

切变纬向流中 β 效应与缓变地形 Rossby 波*宋健¹⁾²⁾ 刘全生¹⁾ 杨联贵^{1)†}

1) (内蒙古大学数学科学学院, 呼和浩特 010021)

2) (内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

(2012 年 3 月 21 日收到; 2012 年 4 月 12 日收到修改稿)

正压流体中, 从有外源的准地转位涡方程出发, 采用摄动方法和时空伸长变换推导了具有 β 效应、缓变地形和外源的 Rossby 孤立波方程, 得到 Rossby 波振幅满足带有缓变地形与外源强迫的非齐次 mKdV-Burgers 方程的结论. 通过分析孤立 Rossby 波振幅的演变, 指出了 β 效应、地形效应以及外源都是诱导 Rossby 孤立波产生的重要因素; 说明了在缓变地形强迫效应和非线性作用相平衡的假定下, Rossby 孤立波振幅的演变满足非齐次 mKdV-Burgers 方程; 给出在切变基本气流下缓变地形和正压流体中 Rossby 波的相互作用关系.

关键词: 非齐次 mKdV-Burgers 方程, β 效应, 缓变地形, 外源

PACS: 05.45.Yv, 92.10.Ei, 92.70.Cp

1 引言

地球物理流体中, Rossby 波是指生命史很长结构上有组织的前后一致的大尺度永久性波动, 并且这些波动具有稳定的、大振幅的孤立波特征. 对于正压流体, Long^[1] 在 1964 年做了开创性的研究, 得到在 β 平面近似下 Rossby 波振幅演变满足 Korteweg-de Vries (KdV) 方程, Benney^[2] 在 1966 年推广了 Long 的结论, 同时还得到 Rossby 孤立波波速与波振幅有关的结论, 刻画了非线性的重要性. Larsen^[3] 和 Clarker^[4] 也研究了 Rossby 孤立波振幅的演变, 他们都得到了一系列与文献 [1] 类似的结果. Redekopp^[5] 和 Wadati^[6] 从正压流体和分层流体的模式推导了 Rossby 孤立波振幅演变的方程分别满足 KdV 方程和改进的 KdV(mKdV) 方程的结论, 极大地推广了文献 [1] 的结果. Redekopp 和 Weidman^[7] 研究了切变气流中 Rossby 孤立波的产生, 指出在纬向流中 Rossby 孤立波存在的必要条件. Maslowe 和 Redekopp^[8] 讨论了在分层流体中纬向流的切变对 Rossby 波的影响. Charney

和 Straus^[9] 基于准地转位涡度方程构造了一个 β 平面通道中考虑地形、非绝热加热和摩擦的正压大气模式, 这项工作开创了大气多平衡态非线性动力学的研究^[10]. Boyd^[11,12] 用多重尺度方法, 从基本方程导出在正压流体中小振幅 Rossby 孤立波振幅演变满足非线性 KdV 方程和 mKdV 方程. 刘式适和谭本旭^[13] 研究了 Rossby 参数随纬度的变化, 罗德海^[14,15] 用推广的 β 平面近似模式研究了 Rossby 孤立波和 β 随纬度变化的关系, 得到 β 随纬度变化可能是偶极子阻塞的原因. 赵强^[16] 讨论了地形对热带大气超长尺度 Rossby 波的影响, 指出了地形随纬度的变化能够导致热带大气超长尺度 Rossby 波动的不稳定. Meng 和 Lü^[17] 利用扰动展开和时空伸长变换导出了包括地形强迫的非齐次 Boussinesq 方程, 讨论了近共振地形强迫 Rossby 孤立波的产生, 显示出地形对扰动具有明显的增幅作用. 张亮等^[18] 给出了正压 Rossby 波扰动能量问题, 汪萍和戴新刚^[19] 讨论了外强迫作用下正压大气非线性特征数值模拟, 说明了大气大尺度非线性运动的某些特征. 孤立波解在非线性问题中占有重要地位, 给出了许多求孤立波解的方法,

* 国家自然科学基金青年科学基金 (批准号: 11202092) 和内蒙古自然科学基金 (批准号: 2011MS0112, 2012MS0107) 资助的课题.

