

## 各向异性介质中的椭圆空间光孤子特性\*

李琼 翟永惠 梁果 郭旗†

(华南师范大学广东省微纳光子功能材料与器件重点实验室, 广州 510631)

(2012年5月9日收到; 2012年8月21日收到修改稿)

对矩形铅玻璃中椭圆孤子的形成进行了理论研究, 在理论模型中引入各向异性衍射效应. 采用变分法, 得到了强非局域线性各向异性椭圆孤子的变分解. 结果表明, 各向异性衍射效应对椭圆孤子的形成有很大的影响. 为了验证变分解的正确性, 采用牛顿迭代法算出强非局域线性各向异性椭圆孤子的数值解, 变分解和数值解符合得很好.

**关键词:** 强非局域性, 线性各向异性, 变分法

**PACS:** 42.25.Bs, 42.65.-k, 42.65.Tg

**DOI:** 10.7498/aps.62.024202

## 1 引言

空间光束在非线性介质中传输时, 一方面会由于衍射而展宽, 另一方面又会因为非线性效应而压缩. 当衍射和非线性效应达到平衡时, 光束就能形成空间光孤子在非线性介质中传播. 空间光孤子的种类很多, 目前已经发现并得到实验验证的空间光孤子有: Kerr 孤子<sup>[1]</sup>、光折变孤子<sup>[2]</sup>、光致异构孤子<sup>[3]</sup>、非局域孤子<sup>[4]</sup>、表面波孤子<sup>[5]</sup>等. 介质中空间某点的折射率的非线性部分不仅与该点的光场有关, 而且与介质中其他点的光场有关, 此种介质称为非局域介质, 在非局域介质中传输的孤子称为非局域孤子. 1997年, 空间光孤子的研究有了突破性进展, Snyder 和 Mitchell<sup>[4]</sup>提出了非局域空间光孤子的概念以及强非局域非线性介质中的空间光孤子的线性模型, 他们的工作大大促进了人们对非局域空间光孤子的研究. 近年来, 人们已经证明了非局域性在非线性光学中有很多新的有意义的物理效应: 能够抑制光束的坍塌<sup>[6]</sup>; 能够使暗孤子相互吸引<sup>[7]</sup>; 使在局域介质里不稳定的孤子比如涡旋孤子<sup>[8]</sup>, 在非局域介质里变得稳定. 根据介质响应函数的特征宽度与光束束宽大小的比较, 可将非局域程度分为<sup>[9]</sup>局域、弱非局域、一般非局域和强

非局域等. Assanto 等人<sup>[10]</sup>用理论和实验证明了向列相液晶是强非局域介质, 并求出向列相液晶中的孤子解. Segev 等<sup>[8]</sup>发现铅玻璃也是一种强非局域非线性材料, 并首次在实验中观察到了椭圆孤子和涡旋孤子. 文献<sup>[11]</sup>对2003年底前的非局域空间光孤子的研究状况进行了总结. 理论和实验的研究结果表明非局域空间光孤子在实现全光开关、全光信息处理等领域具有巨大的潜力. 目前非局域性材料主要有液晶、铅玻璃、原子气体、光折变材料等.

在单轴晶体中传输的具有单一极化方向和单一光载波频率的非线性 e 光光束由以下方程描述<sup>[12]</sup>:

$$\left( \alpha_X \frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + \alpha_Y \frac{\partial^2 A}{\partial Y^2} \right) + 2ik \frac{\partial A}{\partial Z} + 2k^2 \frac{\Delta n}{n_0} A = 0, \quad (1)$$

其中,  $A$  为光束函数,  $Z$  为传输方向坐标,  $X$  和  $Y$  是垂直于传输方向的横截面坐标,  $k$  为线性介质的波数 ( $k = 2\pi n_0 / \lambda$ ,  $\lambda$  是真空中波长),  $I (= |A|^2)$  为光强. 对不同的非线性机理,  $\Delta n$  具有不同的表达方式. 对于非局域非线性 (非局域孤子), 非线性折射率是光强的积分函数  $\Delta n = \iint R(X - X', Y - Y') I(X', Y') dX' dY'$ ,  $R(X, Y)$  是非局域非线性材料的响应函数.  $\alpha_X$  和  $\alpha_Y$  来源于介质材料的线性各向异性<sup>[12]</sup>, 又称为各向异

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11074080, 10904041)、广东省自然科学基金 (批准号: 10151063101000017) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20094407110008) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: guoq@scnu.edu.cn

