

颗粒固体弹性势能的声波性质*

郑鹤鹏 蒋亦民[†] 彭政 符力平

(中南大学物理与电子学院, 长沙 410083)

(2012 年 1 月 27 日收到; 2012 年 4 月 16 日收到修改稿)

基于大量静止颗粒堆积而成的物体属于非线性弹性体的观点, 计算了其弹性势能的声速表达式 (考虑圆柱对称和沿主应力方向传播的平面波情形). 通过与已报道的一些实验数据的对比, 认为精密的声学方法能够测定势能中的所有材料参数, 因此是研究这类材料非线性弹性行为细节的一个重要观测手段, 但需要对样品的所有应力、密度和均匀程度进行全面仔细的监控.

关键词: 声速, 颗粒物质, 非线性弹性

PACS: 45.70.-n, 43.35.+d, 81.05.Rm

1 引言

大量无黏性颗粒构成的堆积物体 (如谷物、沙子等, 又称颗粒物质) 具有非线性、耗散、塑性变形、类固-液-气转换等一系列复杂的动力学行为, 是当前软凝聚态物理领域的一个重要研究对象^[1-3]. 虽然人们对这样的颗粒物质并不陌生, 它的物理基础却一直未被彻底认识和澄清. de Gennes^[1] 在 1999 年的一篇文章里曾提到现代人们对颗粒物质的认识水平就像百多年前对固体晶体的了解程度那样落后. 实际上这应该还是一个比较乐观的看法, 因为百多年前晶体的弹性力学和声波理论已经存在, 而描述颗粒物质宏观动力学和声波的理论方程, 至今仍在研究和争论中. 由于可能对诸如土建安全、地质灾害等许多工程领域的发展产生影响和促进, 有关颗粒物质的基础研究工作也引起了一些工程学者的关注^[3,4]. 目前颗粒物质的一些声波测量技术已经相当成熟, 报道了许多甚至包括复杂的表面波和带有神秘色彩的鸣沙现象在内的测量结果^[5-14], 但对系统全面的宏观声波理论仍未达成共识.

颗粒固体的声波行为一般有相干运动 (coher-

ent propagation) 和多重散射 (multiple scattering) 两部分^[5]. 前者属于长程关联形式的宏观动力学现象, 可用连续介质方程分析, 其波长和实验观测它们的探头尺寸都必须远大于颗粒粒径. 多重散射涉及颗粒邻近间距尺度上细观动力学行为, 通常用数值模拟方法分析计算 (例如离散元方法^[3]), 需要用直径为几个粒径以下的小探头观测. 本文将仅限于考虑宏观的相干波动运动, 主要考虑它们与近年来报道的颗粒固体流体动力学 (granular solid hydrodynamics, GSH) 理论方程的一些关系. 概括地讲, GSH 是将普适的能量、动量守恒原理和 Onsager 非平衡热力学应用于高密度的类固态颗粒物质后得到的理论 (详细可见文献^[3] 第一章). 原则上讲, 用这种称作“流体动力学”的方法可以建立任何材料的低频长波动力学方程, 例如牛顿流体动力学、液晶流体动力学、弹性力学等^[15]. 从这个角度看, GSH 应该是一个一般性的颗粒宏观理论, 能统一描述这类材料的包括相干声波在内的所有宏观性质^[16]. 对足够弱的声波扰动, 实验显示颗粒物质的平面声波传播速度 c 与它的密度 ρ 和应力 σ_{ij} 有关. 在 GSH 理论中这个关系将完全由一个弹性势能函数来确定和表征. 本文将计算该势能给出的沿着主应力方向传播的这些声速关系的解析公式.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10904175) 和湖南省研究生科研创新项目 (批准号: CX2010B103) 资助的课题.

[†] E-mail: jiangyimin@yahoo.cn

我们的目的主要有下面几点: 首先提供一个统一解释和拟合不同状态 (即密度和应力) 下测量的声速数据的公式; 然后利用它们总结出一条声学测定弹性势能中出现的参数值的具体方案; 并通过这些理论-实验的对照, 研判和检验该势能的合理性和适用条件、精准程度等. 从与文献报道的一些数据的讨论结果看, 理论的确能很好地描述包括剪切应力和中间主应力导致的横波简并劈裂在内的许多声速细节. 当然这还只是一个比较初步的结论. 目前的数据在样品密度、受力情况、声速模式等方面测控的都不尽全面, 需要有更加系统和精密的进一步实验工作后, 才能深入研究 GSH 与声学性质的关系. 另外作为复杂的非线性强耗散材料, 颗粒物质除上述最简单的、线性近似下的平面声波外, 还具有诸如高次谐波、波幅的耗散衰减、应力不均匀导致的波导效应等一系列复杂的非线性声学问题, 它们都可用 GSH 方程计算分析. 本文讨论的线性近似和用声速测定弹性参数值的方法等, 将是进一步研究这些复杂问题的基础.

2 颗粒固体的弹性势能

具体地讲, GSH 是一组由偏微分方程和代数关系构成的完备方程组, 其中含有一个热力学特征势函数和一系列的迁移系数公式, 分别表征颗粒材料的平衡态热力学性质和各种耗散迁移性质^[3]. 这些公式的具体形式和其中的参数值都与材料有关, 因此被称作材料关系, 具体表达式需要用合适的实验来论证和测量. 为避免来自迁移过程的干扰和影响, 热力学势函数中弹性势能部分的测定应该尽量利用可忽略耗散的准静态过程来完成. 但值得注意的是, 颗粒固体属于迁移过程种类多、耗散很容易被激发的材料, 一些常规的力学测量, 如应力-应变测量, 往往都伴随有不可忽略的迁移现象 (如塑性等), 很难直接用于弹性势能函数的实验研究. 对这类具有强耗散行为的复杂固体, 力学扰动极小的声学测量在避免迁移过程的干扰上有着独特的优越性. 另外由于非线性, 颗粒固体的不同声波模式的性质会随传播方向、应力和密度的变化而变化, 测量数据因此特别丰富, 能够从不同角度来全面细致地研究和测定弹性势的细节行为.