† E-mail: lianguiyang@imu.edu.cn

如 Hirota's 双线性方法^[20]、椭圆函数展开法^[21,22]等已被广泛应用. 随着人类文明的发展加剧了全球变暖和全球海平面大幅度升高^[23], 这都说明地形会随时间发生变化. 本文中, 在基本气流有切变的条件下研究了 β 平面近似与缓变地形变化及其外源对 Rossby 波振幅的演变.

2 方程的推导

2.1 控制方程与边界条件

考虑有地形和外源无量纲形式的准地转位涡方程^[17,24,25]

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right) \times \left(\nabla^2 \psi + \beta(y)y + h(y,t) \right) = Q(x,y), \quad (1)$$

方程(1)中, ψ 是流函数, ∇^2 为 Laplace 算子, 定义为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2)$$

β 平面近似取为 $\beta(y)y$, 即 β 是纬度变量 y 的函数, $h(y,t)$, $Q(x,y)$ 分别是地形廓线和外源.

侧边界条件为刚壁条件的无量纲形式, 取

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (3)$$

2.2 带有强迫项的非齐次 mKdV-Burgers 方程

取基本流函数为纬向流

$$\Psi(y) = - \int_0^y [U(s) - c_0 + \varepsilon \alpha] ds, \quad (4)$$

式中 $U(y)$ 切变基本流; ε 是度量非线性程度强弱的小参数, 当 $\varepsilon \ll 1$, 成为弱非线性问题; α 是量级为 1 的常数, 它的引入是为考虑线性情况下系统是非共振的^[25], 称为失谐参数; c_0 相当于线性 Rossby 波在切变基本流 $U(y)$ 中当波长很长的波速. 假设地形^[26]

$$h(y,t) = h_{B0}(y) + \varepsilon h_{B1}(t), \quad (5)$$

这里 $h_{B0}(y)$ 是地形随纬度变化的函数, $h_{B1}(t)$ 是地形随时间缓慢变化的函数.

总的流函数

$$\begin{aligned} \psi(x,y,t) &= \Psi(y) + \varepsilon \psi'(x,y,t) \\ &= - \int_0^y [U(s) - c_0 + \varepsilon \alpha] ds \end{aligned}$$

$$+ \varepsilon \psi'(x,y,t), \quad (6)$$

其中 $\psi'(x,y,t)$ 是扰动流函数. 将(5)和(6)式代入方程(1)与边界条件(3)同时略去扰动流函数的撇号, 得到扰动流函数的方程及边界条件

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \varepsilon \frac{dh_{B1}}{dt} + \varepsilon \left(\left(\frac{d\beta(y)y}{dy} + \frac{dh_{B0}}{dy} - \frac{d^2 U}{dy^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \varepsilon (U - c_0 + \varepsilon \alpha) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} \\ + \varepsilon^2 J[\psi, \nabla^2 \psi] = Q(x,y), \end{aligned} \quad (7)$$

式中 $J[A, B] = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}$ 是 Jacobi 算子.

边界条件

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad y = 0, 1, \quad (8)$$

为了使方程(7)中的非线性效应与频散项相平衡, 我们对变量 x, t 引入 Gardner-Morikawa 变换

$$X = \varepsilon x, \quad T = \varepsilon^3 t, \quad (9)$$

并且假设

$$Q(x,y) = \varepsilon^4 S(X,y). \quad (10)$$

将(9)和(10)式代入方程(7),(8)得到

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + \varepsilon^2 \frac{dh_{B1}}{dT} + P(y) \frac{\partial \psi}{\partial X} \\ + (U - c_0 + \varepsilon \alpha) \frac{\partial}{\partial X} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ + \varepsilon J \left[\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \varepsilon^2 J \left[\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right] = \varepsilon^2 S, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial X} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (12)$$

