

构造 Birkhoff 函数 (组) 的待定张量法*

崔金超¹⁾ 宋端³⁾ 郭永新^{1)2)†}

1) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

3) (辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

(2012 年 4 月 25 日收到; 2012 年 6 月 16 日收到修改稿)

研究力学系统 Birkhoff 函数 (组) 的构造方法. 基于自伴随条件和线性偏微分方程组的可积性条件给出构造 Birkhoff 函数 (组) 的待定张量法. 举例说明结果的应用.

关键词: Birkhoff 力学, 自伴随条件, Birkhoff 函数 (组), 待定张量法

PACS: 45.05.+x, 02.30.Zz, 45.10.-b

1 引言

Birkhoff 力学以 Pfaff-Birkhoff 变分原理和 Birkhoff 方程为基础^[1,2], 经过近 40 年的发展取得了一系列研究成果. 主要包括 Birkhoff 函数 (组) 的构造方法^[2-7]、Birkhoff 系统的对称性与守恒量问题^[8-14]、Birkhoff 系统的几何理论^[5-19]、Birkhoff 系统的数值计算方法^[20,21]以及广义 Birkhoff 系统^[22-25]等方面的研究.

作为 Hamilton 系统的自然推广, Birkhoff 系统是更为一般的动力学系统. 它既适用于保守系统也适用于非保守系统. 在 Lagrange 体系和 Hamilton 体系, 非保守力破坏了完整系统运动微分方程的自伴随性以及系统的辛结构和泊松结构, 而在 Birkhoff 动力学体系, 系统的运动微分方程可以表现为自伴随形式, 非保守力只改变辛结构的简单性, 使之成为一般辛结构^[4,5]. 可以看出, 将问题纳入到 Birkhoff 力学框架来考虑, 对于研究系统的解析性和代数、几何结构之间的关系有许多方便之处. 因此, 考虑如何将给定系统 Birkhoff 化成为一个重要问题. 解决这一问题的关键在于寻求适当的方法来构造 Birkhoff 函数 (组). 目前已有三种普适的构

造方法能将给定系统的运动微分方程化为 Birkhoff 方程的形式, 分别是 Hojman 方法^[2]、Santilli 第一方法^[3]和 Santilli 第二方法^[4]. 但在实际应用中, 三种方法均会遇到技术性困难: Hojman 方法的困难在于要求出系统的全部第一积分; Santilli 第一方法的困难在于对 Cauchy-Kovalevski 方程组的求解; Santilli 第二方法的困难在于要先将给定系统自伴随化. 因而, 研究如何简化 Birkhoff 函数 (组) 的构造方法仍是一个重要问题. 为此, 本文提出待定张量法. 该方法不仅可以用来构造 $2n$ 维动力学空间中一般 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数 (组), 而且还适用于 n 维动力学空间中广义 Birkhoff 系统的广义 Birkhoff 函数 (组) 的构造.

2 Birkhoff 方程及其自伴随条件

一般形式的 Birkhoff 方程如下^[2]:

$$\left(\frac{\partial R_\nu(t, a)}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial a^\nu} \right) \dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right) = 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n). \quad (1)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002, 11172120) 资助的课题.

† E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

其中 a^μ 为变量, t 为时间, B 为 Birkhoff 函数, R_μ 为 Birkhoff 函数组. 式中对重复指标求和 (下同).

在方程 (1) 中, 如果函数 R_μ 不显含时间 t , 则 Birkhoff 方程称为半自治的, 如果 B 和 R_μ 都不显含时间 t , 则 Birkhoff 方程称为自治的, 有形式

$$\Omega_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n). \quad (2)$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu} = \frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu} - \frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \quad (3)$$

称为 Birkhoff 张量. 借助 Birkhoff 张量可将非自治形式的 Birkhoff 方程 (1) 写为

$$\Omega_{\mu\nu}(t, a)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right) = 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n). \quad (4)$$

此外, Birkhoff 方程总是自伴随的, 即满足条件

$$\Omega_{\mu\nu} + \Omega_{\nu\mu} = 0, \quad (5a)$$

$$\frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial a^\tau} + \frac{\partial \Omega_{\nu\tau}}{\partial a^\mu} + \frac{\partial \Omega_{\tau\mu}}{\partial a^\nu} = 0, \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial a^\mu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial a^\nu} \left(\frac{\partial B}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right). \end{aligned} \quad (5c)$$

其中 (5a), (5b) 式分别说明 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 是反对称的和满足 Jacobi 恒等式的.