本文将限于讨论圆柱对称、密度和应力均匀

样品中传播方向平行于和垂直于对称轴的波速性质, 并认为声波足够地弱, 可忽略耗散对波速的影响. 这时可略去 GSH 中的各种复杂迁移过程, 理论简化为非线性弹性体的动力学方程, 在线性扰动近似下的声波速度 c_i 将完全被一个弹性势能 w 随弹性应变张量 $\mathbf{u}_{ij}$ 变化的函数 $w(\mathbf{u}_{ij})$ 所确定. 近年的一些研究表明^[3,17-19], 对无黏性颗粒固体, 可初步地将这个势能函数取为

$$w = B\Delta^a \left(\frac{2}{5}\Delta^2 + \frac{u_s^2}{\xi} - \xi_1 \frac{u_{\text{III}}^3}{\Delta} \right), \quad (1)$$

这里用记号 Δ 表示弹性应变张量的迹取负: $\Delta \equiv -u_{ll}$ (脚标 i, j, k, l 等表示直角坐标 x, y, z , 文中将采用重复脚标自动求和的约定), u_s^2, u_{III}^3 分别是偏应变 $\mathbf{u}_{ij}^* \equiv \mathbf{u}_{ij} - u_{ll}\delta_{ij}/3$ (即应变的无迹部分) 的平方和立方, 又称第二和第三应变不变量: $u_s^2 \equiv \mathbf{u}_{ij}^* \mathbf{u}_{ij}^*, u_{\text{III}}^3 \equiv \mathbf{u}_{ij}^* \mathbf{u}_{jk}^* \mathbf{u}_{ki}^*$, 字母 a, ξ, ξ_1, B 是这个势能模型的参数, 一般与材料有关. 由于疏密程度不同的颗粒物质的软硬情况不同, 参数 B 将是密度的函数, 其他三个参数可初步认为与密度无关. (1) 式是在赫兹接触理论提示下, 进一步考虑关于应变有齐次幂律关系引入剪切后得到的模型, 其适用性取决于与实验测量的符合情况. 式中第一项反映体积变形对颗粒系统弹性势能的影响, 第二项和第三项描述剪切的影响. 当指数 a 取 0.5 时, 势能与应变之间有赫兹接触给出的 2.5 次幂律关系. 另外值得指出的是, (1) 式的 $\xi_1 = 0$ 情况最早来自文献^[17], 与第三不变量有关的 ξ_1 修正项最早由文献^[18]的作者 Humrickhouse 建议, 但有趣的是他只注意到了 $\xi_1 < 0$ 的情况, 发现它给出的一些修正不符合颗粒物质的某些力学性质, 并由此不倾向支持其合理性. 可是如果仔细研究 $\xi_1 > 0$ 的情况^[19], 不难发现该修正项除了能改善 Humrickhouse 在文献^[18]中提到的那些问题外, 还能解释三轴力学装置观察到的轴向压缩和拉伸屈服线不对称现象, 以及 Lade-Duncan 提出的应力屈服面形状等有关颗粒物质弹性与屈服的细节特性, 显然是一个合理正确的修正. 本文将系统总结势能 (1) 式给出的一些基本声速特性, 特别是与第三不变量有关的效应, 即参数 ξ_1 值的声波测量途径, 以期方便今后的实验研判. 注意除波速外, 声波在颗粒物质中的振幅衰减 (即吸收) 也是值得关注的研究课题之一, 但由于与迁移系数等复杂因素有关, 不在本文内容的考虑范围.

3 颗粒固体的平面弹性波波速公式

根据弹性理论^[20], 作为线性扰动近似下的弹性平面波的波速 c 与弹性势能函数 $w(\mathbf{u}_{ij})$ 之间有下列方程给出的关系. 首先将弹性势能对应变微分, 得应力

$$\sigma_{ij} = -\frac{\partial w}{\partial u_{ij}}, \quad (2)$$

将应力对应变微分, 得四阶刚度张量

$$M_{ijkl} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial u_{lk}} = -\frac{\partial^2 w}{\partial u_{ij} \partial u_{lk}}. \quad (3)$$

再按下式定义 3×3 声波张量

$$\mathbf{S}_{ij} = -\frac{\mathbf{k}_m \mathbf{k}_n}{2\rho k^2} (M_{imnj} + M_{ijnm}), \quad (4)$$

它的本征值的平方根就是波矢量为 $\mathbf{k}_m$ 的弹性波动模式的相速度, 而本征矢给出相应模式的极化方向. 将颗粒物质的势能模型 (1) 代入 (2), (3), (4) 式, 可得到应力和声波张量随应变变化的表达式, 即

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(u_{mn}) \text{ 和 } \mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}(u_{mn}). \quad (5)$$

如果消去其中的应变, 可将声波张量写成应力的函数 $\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{S}_{ij}(\sigma_{mn})$, 求它的本征值即得声速随应力和密度变化的函数: $c = c(\rho, \sigma_{mn})$. 对每一个波矢量有三个平面波动模式, 波速一般不等, 除非有简并发生. 注意对势能与应变之间满足二次多项式关

系的所谓线性弹性材料, 刚度张量 M_{ijkl} 是常数, 声速因此与应力无关. 势能 (1) 式不是应变的二次多项式, 所描述的颗粒物质的弹性是非线性的, 声速将与应力有关.