上述方程中已没有快变量 x, t , 只有缓变量 X, T . 为了表示方便引进两个微分算子

$$\begin{aligned} L_0 = \left[(U - c_0 + \varepsilon \alpha) \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + P(y) \right] \frac{\partial}{\partial X}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$L_1 = \left[\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \frac{\partial}{\partial T}, \quad (14)$$

(11) 式中 $P(y) = \frac{d\beta(y)y}{dy} + \frac{dh_{B0}}{dy} - \frac{d^2 U}{dy^2}$, 这样方程(11)可以写为

$$\begin{aligned} L_0(\psi) + \varepsilon^2 L_1(\psi) + \varepsilon^2 \frac{dh_{B1}}{dT} + \varepsilon J \left[\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] \\ + \varepsilon^2 J \left[\psi, \frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} \right] = \varepsilon^2 S. \end{aligned} \quad (15)$$

假设扰动流函数有如下的参数展开形式^[27]

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon \psi_1 + \varepsilon^2 \psi_2 + \cdots, \quad (16)$$

将 (16) 式代入方程 (15) 和边界条件 (12), 并应用两个微分算子 L_0, L_1 , 得到各阶摄动问题的方程与边界条件.

对于 $O(\varepsilon^0)$ 阶, 有

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right) + \frac{P(y)}{U - c_0} \frac{\partial \psi_0}{\partial X} = 0, \quad (17)$$

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial X} = 0, \quad y = 0, 1, \quad (18)$$

方程 (17) 中已假设 $U - c_0 \neq 0$.

假设 ψ_0 有如下形式的分离变量解

$$\psi_0 = A(X, T) \Phi_0(y), \quad (19)$$

将 (19) 式代入方程 (17) 和 (18) 得

$$\left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{P(y)}{U - c_0} \right) \Phi_0(y) = 0, \quad (20)$$

$$\Phi_0(0) = \Phi_0(1) = 0, \quad (21)$$

(20), (21) 式构成一个本征值问题, 从该本征值问题中能够确定本征函数 $\Phi_0(y)$ 与本征值 c_0 , 对于确定的 $P(y)$, $\Phi_0(y)$ 就能被确定. 由于 $P(y)$ 是关于纬度变量 y 的非线性函数, 方程 (20) 和 (21) 很难获得解析解. 另外, 在本阶问题中, 只能确定波的空间结构, 而不能确定波振幅随时间的演变. 为了确定波振幅 $A(X, T)$ 的演变, 继续求解高阶问题.

对于 $O(\varepsilon^1)$ 阶, 有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \frac{P(y)}{U - c_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial X} \\ &= \frac{1}{U - c_0} \frac{\partial A}{\partial T} \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y \Phi_0^2(y), \end{aligned} \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial X} = 0, \quad y = 0, 1, \quad (23)$$

这里 $\left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y$ 是 $\frac{P(y)}{U - c_0}$ 对纬度变量 y 的一阶导数, 我们通过分析可以得到 $\psi_1 = \frac{1}{2} A^2(X, T) \Phi_1(y)$, 其中 $\Phi_1(y)$ 满足

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d^2}{dy^2} + \frac{P(y)}{U - c_0} \right) \Phi_1(y) \\ &= \frac{1}{U - c_0} \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y \Phi_0^2(y), \end{aligned} \quad (24)$$

$$\Phi_1(0) = \Phi_1(1) = 0, \quad (25)$$

本阶表示 Rossby 波整体以 c_0 运动, 而无频散效应. 为了得到 Rossby 波振幅的数学模型, 继续求解更高阶的问题.