为下文叙述方便, 先给出一阶线性偏微分方程组的可积条件 [26]: n 个自变量、一个未知函数 $z = z(\mathbf{r})$ 的一阶线性偏微分方程组有如下形式:

$$\frac{\partial z}{\partial a^\nu} = f_\nu(\mathbf{r}), \quad (\nu = 1, \dots, n). \quad (6)$$

其中向量 $\mathbf{r} = (a^1, \dots, a^n)$. 若 (6) 式可积, 则函数 f_ν 在所考虑的星形区域内连续可微且满足

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial a^\nu} = \frac{\partial f_\nu}{\partial a^\mu}, \quad (\mu, \nu = 1, \dots, n). \quad (7)$$

3 待定张量法

假设给定系统的运动微分方程已化为标准一阶形式

$$\dot{a}^\mu - \Xi^\mu(t, a) = 0, \quad (\mu = 1, \dots, 2n). \quad (8)$$

将 (8) 式 Birkhoff 化, 实际上是要构造适当的函数 B 和 R_μ 使得由 Birkhoff 方程 (1) 导出的一阶自

伴随方程与 (8) 式等价. 若还要求 Birkhoff 方程 (1) 可写为逆变形式

$$\dot{a}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \left[\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\nu} + \frac{\partial R_\nu(t, a)}{\partial t} \right], \quad (9)$$

其中 $\Omega^{\mu\nu} = \Omega_{\mu\nu}^{-1}$, 则正规性条件是必须的, 即要求

$$\det(\Omega_{\mu\nu}) \neq 0. \quad (10)$$

由于 Birkhoff 张量是反对称的, 故正规 Birkhoff 系统的变量 a^μ 的个数只能为偶数. 对于 a^μ 的个数为奇数的退化系统, 可归为广义 Birkhoff 系统来研究 [5].

将 (8) 式代入 Birkhoff 方程 (4) 有

$$\begin{aligned} \Omega_{\mu\nu}\Xi^\nu - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right) \\ = 0. \quad (\mu = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (11)$$

此时 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 、函数 B 和 R_μ 都是未知的. 用待定张量法来构造 Birkhoff 函数 (组) B 和 R_μ 的基本思路是: 先确定出 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$, 再利用 Santilli 第二方法 [2,3] 给出的公式得到函数 B 和 R_μ , 即

$$R_\mu(t, a) = \left[\int_0^1 \tau \Omega_{\nu\mu}(t, \tau a) d\tau \right] a^\nu. \quad (12)$$

$$B(t, a) = - \left[\int_0^1 \left(\Gamma_\mu + \frac{\partial R_\mu}{\partial t} \right) (t, \tau a) d\tau \right] a^\mu. \quad (13)$$

其中 $[\Omega_{\mu\nu}\Xi^\nu + \Gamma_\mu]_{\text{SA}} = 0$, SA 表示自伴随. 显然, 考虑如何确定 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 成为问题的关键. 注意到 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 是反对称的, 故要完全确定 $\Omega_{\mu\nu}$ 只需确定 $\mu < \nu$ 或 $\mu > \nu$ ($\mu, \nu = 1, \dots, 2n$) 时的 m 个协变分量即可. 以下采用通过确定 $\mu < \nu$ 的 m 个协变分量来确定 $\Omega_{\mu\nu}$ 的方法, 并称此 m 个未知协变分量 $\Omega_{\mu\nu}$ ($\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n$) 为待定分量. 下面导出具体确定 m 个待定分量的方程.

将 (11) 式写为

$$\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} = \Omega_{\mu\nu}\Xi^\nu - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \equiv f_\mu. \quad (14)$$

若要实现系统的 Birkhoff 表示, Birkhoff 函数 B 必须存在, 这要求函数 f_μ 必须满足可积性条件 (7). 具体地, 将

$$f_\mu = \Omega_{\mu\nu}\Xi^\nu - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t}. \quad (15)$$

代入条件 (7) 有

$$\frac{\partial \Omega_{\mu\rho}}{\partial a^\nu} \Xi^\rho + \Omega_{\mu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\nu} - \frac{\partial^2 R_\mu}{\partial t \partial a^\nu}$$

$$= \frac{\partial \Omega_{\nu\rho}}{\partial a^\mu} \Xi^\rho + \Omega_{\nu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\mu} - \frac{\partial^2 R_\nu}{\partial t \partial a^\mu}, \quad (\mu, \nu, \rho = 1, \dots, 2n). \quad (16)$$