如果考虑圆柱对称情形, 主应力方向沿着对称轴, 在图 1 插图所示的直角坐标系下, 应变张量将取对角形式, 有 $i \neq j$ 时弹性应变 $u_{ij} = 0$, 并且 $u_{xx} = u_{yy}$. 另外应力 (5) 式也是对角的, 即当 $i \neq j$ 时 $\sigma_{ij} = 0$. 将 (1) 式代入 (2) 式可得该情形的主应力为

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{B\Delta^{a+1}}{45} \left[10(1-a)\xi_1 u^3 + 15 \left(\frac{2a}{\xi} - \xi_1 \right) u^2 + \frac{30}{\xi} u + 18a + 36 \right], \quad (6)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{2B\Delta^{a+1}}{45} \left[5(1-a)\xi_1 u^3 + 15 \left(\frac{a}{\xi} + \xi_1 \right) u^2 - \frac{30}{\xi} u + 9a + 18 \right], \quad (7)$$

其中 $u \equiv (u_{zz} - u_{xx})/\Delta$. 径向应力 (6) 式又称围压, 轴向应力 (7) 式又称轴压. 除围压和轴压外, 人们还常用压强 $P \equiv \sigma_{kk}/3$, 即

$$P = \frac{2B\Delta^{a+1}}{45} \left[5(1-a)\xi_1 u^3 + \frac{15a}{\xi} u^2 + 9a + 18 \right] \quad (8)$$

和所谓的偏应力 $q \equiv \sigma_{zz} - \sigma_{xx}$, 或它与围压的比值

$$\frac{q}{\sigma_{xx}} = \frac{45u(\xi_1 u - 2\xi^{-1})}{10(1-a)\xi_1 u^3 + 15(2a\xi^{-1} - \xi_1)u^2 + 30\xi^{-1}u + 18a + 36} \quad (9)$$

来分别描述样品的受压和剪切程度.

现在考虑上述圆柱对称样品中的声波. 如果波沿着对称轴方向传播, 有波矢量的 x, y 分量 $k_x = k_y = 0$, 轴向分量 $k_z = k$. 对这种情形, 直接计算可得声波张量 (4) 式是对角的 (即 $S_{xy} = S_{xz} = S_{yz} = 0$), 并且

$$S_{xx}^{\text{轴向}} = S_{yy}^{\text{轴向}} = \frac{B\Delta^a}{2\rho} \left(\frac{2}{\xi} - \xi_1 u \right), \quad (10)$$

$$S_{zz}^{\text{轴向}} = \frac{2B\Delta^a}{45\rho} \left[5\xi_1(3a - a^2 - 2)u^3 + 15(a - 1) \times \left(\frac{a}{\xi} + 2\xi_1 \right) u^2 - 30 \left(\xi_1 + \frac{2a}{\xi} \right) u + 9a^2 + 27a + \frac{30}{\xi} + 18 \right], \quad (11)$$

上脚标表示声波沿着轴向传播. 因此该情形有一个纵波和一个二度简并的横波, 声速分别

是 $c_L^{\text{轴向}} = \sqrt{S_{zz}^{\text{轴向}}}$ 和 $c_T^{\text{轴向}} = \sqrt{S_{xx}^{\text{轴向}}}$. 对波矢量沿着半径方向 (与 x 轴平行) 传播的声波, 有 $k_x = k$, $k_y = k_z = 0$, 相应的声波张量也是对角的, 并且

$$S_{xx}^{\text{径向}} = \frac{2B\Delta^a}{45\rho} \left[5\xi_1(3a - a^2 - 2)u^3 + 15(a - 1) \times \left(\frac{a}{\xi} - \xi_1 \right) u^2 + 15 \left(\xi_1 + \frac{2a}{\xi} \right) u + 9a^2 + 27a + \frac{30}{\xi} + 18 \right], \quad (12)$$

$$S_{yy}^{\text{径向}} = \frac{B\Delta^a}{\rho} \left(\frac{1}{\xi} + \xi_1 u \right), \quad (13)$$

$$S_{zz}^{\text{径向}} = \frac{B\Delta^a}{2\rho} \left(\frac{2}{\xi} - \xi_1 u \right), \quad (14)$$

上脚标表示声波沿着径向 x 坐标轴传播. 由此得纵波速度 $c_L^{\text{径向}} = \sqrt{S_{xx}^{\text{径向}}}$, 以及极化方向与对称轴垂直和平行的两个横波速度 $c_{Ty}^{\text{径向}} = \sqrt{S_{yy}^{\text{径向}}}$

和 $c_{Tz}^{\text{径向}} = \sqrt{S_{zz}^{\text{径向}}}$. 注意当 $\xi_1 = 0$ 时, 由 (13), (14) 式给出的两个径向横波是简并的. 但如果 $\xi_1 \neq 0$, 剪切力会导致这两个横波波速不等, 也就是说这个横波简并将被劈裂. 另外如果 $u = 0$ 没有剪切力, 轴向和径向之间没有区别, 有波速 $c_L^{\text{轴向}} = c_L^{\text{径向}} = c_{L0}$ 和 $c_T^{\text{轴向}} = c_T^{\text{径向}} = c_T^{\text{径向}} = c_{T0}$ (下脚标 0 表示没有剪切).

