

# 涡旋轴对称化的分形维数表征\*

罗哲贤<sup>1)†</sup> 余晖<sup>2)</sup> 平凡<sup>3)</sup> 马革兰<sup>4)</sup>

1) (南京信息工程大学, 气象灾害省部共建教育部重点实验室, 南京 210044)

2) (中国气象局, 上海台风研究所, 上海 200030)

3) (中国科学院大气物理研究所, 云降水物理和强风暴国家实验室 (LACS), 北京 100029)

4) (南京信息工程大学, 环境科学与工程学院, 南京 210044)

(2012年1月4日收到; 2012年6月28日收到修改稿)

涡旋轴对称化是影响热带气旋预报的重要动力学过程. 截止目前的研究, 均用等值线图主观识别涡旋轴对称化. 本文用一个准地转无辐散的正压涡度方程模式, 数值积分 48 h, 模拟了初始非轴对称涡旋演变为轴对称涡旋的轴对称化过程. 根据模式输出数据, 计算了逐时涡旋外缘线的分形维数  $D_B$ , 用分形维数  $D_B$  的逐时变化客观表征涡旋轴对称化. 在此基础上, 计算了分形维数  $D_B$  与热带气旋尺度参数  $R_m$  和热带气旋强度参数  $V_{max}$  的相关系数. 结果显示,  $D_B$  与  $R_m$  的相关系数为  $-0.70$ ,  $D_B$  与  $V_{max}$  的相关系数为  $-0.75$ , 相关均显著. 用此途径, 客观表征了涡旋轴对称化与热带气旋参数的联系. 结果在热带气旋预报中有应用前景.

**关键词:** 分形维数, 涡旋轴对称化, 热带气旋尺度, 热带气旋强度

**PACS:** 47.53.+n, 92.60.Qx, 92.60.Wc

## 1 引言

热带气旋 (TC) 涡旋往往由两部份组成. 一是绕涡中心旋转的轴对称基流, 一是基流上叠加的中尺度扰动; 中尺度扰动被基流吸收, 称之为涡旋轴对称化. Melander 等<sup>[1]</sup> 最早发现, 涡旋外缘的涡片先是脱离涡主体, 然后被主涡吸收, 形成圆形轴对称涡旋. McCalpin 等<sup>[2]</sup> 指出, 圆涡上迭加的沿方位角 2 波和 3 波的扰动均被圆涡吸收. Enagonio 等<sup>[3]</sup> 和 Luo 等<sup>[4]</sup> 分别在静止环境场和副热带高压环境场条件下分析了涡旋轴对称化的物理本质. 罗哲贤<sup>[5]</sup> 和陈光华等人<sup>[6]</sup> 认为, 除了扰动被圆形基流吸收外, 扰动和圆形基流的非线性作用还可以使扰动发展. Terwey 等<sup>[7]</sup> 发现, 对流生成涡度扰动的轴对称化可以影响台风次级眼墙形成. Murakami 等<sup>[8]</sup> 发现, 涡旋外缘的涡片可以加速椭圆涡的轴对称化过程. Gumond<sup>[9]</sup> 分析了有效扩散对涡旋轴

对称化的作用. 涡旋轴对称化与 TC 强度和路径变化关系密切, 涡旋轴对称化的研究结果在 TC 预测中有重要应用.

截止目前, 涡旋轴对称化是图形表征的, 即先输出一系列的等值线空间场, 观测这些空间场的连续演变, 主观识别涡旋轴对称化过程. 因为表征涡旋轴对称化的主观性, 分析涡旋轴对称化和 TC 路径联系时, 也有一定的主观性, 最终会影响 TC 的预测. 如何改善涡旋轴对称化的表征, 是涡旋轴对称化动力学及其应用面临的重要问题.

如所知, 分形是客观表征复杂几何图形的有力工具<sup>[10]</sup>. 在热带云块边界<sup>[11]</sup>、云块边界分形机理<sup>[12]</sup>、森林火灾时空分布<sup>[13]</sup>、随机信号分布及其模型<sup>[14,15]</sup>、多孔介质卡森流体运动<sup>[16]</sup>、火灾烟颗粒模型<sup>[17]</sup>、脑电信号标度分析<sup>[18]</sup>和输油管道压力特性<sup>[19]</sup>等方面, 均有分形研究的结果报道.

基于此, 本文将提出涡旋轴对称化的分形维数

\* 国家自然科学基金 (批准号:40975036 和 4092116038) 资助的课题.