整理得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \Omega_{\mu\rho}}{\partial a^\nu} - \frac{\partial \Omega_{\nu\rho}}{\partial a^\mu} \right) \Xi^\rho \\ & + \left(\Omega_{\mu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\nu} - \Omega_{\nu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\mu} \right) \\ & = 0, \quad (\mu, \nu, \rho = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (17)$$

再次注意到 $\Omega_{\mu\nu}$ 的反对称性, 则 (17) 式只给出 m 个有效方程. 取 $\mu < \nu$ 时的 m 个方程, 并利用 Jacobi 恒等式 (5b) 将其化简得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial t} + \frac{\partial \Omega_{\mu\nu}}{\partial a^\rho} \Xi^\rho + \left(\Omega_{\mu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\nu} - \Omega_{\nu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\mu} \right) \\ & = 0, \quad (\mu < \nu; \mu, \nu, \rho = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (18)$$

容易看出, 上式是以 m 个待定分量 $\Omega_{\mu\nu} (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n)$ 为未知函数的 m 个一阶线性偏微分方程. 由此解出一组满足正规性条件的协变分量 $\Omega_{\mu\nu} (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n)$, 则 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 得以确定. 随后 Birkhoff 函数 B 可通过分别积分 (14) 式中的 m 个一阶线性偏微分方程并适当组合得到, 而 Birkhoff 函数组 R_μ 可利用 Santilli 第二方法得出, 也可将已求得的张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 和函数 B 代入 Birkhoff 方程得到关于 R_μ 的偏微分方程组并求解得到. 对某些特殊系统, 还可构造出更直接的方法得到函数组 R_μ . 于是, 构造力学系统 Birkhoff 函数 (组) B 和 R_μ 的问题转化为对一阶线性正定偏微分方程组 (18) 的求解问题.

对某些特殊系统, 待定分量所满足的方程还可简化. 为此, 将 (18) 式改写为

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{d} \Omega_{\mu\nu}(t, a)}{dt} + f_{\mu\nu}(t, a, \Omega) \\ & = 0, \quad (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \Xi^\rho \frac{\partial}{\partial a^\rho}, \\ & f_{\mu\nu}(t, a, \Omega) \equiv \Omega_{\mu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\nu} - \Omega_{\nu\rho} \frac{\partial \Xi^\rho}{\partial a^\mu}, \\ & \Omega = (\Omega_{12}, \dots, \Omega_{\mu\nu}), \quad (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (20)$$

对 (19) 式作如下讨论:

1) 若由代数方程

$$f_{\mu\nu}(t, a, \Omega) = 0, \quad (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n). \quad (21)$$

解得满足正规性条件的 m 个协变分量 $\Omega_{\mu\nu} (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, \dots, 2n)$ 全是常数, 则此组分量也一定满足 (19) 式. 此时 Birkhoff 函数组 R_μ 可按如下方法构造:

$$\begin{aligned} R_\mu & \equiv r_{\mu\nu} a^\nu \\ & = \begin{cases} -\Omega_{\mu\nu} a^\nu, & \mu < \nu, \\ 0, & \mu \geq \nu, \end{cases} \\ & (\mu, \nu = 1, \dots, 2n). \end{aligned} \quad (22)$$

其中 $r_{\mu\nu} = r_{\mu\nu}(\Omega)$. 容易验证, 所得的常数协变分量及按 (22) 式构造的 R_μ 能够使得方程 (3), (5) 成立, 即 (22) 式的取法是可行的. 显然, 此种情况将给出系统的自治 Birkhoff 表示.

2) 对于给定的系统, 若将具体的 Ξ^ρ 代入函数 $f_{\mu\nu}(t, a, \Omega)$ 的表达式后, 得到的是不含变量 a 的函数 $f_{\mu\nu}(t, \Omega)$, 则 (19) 式可按常微分方程组来求解

$$f_\mu = \Omega_{\mu\nu} \Xi^\nu - \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t}. \quad (23)$$

此时 Birkhoff 函数组 R_μ 仍可按 (22) 式构造且 $r_{\mu\nu} = r_{\mu\nu}(\Omega(t))$. 此种情况将给出系统的非自治 Birkhoff 表示. 特别地, 将上述诸方程作相应简化就可以得到分别适用于自治和半自治 Birkhoff 表示的待定张量法. 此外, 将偶数维的动力学空间推广为正整数维并去掉正规性条件的限定, 则待定张量法可用于广义 Birkhoff 系统的广义 Birkhoff 函数 (组) 的构造.