弹性势能 (1) 式给出的声速公式 (6)—(11) 式具有下面一些性质. 首先当没有剪切 $u = 0$, 即样品应力状态呈各向同性时, 横波波速为 $c_{T0} = \sqrt{B\Delta^a/\xi\rho}$. 用 (8) 式将其写成压强 P 的函数, 有

$$c_{T0} = c_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{a}{2a+2}}, \quad (15)$$

其中 $P_0 = 0.1013 \text{ MPa}$ 是标准大气压, 符号

$$c_0 = \sqrt{\frac{B}{\rho\xi} \left[\frac{5P_0}{2(a+2)B} \right]^{\frac{a}{2a+2}}} \quad (16)$$

是密度为 ρ 的均匀样品在标准大气压下的横波声速. 当 $a = 1/2$ 时, 有 $c_{T0} \sim P^{1/6}$, 对应于赫兹接触模型情况的声速-压强关系 [17].

没有剪切时的纵波波速与横波波速 (15) 式相差一个比例因子 g_0 , 即

$$c_{L0} = g_0 c_{T0}, \quad (17)$$

$$g_0 = \sqrt{\frac{(6a^2 + 18a + 12)\xi + 20}{15}}, \quad (18)$$

因子 g_0 只是材料参数 a 和 ξ 的函数, 与 ξ_1 和应力无关, 意味着没有剪切力时的横波-纵波波速比值 $c_{T0}/c_{L0} = g_0^{-1}$ 是个材料特性, 并且在 0 到 $\sqrt{3/4}$ 范围取值, 见图 1. 值得指出的是, 这个取值范围远比一些细观理论计算所给出的大, 例如文献 [21] 报道的有效介质近似 (effective medium approximation, EMA) 模型. 对泊松比为 ν 的球形颗粒, EMA 理论分析给出的这个波速比值为 $c_{T0}/c_{L0} = \sqrt{(3\nu - 4)/(5\nu - 8)}$. 由于泊松比 ν 的取值范围是从 0 到 0.5, 有 EMA 的 $c_{T0}/c_{L0} = 0.674\text{—}0.707$, 即图 1 阴影部分所示的很小范围. 这个分歧可能是因为 EMA 考虑的仅仅是等半径的球形颗粒情形, 而势能 (1) 式对颗粒的形状和大小没有限制, 因此允许 c_{T0}/c_{L0} 有大的取值范围. 注意一些实验, 例如文献 [6] 观测到的这个波速比值是 $c_{T0}/c_{L0} = 0.54\text{—}0.6$ (体积分数 0.60—0.64), 明显低于 EMA 的预期范围, 但没有超出势

能 (1) 式给出的范围.

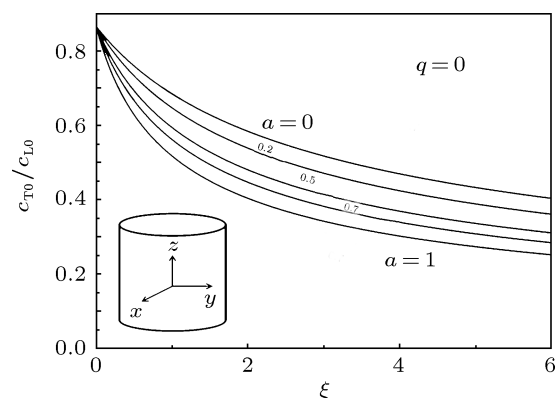


图 1 各项同性压缩下, 不同指数 a 时的弹性势能 (1) 式给出的横波-纵波波速比值随参数 ξ 的变化, 插图是圆柱对称情形坐标系的取法

图 1 可以用来测量参数 ξ 的值. 除可以用横波和纵波的速度比测定外, 参数 ξ 还与颗粒材料的屈服性质有密切关系, 例如对库仑屈服角约为 28° 的天然干燥砂砾可考虑取 $\xi \sim 1$. 当 $\xi_1 = 0$ 时, 势能模型 (1) 式的屈服条件是 $\sigma_s \leq \sqrt{2/\xi} P$ [17], 其中 $\sigma_s^2 \equiv \sigma_{ij}^* \sigma_{ij}^*$, 偏应力 $\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij} - \sigma_u \delta_{ij}/3$. 这意味着在给定的压强 P 下, ξ 越大, 所对应的颗粒材料能承受的静态剪切力越小. 值得注意的是 ξ 显然是纯宏观参数, 它与材料的细观情况如单个颗粒的形状和表面光滑度、摩擦行为等, 不一定有确切的定量关系.

当有剪切力, 即 $u \neq 0$ 时, 声速一般与传播方向有关. 如果波矢量与 z 轴平行, 由 (10) 式可得

$$c_T^{\text{轴向}} = \sqrt{\frac{B\Delta^a}{\rho\xi}} \sqrt{1 - \frac{\xi\xi_1}{2}u}. \quad (19)$$

利用 (8) 和 (16) 式, 可以证明:

$$\sqrt{\frac{B\Delta^a}{\rho\xi}} = c_0 \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{a}{2a+2}} g_1, \quad (20)$$

其中 c_0 由 (16) 式给出, 因子

$$g_1 = \left[\frac{9(a+2)}{5(1-a)\xi_1 u^3 + 15a\xi^{-1}u^2 + 9a + 18} \right]^{\frac{a}{2a+2}}. \quad (21)$$

将 (20) 式代入 (19) 式, 有

$$c_T^{\text{轴向}} = c_0 g_T^{\text{轴向}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{a/(2a+2)}, \quad (22)$$

其中

$$g_{\text{T}}^{\text{轴向}} = g_1 \sqrt{1 - \frac{\xi \xi_1}{2} u} \quad (23)$$

是只与样品剪切力程度有关的因子. 利用 (9) 式可消去剪切因子 (23) 式中的 u , 将其转换成应力比 q/σ_{xx} 的函数. (22) 式意味着我们能对声速的压强效应和剪切效应进行因式分解, 这显然是因为势能 (1) 式是应变的齐次函数的缘故. 另外剪切因子 (23) 式与 (1) 式中的第三不变量项有关, 表示原则上可通过测量声速的剪切效应获得参数 ξ_1 的值.