性衍射效应<sup>[13]</sup>. 如果介质材料是线性各向同性的, 或者其各向异性衍射效应可以忽略不计, 则有  $\alpha_X = \alpha_Y = 1$ , 否则,  $\alpha_X \neq \alpha_Y$ . 目前几乎所有的空间光孤子的研究都局限于  $\alpha_X = \alpha_Y = 1$  的情况, 比如 Kerr 孤子和所有类型的光折变孤子研究, 涉及到  $\alpha_X \neq \alpha_Y$  的工作只有文献 [12—14] 等. 文献 [12] 讨论了具有各向异性衍射效应的非线性体材料中的光束自聚焦效应. 文献 [13] 证明了二次非线性效应和各项异性衍射效应能够产生稳定传输的椭圆孤子. 文献 [14] 证明了线性各向异性的向列相液晶中椭圆孤子的产生. 这些工作表明各向异性衍射效应在非线性光束传播过程中扮演着较为重要的角色. 2005 年 Segev 等人在矩形铅玻璃中观测到了相干椭圆孤子<sup>[8]</sup>, 可是因为没有考虑热应力引起的双折射效应, 也就是各向异性衍射效应, 所以其理论结果与实验结果只能定性的一致, 不能定量的一致. 本文所使用的理论模型中非线性和线性都是各向异性的, 采用变分法求出了各向异性椭圆强非局域空间光孤子的变分解. 为了验证变分解的正确性, 采用牛顿迭代法算出数值解, 算出的变分解与数值解结果相一致. 计算结果表明, 各向异性衍射效应对椭圆孤子的形成有很大的影响.

## 2 线性各向异性非局域非线性薛定谔方程的变分问题

当激光在铅玻璃中传输时, 光束被轻微吸收而成为热源, 热量要往光弱的低温处扩散, 从而形成了一定温度梯度分布的场. 傍轴条件下, 温度变化  $\Delta T$  满足泊松方程<sup>[8,15]</sup>

$$\kappa \nabla_{\perp}^2 T(X, Y) = -\alpha I(X, Y), \quad (2)$$

$$T(X, Y)|_{\text{boundary}} = T_0, \quad (3)$$

其中  $\alpha$  为热吸收系数,  $\kappa$  为热传导系数,  $T(X, Y)$  为温度分布,  $I(X, Y) = |A(X, Y)|^2$  为傍轴光束的光强分布,  $A(X, Y)$  为慢变包络, 非线性折射率取决于温度分布, 即  $\Delta n = \beta \Delta T = \beta(T - T_0)$ ,  $\beta$  为非线性热系数,  $T_0$  为边界的温度. 铅玻璃样品的尺寸为  $a \times b$ , 如图 1 所示.

对方程 (1) 和方程 (2) 无量纲化  $x = X/b$ ,  $y = Y/b$ ,  $z = Z/(kb^2)$ ,  $\psi = A/A_0$ ,  $A_0^2 = (n_0 \kappa)/(\alpha \beta k^2 b^4)$ ,  $G = k^2 b^2 \Delta n/n_0$ , 可得

$$i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \alpha_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) + G \psi = 0; \quad (4)$$

$$\nabla_{xy}^2 G = -|\psi|^2. \quad (5)$$

$x$  的范围是  $-d/2$  到  $d/2$ , 其中  $d = a/b$ ,  $y$  的范围是  $-1/2$  到  $1/2$ . 采用格林函数法可以得到方程 (5) 的一般解为<sup>[16]</sup>

$$G = \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} R(x, y, x_0, y_0) \times |\psi(x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0, \quad (6)$$

其中  $R(x, y, x_0, y_0)$  是矩形铅玻璃的响应函数, 可以用保角变换法求解响应函数. 其形式为<sup>[16]</sup>

$$R(x, y, x_0, y_0) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(u - u_0)^2 + (v + v_0)^2}{(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2}, \quad (7)$$

其中,

$$\begin{aligned} u &= [\text{sn}(2Kx/d, k) \text{dn}(2K(y - 1/2)/d, k')] \\ &\quad / [1 - \text{dn}^2(2Kx/d, k) \text{sn}^2(2K(y - 1/2)/d, k')], \\ v &= [\text{cn}(2Kx/d, k) \text{dn}(2Kx/d, k) \text{sn}(2K(y - 1/2)/d, k') \\ &\quad \times \text{cn}(2K(y - 1/2)/d, k')] \\ &\quad / [1 - \text{dn}^2(2Kx/d, k) \\ &\quad \times \text{sn}^2(2K(y - 1/2)/d, k')], \end{aligned}$$

$\text{sn}$ ,  $\text{dn}$ ,  $\text{cn}$  均为雅氏椭圆函数<sup>[17]</sup>.  $d = 2K/K'$ ,  $K$  和  $K'$  分别是  $k$  和  $k'$  的第一类完全椭圆积分,  $k^2 + k'^2 = 1$ .