4 算例

例 1 用待定张量法构造 Hojman-Urrutia 方程^[2,3]

$$\ddot{x} + \dot{y} = 0, \quad \ddot{y} + y = 0 \quad (24)$$

的 Birkhoff 函数 (组) B 和 R_μ .

令

$$a^1 = x, \quad a^2 = y, \quad a^3 = \dot{x}, \quad a^4 = \dot{y}. \quad (25)$$

则系统 (24) 可表为标准一阶形式

$$\dot{a}^1 = a^3, \quad \dot{a}^2 = a^4, \quad \dot{a}^3 = -a^4, \quad \dot{a}^4 = -a^2. \quad (26)$$

设系统对应的 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 为

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} & \Omega_{14} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} & \Omega_{24} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 & \Omega_{34} \\ -\Omega_{14} & -\Omega_{24} & -\Omega_{34} & 0 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

其中协变分量 $\Omega_{\mu\nu} (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ 为待定分量.

首先, 按情况 1) 求系统的自治 Birkhoff 表示. 由 (21) 式列写代数方程得

$$\begin{aligned} -\Omega_{14} &= 0, \\ \Omega_{12} - \Omega_{13} &= 0, \\ -\Omega_{12} + \Omega_{34} &= 0, \\ \Omega_{23} &= 0, \\ -\Omega_{23} + \Omega_{14} &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

可取

$$\begin{aligned} \Omega_{12} = \Omega_{13} = \Omega_{34} &= -1, \\ \Omega_{14} = \Omega_{23} = \Omega_{24} &= 0. \end{aligned} \quad (29)$$

则 Birkhoff 张量为

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (30)$$

Birkhoff 函数组 R_μ 按 (22) 式构造得

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{12} & -\Omega_{13} & -\Omega_{14} \\ 0 & 0 & -\Omega_{23} & -\Omega_{24} \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + a^3 \\ 0 \\ a^4 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

即

$$\begin{aligned} R_1 &= a^2 + a^3, \quad R_2 = 0, \\ R_3 &= a^4, \quad R_4 = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

将 (30), (32) 式代入 (14) 式整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial a^1} &= 0, \quad \frac{\partial B}{\partial a^2} = a^3, \\ \frac{\partial B}{\partial a^3} &= a^2 + a^3, \quad \frac{\partial B}{\partial a^4} = -a^4. \end{aligned} \quad (33)$$

分别积分四个一阶偏微分方程, 将所得结果相加 (相同项取一次) 并略去任意函数项可得

$$B = \frac{1}{2}[(a^3)^2 - (a^4)^2] + a^2 a^3. \quad (34)$$

容易验证此组 B 和 R_μ 满足自伴随条件 (5) 且正规性条件 (10) 成立. 于是系统对应的自治 Birkhoff 方程为

$$\Omega_{\mu\nu}(a)\dot{a}^\nu - \frac{\partial B(a)}{\partial a^\mu} = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (35)$$

其中 B 和 R_μ 由 (34) 式和 (32) 式给出.

其次, 按情况 2) 求系统的非自治 Birkhoff 表示. 利用 (23) 式列写常微分方程组得

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \Omega'_{14}, \quad \frac{d\Omega'_{13}}{dt} = 0, \\ \frac{d\Omega'_{14}}{dt} &= \Omega'_{13} - \Omega'_{12}, \quad \frac{d\Omega'_{23}}{dt} = \Omega'_{12} - \Omega'_{34}, \\ \frac{d\Omega'_{24}}{dt} &= \Omega'_{23}, \quad \frac{d\Omega'_{34}}{dt} = \Omega'_{23} - \Omega'_{14}. \end{aligned} \quad (36)$$

其中 $\Omega'_{\mu\nu} (\mu < \nu; \mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$ 为待定分量. 解 (36) 式得

$$\begin{aligned} \Omega'_{12} &= \sin t, \quad \Omega'_{13} = 0, \\ \Omega'_{14} &= \cos t, \quad \Omega'_{23} = t \sin t, \\ \Omega'_{24} &= \sin t - t \cos t, \quad \Omega'_{34} = \sin t. \end{aligned} \quad (37)$$