类似地, 可得沿着轴向传播的纵声波的波速为

$$c_{\text{L}}^{\text{轴向}} = c_0 g_0 g_{\text{L}}^{\text{轴向}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{a/(2a+2)}, \quad (24)$$

和沿着径向传播的三个波速:

$$c_{\text{T}y, \text{T}z}^{\text{径向}} = c_0 g_{\text{T}y, \text{T}z}^{\text{径向}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{a/(2a+2)}, \quad (25)$$

$$c_{\text{L}}^{\text{径向}} = c_0 g_0 g_{\text{L}}^{\text{径向}} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{a/(2a+2)}, \quad (26)$$

其中的剪切因子分别是

$$g_{\text{L}}^{\text{轴向}} = g_1 \sqrt{1 + \frac{5\xi_1(3a - a^2 - 2)u^3 + 15(a-1)(a\xi^{-1} + 2\xi_1)u^2 - 30(\xi_1 + 2a\xi^{-1})u}{9a^2 + 27a + 30\xi^{-1} + 18}}, \quad (27)$$

$$g_{\text{L}}^{\text{径向}} = g_1 \sqrt{1 + \frac{5\xi_1(3a - a^2 - 2)u^3 + 15(a-1)(a\xi^{-1} - \xi_1)u^2 + 15(\xi_1 + 2a\xi^{-1})u}{9a^2 + 27a + 30\xi^{-1} + 18}}, \quad (28)$$

$$g_{\text{T}y}^{\text{径向}} = g_1 \sqrt{1 + \xi \xi_1 u}, \quad (29)$$

$$g_{\text{T}z}^{\text{径向}} = g_1 \sqrt{1 - \frac{\xi \xi_1}{2} u} = g_{\text{T}}^{\text{轴向}}, \quad (30)$$

这里的 g_0 由 (18) 式, g_1 由 (21) 式给出. 注意所有的剪切因子在 $u = 0$ 时都为 1. 另外纵波的 (24), (26) 式比横波的 (23), (25) 式多出一个比例因子 g_0 , 并且轴向传播的横波与径向传播轴向极化的横波有相同的速度.

上面的计算表明, 均匀圆柱对称样品沿着轴向

和径向传播的声速有 4 个不同的剪切因子. 图 2 是 $a = 0.5$, $\xi = 1$ 和三个不同 ξ_1 值时它们随剪切应力比 q/σ_{xx} 变化的曲线. 注意由于屈服, q/σ_{xx} 只能在一定范围取值 (大约为 -1 到 2.5 之间, 确切范围与势能的参数值有关). 由于这些剪切效应多少与 ξ_1 有关, 我们原则上可以用从声速随剪切力变化

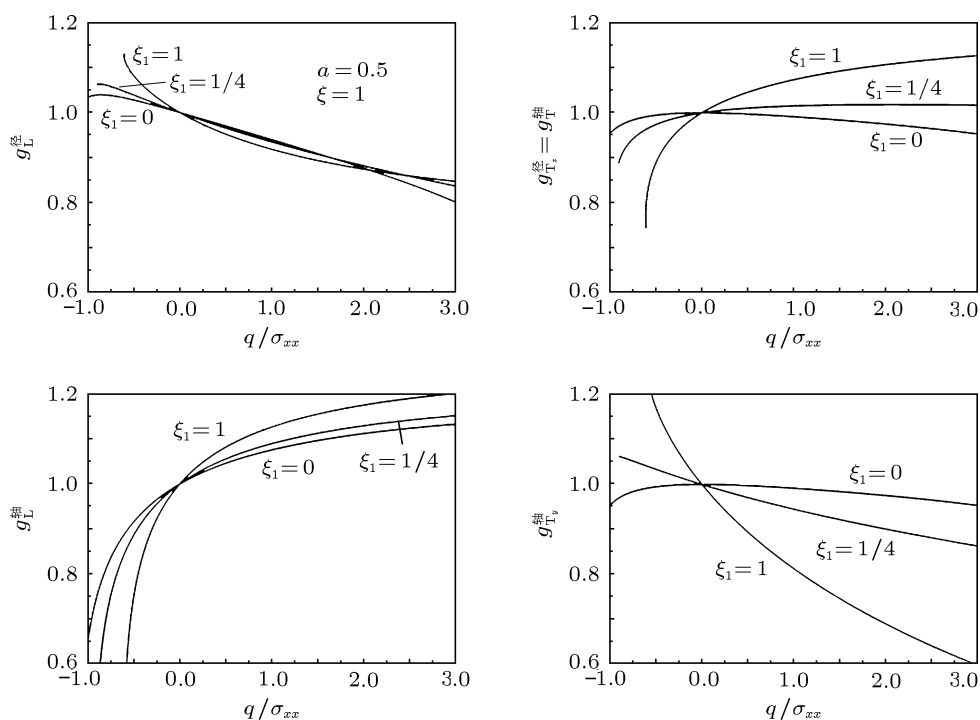


图 2 剪切因子随应力比的变化

的实验数据来分析它的值. 另外尽管这里只考虑了圆柱对称情形, 对一般的非圆柱对称情形也可以类似地计算出沿着主应力方向传播的声速公式.