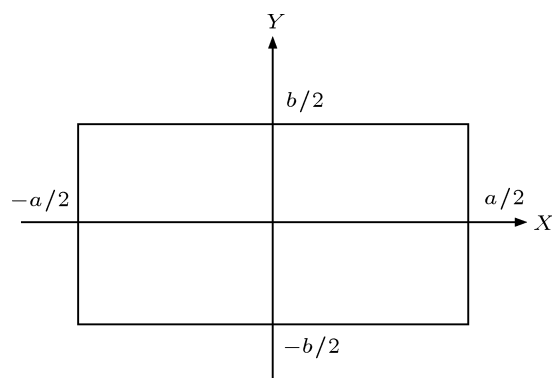


图1 铅玻璃样品 (长边长度为  $a$ , 短边长度为  $b$ )

将方程 (6) 代入方程 (4) 可得到

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \alpha_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \\ + \psi \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} R(x, y, x_0, y_0) \\ \times |\psi(x_0, y_0)|^2 dx_0 dy_0 = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

根据变分法<sup>[18]</sup>, 方程 (8) 是泛函

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} \ell \left( \psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) dx dy dz \quad (9)$$

的变分问题的欧拉 - 拉格朗日方程. 变分方程为

$$\delta J = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} \ell \left( \psi, \psi^*, \frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi^*}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi^*}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}, \frac{\partial \psi^*}{\partial z} \right) dx dy dz = 0, \quad (10)$$

式中拉格朗日密度为

$$\ell = \ell_l + \ell_n. \quad (11)$$

其中  $\ell_l = i[\psi^* \partial \psi / \partial z - \psi \partial \psi^* / \partial z] / 2 - \alpha_x |\partial \psi / \partial x|^2 / 2 - \alpha_y |\partial \psi / \partial y|^2 / 2$ , 是  $\ell$  的线性部分;  $\ell_n = |\psi|^2 G / 2$ , 是  $\ell$  的非线性部分.

我们假设方程 (8) 的试探解为

$$\begin{aligned} \psi(x, y, z) = & U(z) \exp[i\theta(z)] \\ & \times \exp \left[ -\frac{x^2}{2w_x(z)^2} - \frac{y^2}{2w_y(z)^2} \right] \\ & \times \exp[ic_x(z)x^2 + ic_y(z)y^2], \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $U(z)$  是复振幅的大小,  $\theta(z)$  是复振幅的相位,  $w_x(z)$ ,  $w_y(z)$ ,  $c_x(z)$ ,  $c_y(z)$  分别是横向  $x, y$  方向的束宽和波前曲率系数. 将试探解 (12) 式代入变分方程 (10) 中我们可得到平均变分问题, 即

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} \langle \ell \rangle dz = 0, \quad (13)$$

式中  $\langle \ell \rangle$  是平均拉格朗日函数.

$$\begin{aligned} \langle \ell \rangle \approx & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ell_l dx dy \\ & + \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} \ell_n dx dy. \end{aligned} \quad (14)$$

因为光束的尺寸远远小于铅玻璃样品的尺寸, 所以  $\ell_l$  的积分上下限可近似为  $-\infty$  到  $+\infty$ . 将 (12) 式代入 (11) 式计算后得到

$$\begin{aligned} \ell_l = & -U^2 \exp \left[ -\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right] \left\{ x^2 \left[ 2\alpha_x c_x^2 + \frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\alpha_x}{2w_x^4} \right] \right. \\ & \left. + y^2 \left[ 2\alpha_y c_y^2 + \frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\alpha_y}{2w_y^4} \right] + \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\ell_n = 1/2 U^4 \exp \left[ -\frac{x^2}{w_x^2} - \frac{y^2}{w_y^2} \right]$$

$$\begin{aligned} & \times \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} R(x, y, x_0, y_0) \\ & \times \exp \left[ -\frac{x_0^2}{w_x^2} - \frac{y_0^2}{w_y^2} \right] dx_0 dy_0. \end{aligned} \quad (16)$$

