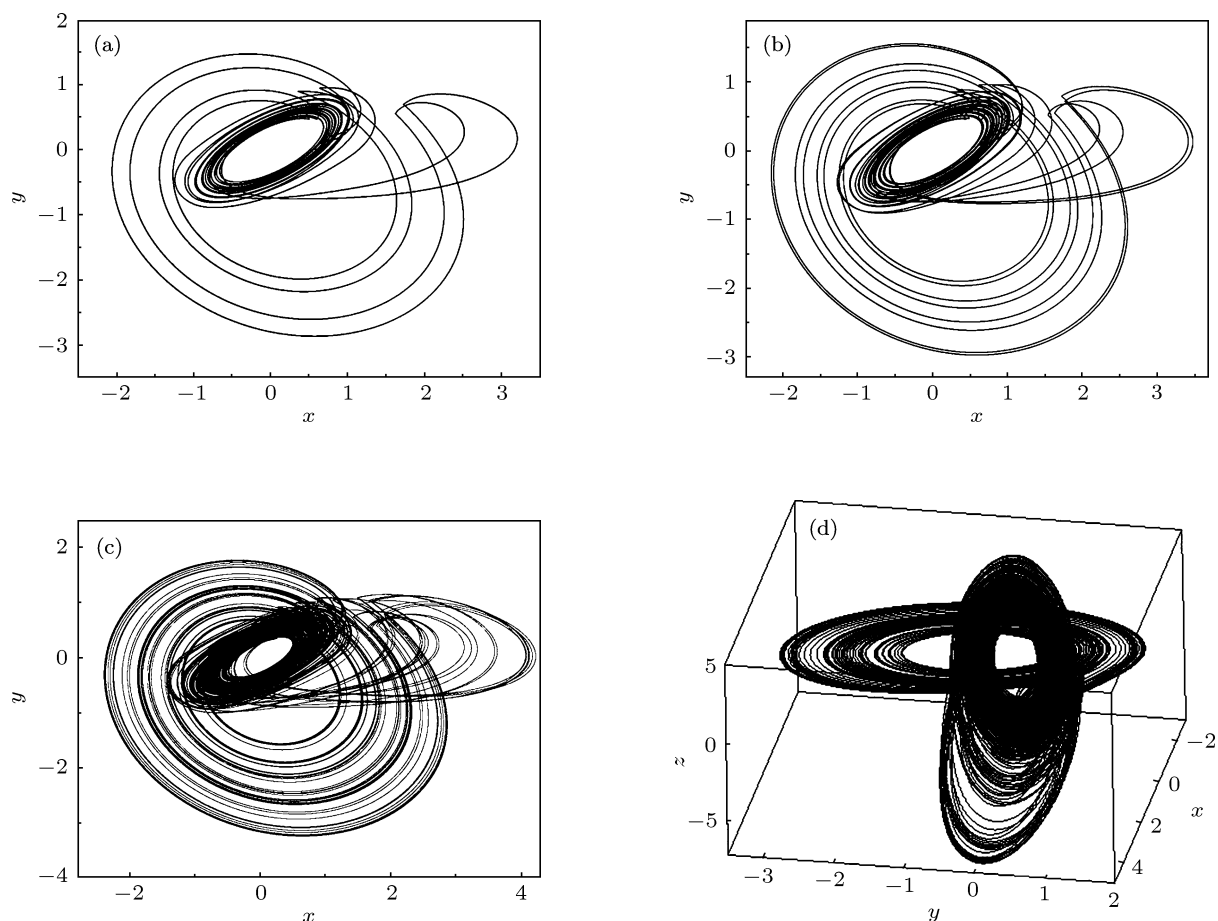
图6 $\alpha = 7$ 时周期 $4T$ 解 (a) 相图; (b) 时间历程

假设切换系统轨迹起点取在蔡氏电路切换为 Rössler 系统的起点 A_1 处, 系统轨迹从 A_1 点开始受 Rössler 系统向量场支配, 即轨迹沿 $A_1C_1B_1$ 向 Rössler 系统稳定的极限环逼近. 经过时间 T 后, 轨迹运动到 B_1 点, 满足切换条件, 轨迹开始受到

子系统蔡氏电路控制, 以 B_1 点为初值, 进入子系统 2, 向该系统稳定的焦点逼近, 直到时刻 $t = 2T$, 发生切换, 系统重新回到 Rössler 系统, 由于 α 值的变化, 在 $\alpha \in (6.784, 7.1021)$ 内, 蔡氏电路的轨迹产生改变, 使得在 $2T$ 时刻, 轨迹无法回到初始切换点 A_1 , 也即系统无法做到在 $[0, 2T]$ 时间内在一组切换点上反复振荡, 达到稳态周期 $2T$ 解. 经过 $2T$ 时间, 轨迹离开蔡氏电路时到达另一点 A_2 , 并以 A_2 为初始值, 受 Rössler 系统控制, 在 $[2T, 3T]$ 时间内, 轨迹趋向 Rössler 系统稳定的极限环. 由于初值的改变, 在时间 T 内, 从 A_2 出发的朝向极限环运动轨线, 不会与 $[0, T]$ 时间内的从 A_1 出发的轨线重合, 即不会在 $t = 3T$ 时到达切换 B_1 , 而是以另外的路径 $A_2C_2B_2$ 朝极限环方向运动, 到达新的切换点 B_2 , 并以 B_2 为初值, 受蔡氏电路系统控制, 趋于该子系统稳定的焦点, 并在 $t = 4T$, 轨迹回到 A_1 , 构成一个封闭周期切换系统的周期 $4T$ 解.