† E-mail: luozxma@yeah.net

表征; 并将涡旋轴对称化与 TC 结构、强度的联系定量化, 结果在 TC 预测中有应用前景.

## 2 涡旋轴对称化的图形表征

准地转无辐散正压涡度方程有如下形式:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\nu \nabla^4 \psi, \quad (1)$$

式中,  $\psi$  为地转流函数,  $\nabla^2 \psi$  为相对涡度,  $J$  为 Jacobian 算子,  $\beta = df/dy$ ,  $f$  为柯氏参数,  $\nabla^2$  为拉普拉斯算子,  $\nu$  为黏滞系数, 本文取  $\nu = 1.0 \times 10^{-7} \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-1}$ .

在东西和南北边界, 取周期边条件.

令初始相对涡度

$$\xi(x, y, 0) = \xi_L(x, y, 0) + \xi_S(x, y, 0), \quad (2)$$

式中,  $\xi_L(x, y, 0)$  代表一个 TC. 令<sup>[20]</sup>

$$\xi_L(x, y, 0) = (2V_m/R_m) \times [1 - 0.5(r/R_m)] \times \exp[1 - (r/R_m)], \quad (3)$$

式中,  $V_m$  为涡旋最大风速,  $R_m$  为最大风速半径,  $r$  为径向距离. 令<sup>[20]</sup>  $V_m = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $R_m = 80 \text{ km}$ . TC 中心  $(x_0, y_0)$  位于模式区域的中心,  $(x_0, y_0) = (0, 0) \text{ km}$ .

(2) 式中的  $\xi_S(x, y, 0)$  代表两个中尺度涡:

$$\begin{aligned} \xi_S(x, y, 0) &= \xi_{s1}(x, y, 0) + \xi_{s2}(x, y, 0), \\ \xi_{s1}(x, y, 0) &= \xi_{s0} \sin\left(\frac{x - x_{11}}{x_{12} - x_{11}}\pi\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{y - y_{11}}{y_{12} - y_{11}}\pi\right), \\ \xi_{s2}(x, y, 0) &= \xi_{s0} \sin\left(\frac{x - x_{21}}{x_{22} - x_{21}}\pi\right) \\ &\quad \times \sin\left(\frac{y - y_{21}}{y_{22} - y_{21}}\pi\right), \end{aligned} \quad (4)$$

式中,  $\xi_{s0}$  描述了中尺度涡的强度. 第 1 个中尺度涡中心  $(x_{10}, y_{10}) = (150, 0) \text{ km}$ , 即涡中心位于 TC 中心正东方向 150 km 处.  $(x_{11}, x_{12}) = (100, 200) \text{ km}$ ,  $(y_{11}, y_{12}) = (-50, 50) \text{ km}$ . 第 2 个中尺度涡中心  $(x_{20}, y_{20}) = (150, 150) \text{ km}$ , 即涡中心位于 TC 中心东北方向 212 km 处.  $(x_{21}, x_{22}) = (100, 200) \text{ km}$ ,  $(y_{21}, y_{22}) = (100, 200) \text{ km}$ . 令<sup>[3]</sup>  $\xi_{s0} = 3.48 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ .

模式区域是一个  $4000 \times 4000 \text{ km}$  的正方形. 水平格距 10 km, 时间步长 180 s. 积分 48 h. 采用 Asselin<sup>[21]</sup> 的时间中央差滤波方案.

$\xi_L(x, y, 0)$  和  $\xi_S(x, y, 0)$  代入 (2) 式, 可得相对涡度的初始场. 显然, 初始时刻是非轴对称流型 (图 1(a)). 0—22 h 期间, 非轴对称流型演变为双螺旋臂流型 (图 1(b)—(d)).

$t = 23 \text{ h}$ , TC 中心北侧的螺旋臂脱离 TC 主体 (图 2(a)); 然后这个螺旋臂减弱 (图 2(b)) 并消失 (图 2(c)), 形成一个单螺旋臂流型 (图 2(d)).

$t = 29 \text{ h}$ , 单螺旋臂从 TC 主体脱落 (图 3(a)).  $t = 34 \text{ h}$ , 最外一圈等值线还不是圆形 (图 3(b)),  $t = 42 \text{ h}$  后, 轴对称化流型显示出来了 (图 3(c), (d)).