对于 $O(\varepsilon^2)$ 阶, 有

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) + \frac{P(y)}{U - c_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial X}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{S}{U - c_0} - \frac{\alpha}{U - c_0} \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{U - c_0} \\ &\times \left\{ J \left[\psi_0, \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right] - J \left[\psi_1, \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right] \right\} \\ &- \frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial X^2} \right) - \frac{1}{U - c_0} \frac{dh_{B1}}{dT} \\ &- \frac{1}{U - c_0} \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial y^2} \right) \equiv F, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial X} = 0, \quad y = 0, 1. \quad (27)$$

由于算子 L_1 的形式与 $\psi_1 = \frac{1}{2} A^2(X, T) \Phi_1(y)$, 本阶出现 X 方向的频散效应, 而 Jacobi 算子项在本阶出现了非线性效应, 因此它们分别为弱频散效应和弱非线性效应. 将 $\psi_0 = A(X, T) \Phi_0(y)$, $\psi_1 = \frac{1}{2} A^2(X, T) \Phi_1(y)$ 以及方程 (20) 和 (24) 代入方程 (26) 的右端得

$$\begin{aligned} F &= \frac{P(y)}{(U - c_0)^2} \Phi_0(y) \frac{\partial A}{\partial T} - \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} \Phi_0(y) \\ &+ \frac{\alpha P(y)}{(U - c_0)^2} \Phi_0(y) \frac{\partial A}{\partial X} - \frac{1}{U - c_0} \frac{dh_{B1}}{dT} \\ &- \frac{1}{2(U - c_0)} \left[\left(\frac{1}{U - c_0} \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y \right)_y \Phi_0^3(y) \right. \\ &\left. - 3 \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y \Phi_0(y) \Phi_1(y) \right] + \frac{S}{U - c_0}, \end{aligned} \quad (28)$$

这里 $\left(\frac{1}{U - c_0} \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y \right)_y$ 是 $\frac{1}{U - c_0} \left(\frac{P(y)}{U - c_0} \right)_y$ 对纬度变量 y 的导数. 由 (26) 式可知, 在本阶出现了弱非线性效应与弱频散效应. 用 $\Phi_0(y)$ 乘以方程 (28) 的两端, 并在变量 y 的区间 $[0, 1]$ 积分, 利用方程 (20) 及边界条件 (21) 以及恒等式

$$\begin{aligned} & \Phi_0(y) \frac{d^2 \Phi_2(y)}{dy^2} \\ &= \frac{d}{dy} \left(\Phi_0(y) \frac{d \Phi_2(y)}{dy} \right) - \frac{d}{dy} \left(\Phi_2(y) \frac{d \Phi_0(y)}{dy} \right) \\ &+ \Phi_2(y) \frac{d^2 \Phi_0(y)}{dy^2} \end{aligned} \quad (29)$$

得到消奇异条件

$$\int_0^1 \Phi_0(y) F dy = 0, \quad (30)$$

这表明, 若摄动问题 (16) 式有效, F 必须满足方程 (30), 否则将出现无穷大振幅的奇异效应, 即共振现象. 将 (28) 式代入方程 (30), 有

$$\int_0^1 \Phi_0^2(y) \frac{P(y)}{(U - c_0)^2} dy \frac{\partial A}{\partial T}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 -\Phi_0^2(y) dy \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} \\
& + \int_0^1 -\frac{\Phi_0(y)}{U-c_0} dy \frac{dh_{B1}}{dy} \\
& + \int_0^1 \frac{\Phi_0(y)S(X,y)}{U-c_0} dy \\
& + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\Phi_0^2(y)}{U-c_0} \left[3 \left(\frac{P(y)}{U-c_0} \right)_y \Phi_1(y) \right. \\
& \left. - \left(\frac{1}{U-c_0} \left(\frac{P(y)}{U-c_0} \right)_y \right)_y \Phi_0^2(y) \right] dy A^2 \frac{\partial A}{\partial X} \\
& + \int_0^1 \Phi_0^2(y) \frac{\alpha P(y)}{(U-c_0)^2} dy \frac{\partial A}{\partial X} = 0, \quad (31)
\end{aligned}$$