由于切换系统的倍周期分岔, 导致系统轨道上切换点的成倍增加, 四个切换点将切换系统的轨迹划分为四个部分, 分别受两子系统控制. 虽然此时两子系统的稳态解的形式保持不变, 但是由于子系统 2 的参数变化, 改变了 E_{C0}^0 的特征子空间, 使得与 E_{C0}^0 相关的实特征值变化明显. 如当 $\alpha = 5$ 时, 其相应的特征值分别为 $\lambda_{1,2} = -0.2083 \pm 4.022I$, $\lambda_3 = -3.083$, 而当 $\alpha = 7$ 时, 则为 $\lambda_{1,2} = -0.0595 \pm 3.9968I$, $\lambda_3 = -4.38$. 从 -3.083 变化到 -4.38 , 实特征值的绝对值明显增大, 使得在蔡氏电路内运行的轨迹向稳定焦点逼近的过程中在相同的时间内围绕 E_{C0}^0 旋转的速度加快, 从而导致切换位置不重合, 切换点数目倍化.

随着参数的继续变化, 切换系统的轨道再次发生倍周期分岔, 使得切换点数目成倍增加, 轨道也由切换点成倍分割为分别受两子系统控制的部分, 直至混沌振荡的产生 (见图 7). 必须说明的是, 此时两子系统的定性性质依然保持不变, 系统的混沌演化过程纯粹是由于切换点改变导致的, 也就是说, 切换不仅仅是两子系统动力特性的简单连接, 而且存在着更为丰富的非线性现象, 因为切换本身所引起的非光滑性, 导致了向量场的不连续, 从而引起非光滑分岔行为的出现.

图7 倍周期分岔到混沌 (a) $\alpha = 7.1$; (b) $\alpha = 7.145$; (c) $\alpha = 7.3$; (d) (c) 的空间图

5 结 论

通过时间切换, 系统在两个子系统之间产生明显的分界点, 生成稳定的周期解. 同时, 子系统平衡点吸引盆的结构影响周期解的轨线分布. 子系统参

数的变化对切换系统的分岔行为产生明显的影响, 随着参数的变化, 切换系统通过倍周期分岔进入混沌振荡. 其数值方法和机理分析有助于理解非线性切换系统的复杂动力学行为.

- [1] Danièle F P, Pascal C, Laura G 2001 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 916
- [2] Ueta T, Kawakami H 2002 *International Symposium on Circuits and Systems* Tokushima Japan, May 26–29, 2002 II-544
- [3] Putyrski M, Schultz C 2011 *Chem. Biol.* **18** 1126
- [4] Zhang W, Yu P 2000 *J. Sound Vib.* **231** 145
- [5] Kim S C, Kim Y C, Yoon B Y, Kang M 2007 *Computer Netw.* **51** 606
- [6] Jing Z J, Yang Z Y, Jiang T 2006 *Chaos Soliton. Fract.* **27** 722
- [7] Bhattacharyya R, Mukhopadhyay B 2010 *Nonlinear Anal.-Real.* **11** 3824
- [8] Branicky M S 1998 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **43** 475
- [9] Xie G M, Wang L 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **305** 277
- [10] Cheng D, Guo L, Lin Y, Wang Y 2005 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **50** 661
- [11] Huang H, Qu Y Z, A, Li H X 2005 *Phys. Lett. A* **345** 345
- [12] Pettersson S, Lennartson B 1996 *Proc. of the 35th IEEE Conference on Control and Decision* Kobe, Japan, December 11–13, 1996 1202
- [13] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 70502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 70502]
- [14] Nishiuchi Y, Ueta T, Kawakami H 2006 *Chaos Soliton. Fract.* **27**

- 941
- [15] Leine R I 2006 *Physica D* **223** 121
- [16] Li S L, Zhang Z D, Wu T Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 60504 (in Chinese) [李绍龙, 吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 60504]
- [17] Rössler O E 1976 *Phys. Lett. A* **57** 397
- [18] Yang T 1997 *Phys. Lett. A* **232** 356
- [19] Madan R N 1993 *Chua's Circuit: A Paradigm for Chaos* (Singapore: World Scientific Press) p122
- [20] Chen Z Y, Zhang X F, Bi Q S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2326 (in Chinese) [陈章耀, 张晓芳, 毕勤胜 2010 物理学报 **59** 2326]

Oscillations and their mechanism of compound system with periodic switches between two subsystems*

Yu Yue¹⁾²⁾ Zhang Chun¹⁾ Han Xiu-Jing¹⁾ Bi Qin-Sheng[†]

1) (Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

2) (Faculty of Science, Nantong University, Nantong 226019, China)

(Received 17 January 2012; revised manuscript received 11 April 2012)

Abstract

Complicated behaviors of the compound system with periodic switches between two nonlinear systems are investigated in detail. Through the local analysis, the critical conditions such as fold bifurcation and Hopf bifurcation are derived to explore the bifurcations of the compound systems with different stable solutions in the two subsystems. Different types of oscillations of the switched system are observed of which, the mechanism is presented to show that the trajectories of the oscillations can be divided into several parts by the switching points, governed by the two subsystems, respectively. With the variation of the parameters, cascading of doubling increase of the switching points can be obtained, leading to chaos via period-doubling bifurcations. Furthermore, because of the non-smooth characteristics at the switching points, different forms of bifurcations may occur in the compound system, which may result in complicated dynamics such as chaotic oscillations, instead of the simple connections between the trajectories of the two subsystems.

Keywords: Rössler system, Chua's circuits, periodic switching, periodic bifurcation

PACS: 05.45.-a, 84.30.-r

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 20976075, 10972091).

† E-mail: qbi@ujs.edu.cn