图 1—3 是涡旋轴对称化的图形表征. 这是常用的涡旋轴对称化的表征方法, 缺乏数字化的定量描述.

## 3 涡旋轴对称化的分形维数表征

图 1—3 上最外圈的等值线是相对涡度  $\xi$  的零值线. 在涡旋轴对称化的过程中,  $\xi$  零值线的几何形状趋向于圆形. 涡旋轴对称化可认为等价于  $\xi$  零值线的圆形化. 非轴对称  $\xi$  零值线的分形维数大于 1.00; 圆形零值线的分形维数等于 1.00. 因此,  $\xi$  零值线分形维数的变化与涡旋轴对称化有联系.

分形维数的计算有多种方法. 其中, 盒维数 (box counting) 方法被广泛应用于分形研究. 如杨波等<sup>[22]</sup> 用盒维数方法计算了凝聚体的分形维数.

本文用盒维数方法计算了图 1—3 上 0—48 h 逐时  $\xi$  零值线的分形维数. 对每个时刻的  $\xi$  零值线而言, 用一系列边长为  $L$  的正方形对  $\xi$  零值线进行分割, 然后计算  $\xi$  零值线占有的正方形个数  $N(L)$ . 这里, 令  $L = 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 160, 320, 640 \text{ km}$ . 在无标度区间, 下式成立:

$$\ln(N(L)) = D_B \ln((1/L)),$$

在  $(\ln(1/L), \ln(N))$  散布图上, 拟合线的斜率即为盒维数  $D_B$  的估计值.

对本文盒维数的计算方法, 我们用圆的几何图形验证. 结果显示, 计算值与理论值的相对误差小于十万分之一, 结果是可信的.

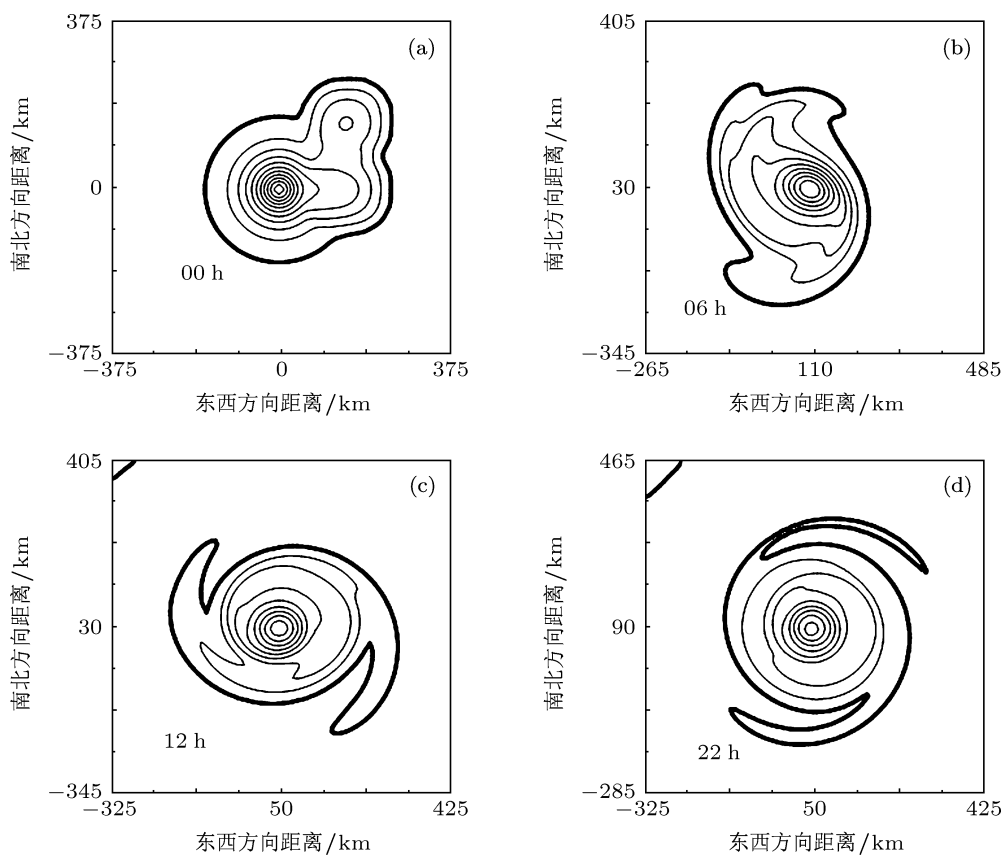


图 1 0—22 h 相对涡度场随时间的变化 (粗黑线代表零等值线, 等值线间隔  $1.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) (a) 0 h; (b) 6 h; (c) 12 h; (d) 22 h