则 Birkhoff 张量为

$$\Omega'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \sin t & 0 & \cos t \\ -\sin t & 0 & t \sin t & \sin t - t \cos t \\ 0 & -t \sin t & 0 & -t \cos t \\ -\cos t & t \cos t - \sin t & t \cos t & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

Birkhoff 函数组 R'_μ 按 (22) 式构造得

$$\begin{pmatrix} R'_1 \\ R'_2 \\ R'_3 \\ R'_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin t & 0 & -\cos t \\ 0 & 0 & -t \sin t & t \cos t - \sin t \\ 0 & 0 & 0 & t \cos t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \\ a^4 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

即

$$\begin{aligned} R'_1 &= -a^2 \sin t - a^4 \cos t, \\ R'_2 &= a^4(t \cos t - \sin t) - ta^3 \sin t, \\ R'_3 &= ta^4 \cos t, \\ R'_4 &= 0. \end{aligned} \quad (40)$$

将 (38), (40) 式代入 (14) 式整理得

$$\begin{aligned} B' &= \frac{1}{2}[(a^2)^2(t \cos t - \sin t) - (a^4)^2 \sin t] \\ &\quad + a^3 \cos t(ta^2 - a^4). \end{aligned} \quad (41)$$

容易验证此组 B' 和 R'_μ 满足自伴随条件 (5) 且正规性条件 (10) 成立. 于是系统对应的非自治 Birkhoff 方程为

$$\begin{aligned} \Omega'_{\mu\nu}(t, a)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B'}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R'_\mu(t, a)}{\partial t} \right) \\ = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \quad (42)$$

其中 B' 和 R'_μ 由 (32) 式和 (34) 式给出.

在本例中, 我们用待定张量法构造了两组在规范变换^[2,3]下等价的 Birkhoff 函数(组) (R_μ, B) 和 (R'_μ, B') , 并由此得到了 Hojman-Urrutia 方程的自治和非自治 Birkhoff 方程. 这表明, 同一个动力学系统可以用多组不同的函数 B' 和 R'_μ 将其 Birkhoff 化, 而相应的 Birkhoff 方程在规范变换意义下是等价的.

例 2 已知某广义 Birkhoff 系统的一阶运动微分方程组为

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= a^2, \\ \dot{a}^2 &= \frac{-t}{1+t^2}, \\ \dot{a}^3 &= a^1 - ta^2 - t. \end{aligned} \quad (43)$$

试用待定张量法构造该系统的广义 Birkhoff 函数(组) B 和 R_μ .

设 Birkhoff 张量 $\Omega_{\mu\nu}$ 为

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} & \Omega_{13} \\ -\Omega_{12} & 0 & \Omega_{23} \\ -\Omega_{13} & -\Omega_{23} & 0 \end{pmatrix}, \quad (44)$$

其中 $\Omega_{12}, \Omega_{13}, \Omega_{23}$ 是待定分量. 利用 (23) 式列写待定分量应满足的常微分方程为

$$\begin{aligned} \frac{d\Omega_{12}}{dt} - \Omega_{13}t - \Omega_{14} &= 0, \quad \frac{d\Omega_{13}}{dt} = 0, \\ \frac{d\Omega_{14}}{dt} + \Omega_{13} &= 0. \end{aligned} \quad (45)$$

一组解是

$$\Omega_{12} = 0, \quad \Omega_{13} = 1, \quad \Omega_{14} = -t. \quad (46)$$

则 Birkhoff 张量为

$$\Omega_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -t \\ -1 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

广义 Birkhoff 函数组 R_μ 为

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_{12} & -\Omega_{13} \\ 0 & 0 & -\Omega_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -a^3 \\ ta^3 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

即

$$R_1 = -a^3, \quad R_2 = ta^3, \quad R_3 = 0. \quad (49)$$

将 (47), (49) 式代入 (14) 式整理得

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial a^1} &= a^1 - ta^2 - t, \\ \frac{\partial B}{\partial a^2} &= -ta^1 + t^2a^2 - a^3 + t^2, \\ \frac{\partial B}{\partial a^3} &= -a^2 - \frac{t^2}{1+t^2}. \end{aligned} \quad (50)$$

分别积分 (50) 式并适当组合得

$$B = \frac{1}{2} [(a^1)^2 + t^2(a^2)^2] - \frac{t^2 a^3}{1+t^2} - ta^1 a^2 - a^2 a^3 - ta^1 + t^2 a^2. \quad (51)$$

容易验证此组函数 B 和 R_μ 满足自伴随条件 (5), 但正规性条件 (10) 不满足, 故得到的是破坏了正规性条件的广义 Birkhoff 方程

$$\Omega_{\mu\nu}(t, a)\dot{a}^\nu - \left(\frac{\partial B(t, a)}{\partial a^\mu} + \frac{\partial R_\mu(t, a)}{\partial t} \right) = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3). \quad (52)$$

其中 B 和 R_μ 由 (51) 式和 (49) 式给出.