4 讨论

从上节的计算可得, 如果弹性势能 (1) 式中的参数 a, ξ, ξ_1 与密度无关, 它给出的声速随密度 ρ , 剪切程度 q/σ_{xx} 、压强 P 的变化可因式分解为 $c = c_0 g(P/P_0)^{a/(2a+2)}$ 的形式, 其中 c_0 只是 ρ 的函数, g 只是 q/σ_{xx} 的函数. 利用这个性质, 我们原则上可按照下列步骤来获取势能 (1) 式中的参数值. 首先测量不同密度时, 各向同性压力下 (即没有剪切) 的横波和纵波声速随压强 P 的变化, 从它们在对数坐标里给出的直线得到指数 a 后, 再利用横波和纵波声速比和 (17), (18) 式确定 ξ . 将得到的 a, ξ 和标准大气压下测量的不同密度的声速值代入 (16) 式, 可得弹性模量参数随密度的变化 $B(\rho)$. 最后再利用剪切效应来确定参数 ξ_1 .

由于对一种给定的颗粒样品目前还未有上述步骤的系统测量, 我们只能利用一些数据不全面的文献报道来简单讨论本文的理论声速公式与实验的对照情况. 图 3 是文献 [13, 14] 报道的各向同性压缩时的声波波速, 都很好满足 (15) 和 (17) 式所示的幂率关系, 并且横 - 纵波速比值也基本与压强无关 (见插图). 拟合显示幂率在 0.23—0.24 之间, 波速比是 0.65—0.6, 大气压下的波速 c_0 约 240—260 m/s, 对应的 GSH 弹性势能 (1) 式的参数大约为 $a \sim 0.89$, $\xi \sim 0.56$, 和 $B \sim 15.5$ GPa (取密度 $\rho \sim 1500$ kg/m³). 注意这个 a 值明显偏离了赫兹点接触模型的 0.5, 可能是压强很大 (几十到百多兆帕), 颗粒之间接触面过大的缘故. 球形颗粒物质是否遵守赫兹点接触模型是一个长期争论的问题 [22], 好像至今仍未有确切答案. 有声波实验工作显示 [23, 24], 如果压强小于 10 MPa, 对一维颗粒链和二维颗粒系统, 赫兹模型的确成立, 但如果二维系统的围压力特别小时会出现偏离, 作者猜测是无序导致的. 弹性势能 (1) 式显然可以描述偏离赫兹 (即 a 偏离 0.5) 的情况, 但必须注意实验在这个问题上还存在分歧. 另外文献 [14] 虽然也报道了一些有剪切力时的声速数据, 但由于不清楚实验时样品的应力情况 (如径向与轴向的应力比等), 难以用来定量考察剪切因子和参数 ξ_1 的情况.

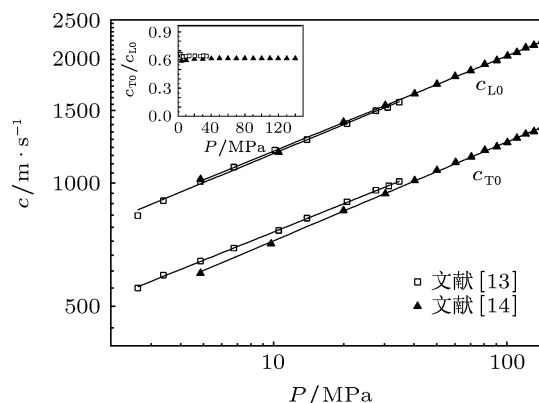


图 3 文献 [13, 14] 测量的声速和声速比 (插图) 随压强的变化 (直线是拟合结果, 利用 (15)—(18) 式可得与它们对应的弹性势能参数 a, ξ, B , 详见正文)

文献 [6] 系统测量了沿着轴向和径向传播的声速, 同时还给出了样品密度、轴向和径向应力值, 因此比较适合用来考察剪切因子和参数 ξ_1 的情况. 但遗憾的是没有各向同性情况时声速随压强变化的数据, 我们无法预先判断出样品的 a 值. 作为一个简单讨论, 我们假设有赫兹接触模型 $a = 0.5$. 利用测量的波速及其比值 $c_{T0}/c_{L0} \sim 0.6$, 可估算得到 $\xi \sim 1$, $B \sim 7$ GPa. 这时, 参数 $\xi_1 \sim 0.25$ 给出的剪切效应与实验数据符合很好, 特别是随 q/σ_{xx} 的变化趋势和径向横波的劈裂都与实验符合, 见图 4. 这个结果与文献 [19] 给出的力学分析, 均支持颗粒固体的弹性与第三应变不变量 u_{III} 有一定的关系, 并且 $\xi_1 > 0$. 注意图 4 的应力水平只有零点几兆帕, 远低于图 3 的几十到百多兆帕 (声速因此相应地慢了许多), 考虑赫兹接触应该还是比较合理的. 另外文献 [16] 也曾用 $\xi = 3/4$, $\xi_1 = 0$ 的弹性能 (1) 式分析了图 4 的实验数据. 我们这里的结果主要是: 如果计入第三不变量的影响, 弹性能 (1) 式与这些声速测量的符合程度能得到进一步的改善.