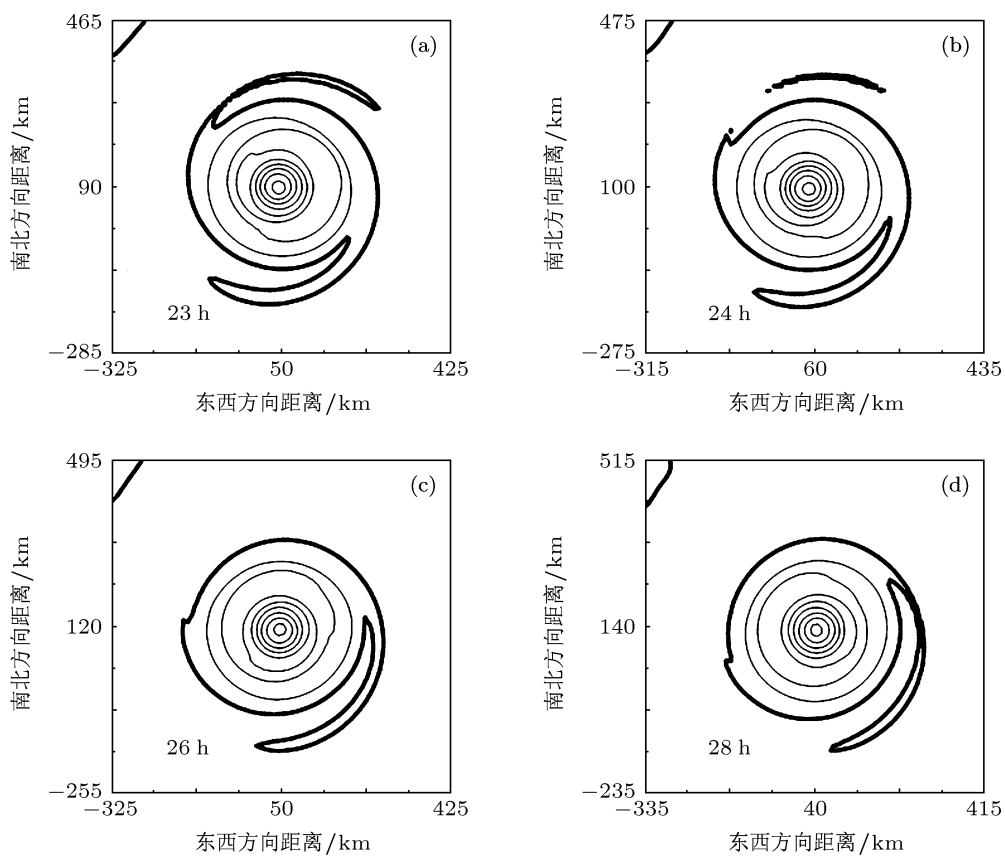


图 2 23—28 h 相对涡度场随时间的变化 (粗黑线代表零等值线, 等值线间隔  $1.0 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ) (a) 23 h; (b) 24 h; (c) 26 h; (d) 28 h