5 结 论

待定张量法将 Birkhoff 函数 (组) 的构造问题, 转化为一阶线性偏微分方程组的求解问题. 对某些系统, 该方法还可做进一步简化, 并得到形如 (22) 式的构造的简单方法. 考虑如何给出构造 R_μ 的普适简单方法, 仍是一个有待进一步研究的问题. 目前, 有望进一步解决 Birkhoff 函数构造问题的理论之一是文献 [5] 提出的参数调节法. 本文作为对参数调节法的初步讨论, 将为该方法的深入研究提供有益的帮助.

-
- [1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical systems* (Providence R I: AMS College Publ)
 - [2] Santilli R M 1983 *Foundations of theoretical mechanics II* (New York: Springer-Verlag)
 - [3] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1896
 - [4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]
 - [5] Guo Y X, Liu C, Liu S X 2011 *Commun. Math.* **18** 21
 - [6] Mei F X 2009 *Inverse Problems of Dynamics* (Beijing: National Defense Industry Press) (in Chinese) [梅凤翔 2009 动力学逆问题 (北京: 国防工业出版社)]
 - [7] Ding G T 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]
 - [8] Mei F X 1993 *Sci. Chin. A* **36** 1456
 - [9] Wu H B, Mei F X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 104501
 - [10] Luo S K, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 357
 - [11] Ge W K, Zhang Y 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 050202 (in Chinese) [葛伟宽, 张毅 2011 物理学报 **60** 050202]
 - [12] Ding G T 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 3643 (in Chinese) [丁光涛 2010 物理学报 **59** 3643]
 - [13] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, Liu C Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 582
 - [14] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 薛纭 2003 物理学报 **52** 256]
 - [15] Guo Y X, Liu C, Liu S X, Chang P 2009 *Sci. Chin. E* **52** 761
 - [16] Guo Y X, Liu S X, Liu C 2009 *Phys. Lett. A* **373** 3915
 - [17] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3155
 - [18] Zhang Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080301
 - [19] Chen X W 2002 *Global Analysis of Birkhoffian System* (Henan: Henan University Press) (in Chinese) [陈向炜 2002 Birkhoff 系统的全局分析 (河南大学出版社)]
 - [20] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 034501
 - [21] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 064501 (in Chinese) [刘世兴, 刘畅, 郭永新 2011 物理学报 **60** 064501]
 - [22] Mei F X, Cui J C 2011 *J. Beijing Ins. Tech.* **20** 285
 - [23] Li Y M, Mei F X 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080302
 - [24] Liu C, Liu S X, Guo Y X 2011 *Sci. Chin.: Tech. Sci.* **54** 2100
 - [25] Cui J C, Mei F X 2010 *J. Dyn. Control* **8** 297 [崔金超, 梅凤翔 2010 动力学与控制学报 **8** 297]
 - [26] Kamke E 1974 *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen, Bd. II: Partielle differentialgleichungen* (Chelsea Publishing Co.)

The method of undetermined tensor for constructing Birkhoffian functions*

Cui Jin-Chao¹⁾ Song Duan³⁾ Guo Yong-Xin^{1)2)†}

1) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*College of Physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China*)

3) (*Physics of medical imaging department, Eastern Liaoning University, Dandong 118001, China*)

(Received 25 April 2012; revised manuscript received 16 June 2012)

Abstract

The method of constructing Birkhoffian and Birkhoffian funcations of mechanical system is studied. Based on the conditions of self-adjointness and integrability conditions of linear partial differential equations, a method of undetermined tensor for constructing Birkhoffian and Birkhoffian funcations of mechanical systems is given. Two examples are given to illustrate the application of the results.

Keywords: Birkhoffian mechanics, conditions of self-adjointness, Birkhoffian and Birkhoffian funcations, method of undetermined tensor

PACS: 45.05.+x, 02.30.Zz, 45.10.—b

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11172120).

† E-mail: yxguo@lnu.edu.cn