### 3 试探解参量的演化方程

将 (7) 式代入变分方程 (14) 中, 整理后可以得到平均拉格朗日函数

$$\begin{aligned} \langle \ell \rangle = & -\frac{\pi U(z)^2}{4w_x(z)w_y(z)} \times [\alpha_x w_y(z)^2 + \alpha_y w_x(z)^2 \\ & + 4\alpha_x c_x(z)^2 w_x(z)^4 w_y(z)^2 + 4\alpha_y c_y(z)^2 w_x(z)^2 w_y(z)^4 \\ & + 2w_x(z)^4 w_y(z)^2 c'_x(z) + 2w_x(z)^2 w_y(z)^4 c'_y(z) \\ & + 4w_x(z)^2 w_y(z)^2 \theta'(z)] + \frac{U(z)^4}{2} F[w_x(z), w_y(z)], \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} & F[w_x(z), w_y(z)] \\ = & \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} \exp \left[ -\frac{x^2}{w_x(z)^2} - \frac{y^2}{w_y(z)^2} \right] \\ & \times \int_{-1/2}^{1/2} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2} \\ & \times \exp \left[ -\frac{x_0^2}{w_x(z)^2} - \frac{y_0^2}{w_y(z)^2} \right] dx_0 dy_0 dx dy. \end{aligned} \quad (18)$$

根据平均变分方程 (13) 的要求, 我们可以得到

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta U(z)} = \frac{\partial \langle \ell \rangle}{\partial U(z)} - \frac{d}{dz} \frac{\partial \langle \ell \rangle}{\partial \frac{dU(z)}{dz}} = 0, \quad (19)$$

以及

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta w_x(z)} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta w_y(z)} = 0, \quad (21)$$

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta c_x(z)} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta c_y(z)} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\delta \langle \ell \rangle}{\delta \theta(z)} = 0, \quad (24)$$

其中由方程 (24) 可以得到

$$\frac{d[\pi U(z)^2 w_x(z) w_y(z)]}{dz} = 0, \quad (25)$$

方程 (25) 说明  $\pi U(z)^2 w_x(z) w_y(z)$  等于一个常数. 功率

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^2 dx dy = \pi U(z)^2 w_x(z) w_y(z)$$

可知, 在  $z = 0$  处的入射功率  $P_0 = \pi U_0^2 w_{x0} w_{y0}$ , 其中  $U_0 = U(z)|_{z=0}$ ,  $w_{i0} = w_i(z)|_{z=0}$ . 所以方程 (25) 实际上代表的是光束在传输过程中功率守恒, 因此我们可以得到

$$U(z)^2 = \frac{P_0}{\pi w_x(z) w_y(z)}. \quad (26)$$

利用 (26), 整理方程 (19), (20), (21), (22), (23) 可得到下列试探解参数演化方程

$$\begin{aligned} & \frac{d\theta(z)}{dz} + \frac{\alpha_x}{2w_x(z)^2} + \frac{\alpha_y}{2w_y(z)^2} \\ & + \frac{2P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} - \frac{P_0Q_2}{4\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)} \\ & - \frac{P_0Q_1}{4\pi^2 w_x(z) w_y(z)^2} = 0, \end{aligned} \quad (27)$$

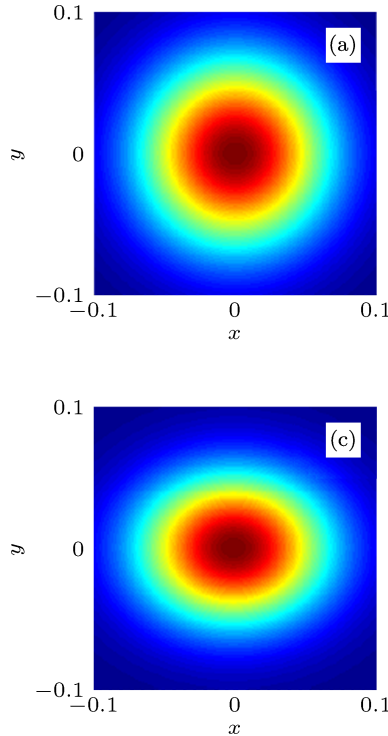


图2 孤子光强分布图 (a)  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ; (b)  $\alpha_x = 1.5, \alpha_y = 1$ ; (c)  $\alpha_x = 2, \alpha_y = 1$ ; (d)  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$