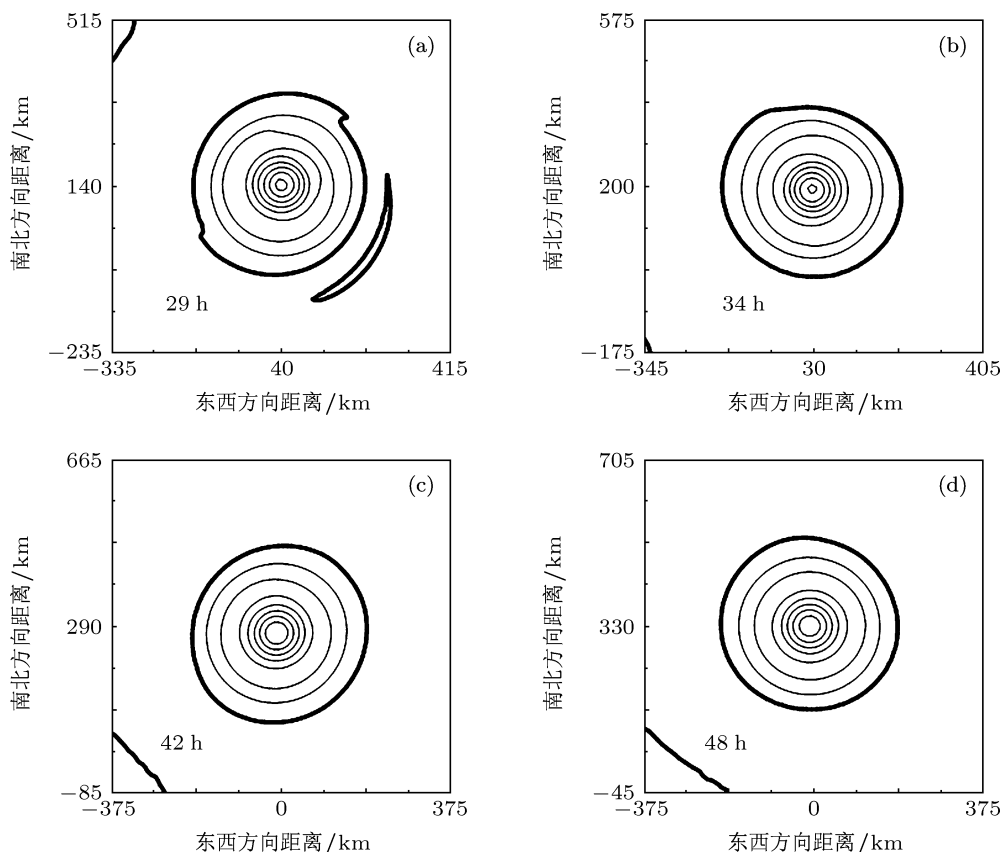


图3 29—48 h 相对涡度场随时间的变化 (粗黑线代表零等值线, 等值线间隔  $1.0 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ) (a) 29 h; (b) 34 h; (c) 42 h; (d) 48 h

0—48 h 分形维数的计算结果表明: 1) 在 0—48 h 期间, 分形维数的变化有减小的趋势; 0—3 h 约为 1.19—1.38, 46—48 h 约为 1.02—1.04, 这个值已经接近圆形几何图形的分形维数 1.00. 2) 盒维数不是单调下降, 而是波动式下降; 意味着非线性作用使演变过程复杂化 (图 4).

需要指出的是, 上述相对涡度的零等值线是不光滑的, 其维数为分数; 若零等值线是光滑的, 则其维数为整数.

图 4 的曲线是涡旋轴对称化的分形维数表征. 与图形表征相比, 分形维数表征是定量、客观的. 涡旋轴对称化将导致 TC 尺度加大 [23] 和 TC 强度增加 [3,4]. 在文献 [3, 4, 23] 中, 涡旋轴对称化与 TC 尺度和 TC 强度的联系是通过图形表征的, 缺乏定量联系. 下文将应用分形维数, 客观表征涡旋轴对称化与 TC 参数的联系.

TC 是一个准圆形的涡旋, 一般用极坐标  $(r, \theta)$  讨论. 取  $r = 0$  处为 TC 中心. 在 TC 中心, 风速  $V = 0$ . 随着径向距离  $r$  的增加, 风速  $V_m(r)$  也加大. 这里,  $V_m(r)$  代表径向距离  $r$  处风速沿  $\theta$  方

向的平均值. 当  $r = R_m$  时,  $V_m(r)$  达极大值  $V_{\max}$ , 称之为 TC 的最大风速.  $r$  继续增加时,  $V_m(r)$  减小.  $R_m$  被称之为最大风速半径.  $R_m$  取值大小一般代表 TC 尺度的大小. TC 尺度大小是影响 TC 移动的一个重要参数. 0—48 h 最大风速半径随时间的变化显示: 在涡旋轴对称化的过程中, 最大风速半径有加大的趋势 (图 5 实线). 作为对比, 我们实施了初始场无中尺度涡, 即初始轴对称流型的试验, 结果显示, 最大风速半径维持不变 (图 5 点线).