尽管本文和文献 [8—11, 16] 等用 (1) 式分析声波实验都给出了相当良好的结果, 许多问题仍有待更加全面和精准的实验来进一步澄清. 例如除文献 [8—10] 的表面波分析外, 其他理论计算均假设了样品的密度和应力均匀, 而实际实验中它们多少会有空间不均匀性出现, 其对声速的影响情况目前还无法知晓. 不少实验没有完整地监测样品的密度或所受的应力, 从而给理论分析带来了相应的不确定性. 严格判定模型 (1) 式给出的声速公式是否合理, 显然需要在实验上精确地控制和测量密度和所有应力分量. 另外偏离圆柱对称

或主应力方向传播的声速也是一件值得测量研究的事情. 原则上讲耗散多少也会影响声速 (类似电导会影响介质的电磁波速, 见文献 [11]), 其程度还有待研究. 除声速外, 弹性能 (1) 式还必须描述颗粒物质的其他静力学行为, 诸如静力屈服条件以及

近年来岩土力学领域里特别关注的极小应力 - 应变增量测试, 等等. 仔细考察这些力学和声学实验结果能否统一合理地用 (1) 式 (或辅助以适当的修正) 来表征, 将是颗粒静力学研究领域的一个重要课题.

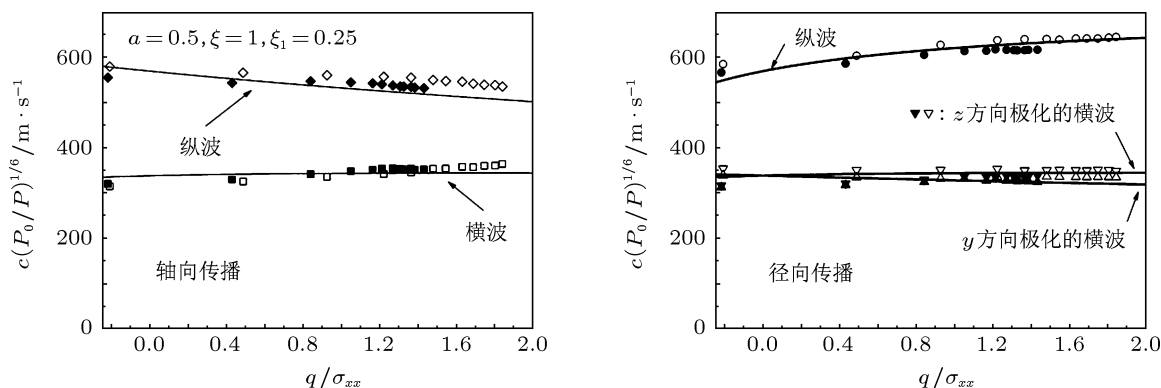


图 4 理论给出的剪切效应 (实线) 与文献 [6] 的测量值 (符号) 对照 (实心符号是经过松化处理的低密度样品, 空心符号是落雨方式制备的高密度样品)

最后值得提到的是, GSH 认为除密度和应力外不再有其他状态变量, 声速因此只是它们的函数. 近十多年来, 不少基于细观的研究工作 (模拟计算或 EMA) 倾向认为声速还与配位数 Z 有关. 例如没有剪切力时, EMA 给出的球形颗粒物质的横波声速为 [14]

$$c_{T0}^{\text{EMA}} = \sqrt{\frac{C_n}{20\pi\rho}} (\phi Z)^{1/3} \left(\frac{6\pi P}{C_n} \right)^{1/6}, \quad (31)$$

其中 ϕ 是体积分数, C_n 是颗粒的弹性模量. 这个细观结论与 GSH 的主要概念的分歧是: 配位数是否是独立状态变量. 如果 Z 是独立的状态量, (31) 式意味着可以将一种颗粒材料制备成两个压强和密度相同的均匀样品, 但它们的声速不同 (因为配位数不同). 由于未见可靠的声速实验证据支持这个观点, 其是否正确目前还无法肯定. 另外有学者认为配位数 Z 和体积分数 ϕ 之间存在一定的关系, 例如 $\phi = Z/(Z + 2\sqrt{3})$ [25,26]. 如果是这样, 我们可将 (31) 式看作指数 a 取赫兹接触值的 (15) 式, 并且 c_0 与密度的变化关系为

$$c_0^{\text{EMA}} \sim \left(\frac{\phi^{1/2}}{1-\phi} \right)^{1/3}, \quad (32)$$

这时 GSH 与 EMA 之间将没有概念分歧, 而 (32) 式可看作是从 Hertz-Mindlin 颗粒接触力出发用平均场近似计算的 c_0 表达式. 但它们在定量上还是有差别的. 颗粒固体的密度在最松和最密无规堆积

分数 ϕ_{lp} 和 ϕ_{cp} 之间, 典型值为 0.55 和 0.65. 在这个区间, (32) 式给出的基本上是一个线性变化关系, 见图 5 的虚线. 与之对照, 由 GSH 的 (16) 式有

$$c_0 \sim B^{1/3} / \phi^{1/2}. \quad (33)$$

如果考虑下面的幂率形式 $B(\rho)$ 模型 (详见文献 [3] 第一章)