若记

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \Phi_0^2(y) \frac{P(y)}{(U-c_0)^2} dy, \\
\alpha_1 &= \frac{1}{2I} \int_0^1 \frac{\Phi_0^2(y)}{U-c_0} \left[3 \left(\frac{P(y)}{U-c_0} \right)_y \Phi_1(y) \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1}{U-c_0} \left(\frac{P(y)}{U-c_0} \right)_y \right)_y \Phi_0^2(y) \right] dy, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{I} \int_0^1 -\Phi_0^2(y) dy, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{I} \int_0^1 \Phi_0^2(y) \frac{\alpha P(y)}{(U-c_0)^2} dy, \\
\alpha_4 &= \frac{1}{I} \int_0^1 -\frac{\Phi_0(y)}{U-c_0} dy, \\
G &= -\frac{1}{I} \int_0^1 \frac{\Phi_0(y)S(X,y)}{U-c_0} dy,
\end{aligned}$$

这样, 方程 (31) 可简写为

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial A}{\partial T} + \alpha_1 A^2 \frac{\partial A}{\partial X} + \alpha_2 \frac{\partial^3 A}{\partial X^3} + \alpha_3 \frac{\partial A}{\partial X} \\
& = G - \alpha_4 \frac{dh_{B1}}{dT}. \quad (32)
\end{aligned}$$

方程 (32) 说明正压流体中 Rossby 孤立波振幅的演变满足非齐次 mKdV-Burgers 方程, 系数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 依赖于函数 $\beta(y), U(y)$ 与地形廓线 $h_{B0}(y)$. G 与外源 $S(X, y)$ 有关, 如果不存在失谐参数、缓变地形和外源, 此时方程 (32) 是齐次 mKdV 方程, 其孤立波解

$$A(X, T) = A_0 \operatorname{sech} \left[\left(\frac{\alpha_1}{6\alpha_2} \right)^{1/2} A_0 (X - VT) \right], \quad (33)$$

$$V^2 = - \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{3} A_0 \right), \quad (34)$$

A_0 是初始孤立波振幅, (34) 式显示了孤立波向两端传播. 方程 (32) 说明 $\beta(y), U(y)$, 地形 $h_{B0}(y)$, 缓变地形 $h_{B1}(t)$ 和外源 $S(X, y)$ 能够诱导 Rossby 孤立波.

3 结论

正压流体中, 应用摄动法导出了弱非线性 Rossby 孤立波振幅的演变满足非齐次方程 mKdV-Burgers, 当基本气流有水平切变, 非线性 β 效应、地形效应以及外源都是 Rossby 孤立波产生的重要因子.