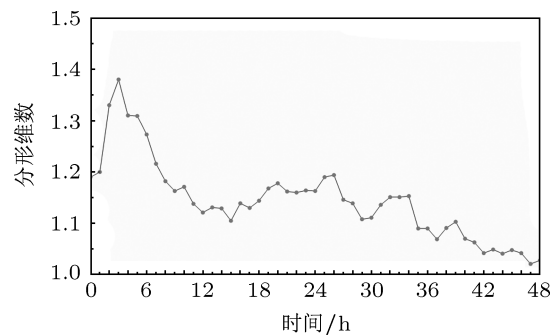


图4 涡旋轴对称化过程中分形维数随时间的变化

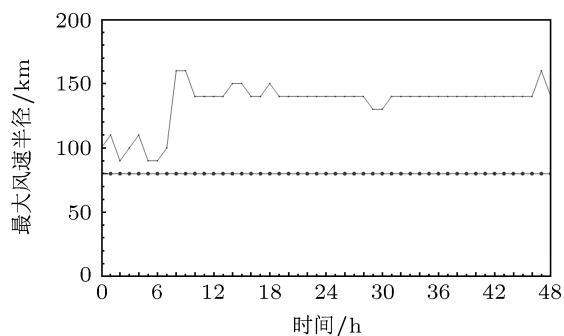


图5 0—48 h 最大风速半径随时间的变化 (实线代表初始非轴对称流型; 点线代表初始轴对称流型)

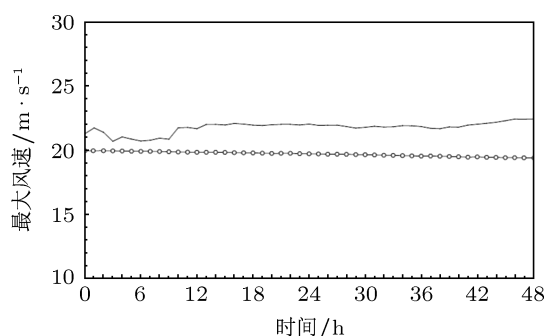


图6 0—48 h TC 最大风速随时间的变化 (实线代表初始非轴对称流型; 点线代表初始轴对称流型)

TC 最大风速  $V_{\max}$  随时间的变化显示: 在涡旋

轴对称化的过程中, 不同尺度涡旋的非线性作用可以抵消耗散, 使 TC 初始最大风速得以维持并呈增加的趋势 (图 6 实线). 在初始轴对称环流的条件下, TC 最大风速因耗散呈减弱的趋势 (图 6 点线)

根据 0—48 h 逐时分形维数和最大风速半径 (TC 尺度)、最大风速 (TC 强度) 的逐时值, 计算了分形维数和最大风速半径的相关系数为  $-0.70$ ; 分形维数和最大风速的相关系数为  $-0.75$ , 其绝对值均超过置信水平 0.05 的信度值, 说明相关显著.

## 4 结论

TC 涡旋轴对称化动力学长期以来在台风预测中有重要应用. 截止目前, 涡旋轴对称化过程是通过等值线图形主观识别的. 本文中, 涡旋轴对称化用分形维数客观表征. 发现: 在涡旋轴对称化过程中, 涡旋外缘线的分形维数呈下降趋势并逐步逼近 1.00, 在下降趋势之上叠加有不规则的小振幅的波动; 涡旋外缘线的分形维数与 TC 尺度和 TC 强度存在显著相关. 用此途径, 涡旋轴对称化和 TC 参数的联系也被客观表征. 这些结果在 TC 预测中有应用前景. 本文限于个例数值模拟输出数据的研究, 进一步的工作需要分析各类参数的敏感性.