$$B \sim \left(\frac{\phi - \phi_1}{\phi_{cp} - \phi} \right)^b, \quad (34a)$$

$$\phi_1 = \frac{6\phi_{lp} - (2b + 3)\phi_{cp}}{3 - 2b}, \quad (34b)$$

可得图 5 实线所示的密度效应曲线. 它们与 EMA 的主要差别是 GSH 模型 (34) 式在接近最密无规堆

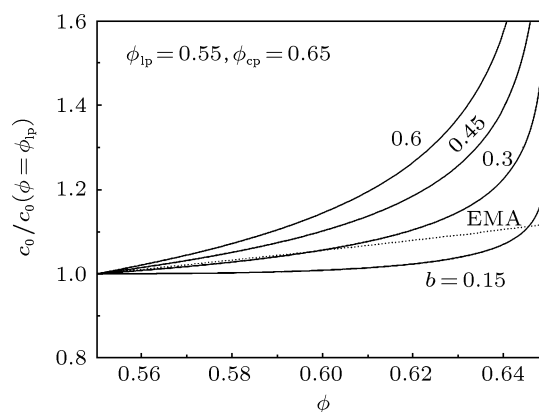


图 5 EMA ((32) 式, 虚线) 和 GSH ((33), (34) 式, 实线) 给出的声速密度效应对照

积时会急剧增大. 所有这些与密度或配位数有关的问题目前都尚未解决, 显然值得在严密监控样品密度和应力的前提下, 用精密声速实验来加以澄清.

5 结 论

对圆柱对称、沿着主应力方向 (即平行和垂直对称轴方向) 传播的平面声波, 本文给出了颗粒固体弹性势能 (1) 式的声速表达式. 它们能很好地符

合目前报道的各种声速实验特性, 可用于统一处理声速测量数据, 进而获得势能 (1) 式中的材料参数值. 特别是利用文中建议的测量步骤, 在样品的密度和应力得到全面监测的前提下, 我们可用测量声速的实验手段研究与第三应力不变量有关的非线性弹性行为细节. 这些结果将有助于今后进一步研究考察声学数据与力学增量测试和屈服现象的关系、澄清密度与配位数之间是否存在联系等一系列有关颗粒物质宏观静力学的基本问题.

-
- [1] de Gennes P G 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** S374
 - [2] Lu K Q, Liu J X 2004 *Physics* **33** 629 (in Chinese) [陆坤权, 刘寄星 2004 物理 **33** 629]
 - [3] Sun Q C, Hou M Y, Jin F 2011 *Physics and Mechanics of Granular Materials* (Beijing: Sciencs Press) (in Chinese) [孙其诚, 厚美瑛, 金峰 2011 颗粒物质物理与力学 (北京: 科学出版社)]
 - [4] Gudehus G 2010 *Physical Soil Mechanics* (Berlin: Springer)
 - [5] Jia X, Caroli C, Velicky B 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 1863
 - [6] Khidas Y, Jia X P 2010 *Phys. Rev. E* **81** 021303
 - [7] Jia X P, Laurent J, Khidas Y, Langlois V 2009 *Chin. Sci. Bull.* **54** 4327
 - [8] Bonneau L, Andreotti B, Clement E 2007 *Phys. Rev. E* **75** 016602
 - [9] Bonneau L, Andreotti B, Clement E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 118001
 - [10] Andreotti B, Bonneau L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 238001
 - [11] Zhang Q, Hou M, Jiang Y M, Liu M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 031306
 - [12] Zhang Q, Li Y C, Liu R, Jiang Y M, Hou M Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234501 (in Chinese) [张琪, 李寅闾, 刘锐, 蒋亦民, 厚美瑛 2012 物理学报 **61** 234501]
 - [13] Domenico S N 1977 *Geophysics* **42** 1339
 - [14] Makse H A, Gland N, Johnson D L, Schwartz L 2004 *Phys. Rev. E* **70** 061302
 - [15] Martin P C, Parodi O, Pershan P S 1972 *Phys. Rev. A* **6** 2401
 - [16] Mayer M, Liu M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 042301
 - [17] Jiang Y M, Liu M 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 144301
 - [18] Humrickhouse P W 2009 in: Nakagawa M, Luding S ed. *Powders and Grains* (Melville New York: American Institute of Physics) pp1104–1107
 - [19] Jiang Y M, Zheng H P, Peng Z, Fu L P, Song S X, Sun Q C, Mayer M, Liu M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 051304
 - [20] Landau L D, Lifshitz E M 1986 *Theory of Elasticity* (Oxford: Pergamon Press)
 - [21] Velicky B, Caroli C 2002 *Phys. Rev. E* **65** 021307
 - [22] Goddard 1990 *Proc. R. Soc. London A* **430** 105
 - [23] Coste C, Gilles B 1999 *Eur. Phys. J. B* **7** 155
 - [24] Gilles B, Coste C 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 174302
 - [25] Rothenburg L, Kru N P 2004 *Int. J. Solids. Struct.* **41** 5763
 - [26] Song C, Wang P, Makse H A 2008 *Nature* **453** 629

Properties of sound waves in granular matter analyzed by an elastic potential model*

Zheng He-Peng Jiang Yi-Min[†] Peng Zheng Fu Li-Ping

(School of Physics and Electronics, Central South University, Changsha 410083, China)

(Received 27 January 2012; revised manuscript received 16 April 2012)

Abstract

According to the point of view that static dense granular matter is a nonlinear elastic body, we derive an analytic sound speed expression given by its elastic potential, for the case of samples with cylindrical symmetry and sound waves propagating in the directions along and perpendicular to the symmetry axis. By a detailed comparison of the expressions with experiments reported in the literature, we conclude that the acoustic method can determine all material parameters appearing in the elastic potential accurately, which provides us with an important way of studying detailed nonlinear elasticity behaviors of granular materials, if stresses, density, and their uniformity of samples are thoroughly controlled and measured.

Keywords: sound velocity, granular matter, nonlinear elasticity

PACS: 45.70.-n, 43.35.+d, 81.05.Rm

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10904175), and the Postgraduate Innovative Project of Hunan Province, China (Grant No. CX2010B103).

[†] E-mail: jiangyimin@yahoo.cn