-
- [1] Long R 1964 *J. Atmos. Sci.* **21** 197
[2] Benney D J 1966 *J. Math. Phys.* **45** 52
[3] Larsen L N 1965 *J. Atmos. Sci.* **22** 222
[4] Clarke A 1971 *Geophys. Fluid Dyn.* **2** 343
[5] Redekopp L G 1977 *J. Fluid Mech.* **82** 725
[6] Wadati M 1973 *J. Phys. Soc. Japan* **34** 1289
[7] Redekopp L G, Weidman P D 1978 *J. Atmos. Sci.* **35** 790
[8] Maslowe S A, Redekopp L G 1980 *J. Fluid Mech.* **101** 321
[9] Chraney J G, Straus D M 1980 *J. Atmos. Sci.* **37** 1157
[10] Feng G L, Dong W J, Jia X J, Cao H X 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1181 (in Chinese) [封国林, 董文杰, 贾晓静, 曹鸿兴 2002 物理学报 **51** 1181]
[11] Body J P 1980 *J. Phys. Oceanogr.* **10** 1699
[12] Body J P 1983 *J. Phys. Oceanogr.* **13** 428
[13] Liu S S, Tan B K 1992 *Appl. Math. Mech.* **13** 35 (in Chinese) [刘式适, 谭本旭 1992 应用数学和力学 **13** 35]
[14] Luo D H 1991 *Acta Meteor. Sin.* **5** 587
[15] Luo D H 1995 *J. Appl. Meteor.* **6** 220 (in Chinese) [罗德海 1995 应用气象学报 **6** 220]
[16] Zhao Q 1997 *J. Trop. Meteor.* **13** 140 (in Chinese) [赵强 1997 热带气象学报 **13** 140]
[17] Meng L, Lü K L 2000 *Chin. J. Comput. Phys.* **17** 259
[18] Zhang L, Zhang L F, Wu H Y, Li G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 44 (in Chinese) [张亮, 张立凤, 吴海燕, 李刚 2010 物理学报 **59** 44]
[19] Wang P, Dai X G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4961 (in Chinese) [汪洋, 戴新刚 2005 物理学报 **54** 4961]
[20] Fan E G, Zhang H Q 1998 *Acta Phys. Sin.* **47** 353 (in Chinese) [范恩贵, 张鸿庆 1998 物理学报 **47** 353]
[21] Liu S D, Fu Z T, Liu S S, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达, 付遵涛, 刘式适, 赵强 2002 物理学报 **51** 718]
[22] Liu S S, Fu Z T, Liu S D, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1923 (in Chinese) [刘式适, 付遵涛, 刘式达, 赵强 2002 物理学报 **51** 1923]
[23] Zhang L H, Yan J, Chang F M 2003 *Marine Geol. Lett.* **19** 14 (in Chinese) [庄丽华, 阎军, 常凤鸣 2003 海洋地质动态 **19** 14]
[24] Patone A, Warn T 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1018

[25] Warn T, Brasnett B 1982 *J. Atmos. Sci.* **40** 28

[26] Da C J, Chou J F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2595 (in Chinese) [达朝究, 丑纪范 2008 物理学报 **57** 2595]

[27] Jeffrey A, Kawahara T 1982 *Asymptotic Methods in Nonlinear Waves Theory* (Melbourne: Pitman Publishing Inc.) pp256–266

Beta effect and slowly changing topography Rossby waves in a shear flow*

Song Jian¹⁾²⁾ Liu Quan-Sheng¹⁾ Yang Lian-Gui^{1)†}

1) (College of Mathematical Science, Inner Mongolia University, Hohhot 010021, China)

2) (College of Sciences, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot 010051, China)

(Received 21 March 2012; revised manuscript received 12 April 2012)

Abstract

In barotropic fluids, based on the quasi-geostrophic potential vorticity equation, an inhomogeneous mKdV-Burgers equation including slowly changing topography and an external source is derived by employing the perturbation method and stretching transforms of time and space. With the inspection of the evolution of the amplitude of Rossby waves, it is found that beta effect, topography effect, slowly changing topography and an external source are all the important factors, and that the solitary Rossby wave is induced thought the basic stream function has a shear flow. On the assumption that the nonlinear and topographic effects are in balance, an inhomogeneous mKdV-Burgers equation is derived, the results show that the topography and Rossby wave interact in the barotropic flows. The inhomogeneous mKdV-Burgers equation describing the evolution of the amplitude of solitary Rossby wave as the change of Rossby parameter $\beta(y)$ with latitude y , topographic forcing, slowly changing topography and the external source is obtained.

Keywords: inhomogeneous mKdV-Burgers equation, β effect, slowly changing topography, an external source

PACS: 05.45.Yv, 92.10.Ei, 92.70.Cp

* Project supported by the National Natural Science Foundation for Young Scholars of China (Grant No. 11202092) and the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant Nos. 2011MS0112, 2012MS0107).

† E-mail: lianguiyang@imu.edu.cn