- [1] Melander M V, McWilliams J C, Zabusky N J 1987 *J. Fluid Mech.* **178** 137
- [2] McCalpin J D 1987 *J. Geophys. Resear.* **92** 8213
- [3] Enagonio J, Montgomery M T 2001 *J. Atmos. Sci.* **58** 685
- [4] Luo Z X, Liu C J 2007 *J. Geophys. Resear.* **112** D 06103
- [5] Luo Z X 2003 *Science in China*. D **33** 686 (in Chinese) [罗哲贤 2003 中国科学 D 辑 **33** 686]
- [6] Chen G H, Qiu G Q 2005 *Acta Meteorol. Sin.* **63** 359 (in Chinese) [陈光华, 裘国庆 2003 气象学报 **63** 359]
- [7] Terwey W D, Montgomery M T 2008 *J. Geophys. Resear.* **113** D12112
- [8] Murakami S, Iwayama T 2010 *Pros. Meeting Japan Soc. Fluid Mech.* **139** 09-09 (in Japanese)
- [9] Guimond S 2011 *Ph. D. Dissertation* (Florida State Uni.) UMI 3458743
- [10] Mandelbrot B B 1977 *Fractals* (San Francisco: W. H. Freeman)
- [11] Lovejoy S 1982 *Science* **216** 185
- [12] Luo Z X, Liu C J 2007 *Geophysical Research Lett.* **34** L03808
- [13] Telesca L, Amatucci G, Lasaponara R, Lovullo M, Rodrigues M J 2007 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **12** 1326
- [14] Yang J, Bian B M, Yan Z G, Wang C Y, Li Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100506 (in Chinese) [杨娟, 卞保民, 闫振纲, 王春勇, 李振华 2011 物理学报 **60** 100506]
- [15] Yang J, Bian B M, Peng G, Li Z H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100506 (in Chinese) [杨娟, 卞保民, 彭纲, 李振华 2011 物理学报 010508]
- [16] Yuan M J, Yu B M, Zheng W, Yuan J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 024703 (in Chinese) [员美娟, 郁伯铭, 郑伟, 袁洁 2011 物理学报 **60** 024703]
- [17] Zhang Q, Deng X J, Zhang Q X, Li Y D, Zhang Y M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7442 (in Chinese) [张青, 邓小玖, 张启兴, 李耀东, 张永明 2010 物理学报 **59** 7442]
- [18] Ma Q L, Bian C H, Wang J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4480 (in Chinese) [马千里, 卞春华, 王俊 2010 物理学报 **59** 4480]
- [19] Liu J H, Zhang H G, Feng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6868 (in Chinese) [刘金海, 张化光, 冯健 2008 物理学报 **57** 6868]
- [20] Chan J C L, Williams R T 1987 *J. Atmos. Sci.* **44** 1257
- [21] Asselin R 1972 *Mon. Wea. Rev.* **109** 18
- [22] Yang B, Luo M B, Tao X M, Feng C M, Ye G X 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1523 (in Chinese) [杨波, 罗孟波, 陶向明, 冯春木, 叶高翔 1999 物理学报 **48** 1523]
- [23] Luo Z X, Davidson N, Ping F, Zhou W C 2011 *Adv. Mech. Engineering.* **2011** ID 782590

# Vortex axial-symmetrization characterized by fractal dimension\*

Luo Zhe-Xian<sup>1)†</sup> Yu Hui<sup>2)</sup> Ping Fan<sup>3)</sup> Ma Ge-Lan<sup>4)</sup>

1) (Key Laboratory of Meteorological Disaster of Ministry of Education, Nanjing University of Information Science and Technology,  
Nanjing 210044, China)

2) (Chinese Meteorological Administration, Shanghai Typhoon Institute, Shanghai 200030, China)

3) (Laboratory of Cloud-Precipitation Physics and Severe Storms (LACS), Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy  
of Science, Beijing 100029, China)

4) (College of Environment Science and Technology, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing 210044, China)

(Received 4 January 2012; revised manuscript received 28 June 2012)

## Abstract

The vortex axial-symmetrization is an important dynamical process affecting tropical cyclone track change, and it is identified by previous work, up to now, in terms of vorticity fields rather subjectively. Two-dimensional simulations whose integration time is 48 h using a quasi-geostrophic non-divergence barotropic vorticity equation model are performed. The evolutionary processes from an initial non-axial-symmetric vortex to the final axial-symmetric vortex are produced. Fractal dimension  $D_B$  of the perimeter of the vortex is calculated hourly based on the model output data. The results show that fractal dimension can be used to characterize the vortex axial-symmetrization objectively. Based on  $D_B$  calculated, the correction coefficients  $C_{RD}$  and  $C_{VD}$  are calculated to be  $C_{RD} = -0.70$  and  $C_{VD} = -0.75$ . They each have a significant correction. Here  $C_{RD}$  denotes the correction coefficient between  $D_B$  and  $R_m$  being TC scale parameter, and  $C_{VD}$  denotes the correction coefficient between  $D_B$  and  $V_{max}$  being tropical cyclone intensity parameter. The relation between the vortex axial-symmetrization and the tropical cyclone parameters may be characterized. The results have potential applications in tropical cyclone forecasting.

**Keywords:** fractal dimension, axial-symmetrization, tropical cyclone scale, tropical cyclone intensity

**PACS:** 47.53.+n, 92.60.Qx, 92.60.Wc

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos, 40975036 and 4092116038).

† E-mail: luozxma@yeah.net