对方程 (30), (31) 求导, 并结合方程 (28), (29) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_x} \frac{d^2 w_x(z)}{dz^2} &= \frac{\alpha_x}{w_x(z)^3} + \frac{P_0Q_1}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} \\ & - \frac{2P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^3 w_y(z)^2}, \quad (32) \\ \frac{1}{\alpha_y} \frac{d^2 w_y(z)}{dz^2} &= \frac{\alpha_y}{w_y(z)^3} + \frac{P_0Q_2}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} \\ & - \frac{2P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^3}. \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dc_x(z)}{dz} + 2c_x(z)^2 \alpha_x - \frac{\alpha_x}{2w_x(z)^4} \\ & + \frac{P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^4 w_y(z)^2} - \frac{P_0Q_1}{2\pi^2 w_x(z)^3 w_y(z)^2} = 0, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{dc_y(z)}{dz} + 2c_y(z)^2 \alpha_y - \frac{\alpha_y}{2w_y(z)^4} \\ & + \frac{P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^4} - \frac{P_0Q_2}{2\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^3} = 0, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\frac{dw_x(z)}{dz} - 2w_x(z)c_x(z)\alpha_x = 0, \quad (30)$$

$$\frac{dw_y(z)}{dz} - 2\alpha_y w_y(z)c_y(z) = 0, \quad (31)$$

其中

$$Q = F[w_x(z), w_y(z)], \quad Q_1 = \partial Q / \partial w_x(z),$$

$$Q_2 = \partial Q / \partial w_y(z).$$

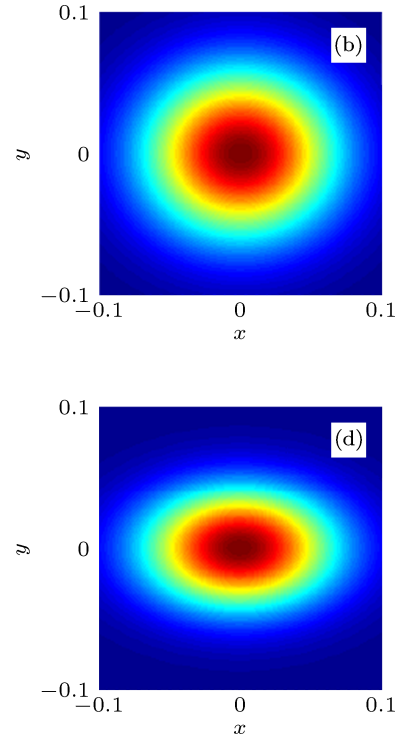


图2 孤子光强分布图 (a)  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ; (b)  $\alpha_x = 1.5, \alpha_y = 1$ ; (c)  $\alpha_x = 2, \alpha_y = 1$ ; (d)  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$

对方程 (30), (31) 求导, 并结合方程 (28), (29) 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha_x} \frac{d^2 w_x(z)}{dz^2} &= \frac{\alpha_x}{w_x(z)^3} + \frac{P_0Q_1}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} \\ & - \frac{2P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^3 w_y(z)^2}, \quad (32) \\ \frac{1}{\alpha_y} \frac{d^2 w_y(z)}{dz^2} &= \frac{\alpha_y}{w_y(z)^3} + \frac{P_0Q_2}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} \\ & - \frac{2P_0Q}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^3}. \end{aligned} \quad (33)$$

将方程 (32), (33) 与一维情况下经典力学中的牛顿第二定律  $F = ma$  比较,  $w_i(z)$  ( $i = x, y$ ) 等效为空间坐标,  $z$  等效为时间,  $1/\alpha_i$  是等效粒子的质量,

$$\begin{aligned} F_x &= \alpha_x / w_x(z)^3 + P_0Q_1 / [\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2] \\ & - 2P_0Q / [\pi^2 w_x(z)^3 w_y(z)^2], \end{aligned}$$

$$F_y = \alpha_y/w_y(z)^3 + P_0 Q_2 / [\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2] - 2P_0 Q / [\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^3]$$

是等效力.  $F_i$  的前两项使等效粒子加速 (相当于衍射效应使光束展宽),  $F_i$  的最后一项使等效粒子减速 (相当于非线性效应使得光束压缩). 如果  $F_i = 0$ , 那么初速度为零的等效粒子将保持静止, 这就是空间孤子状态. 由此我们可以得到

$$\frac{\alpha_x}{w_x(z)^3} + \frac{P_0 Q_1}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} - \frac{2P_0 Q}{\pi^2 w_x(z)^3 w_y(z)^2} = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\alpha_y}{w_y(z)^3} + \frac{P_0 Q_2}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^2} - \frac{2P_0 Q}{\pi^2 w_x(z)^2 w_y(z)^3} = 0, \quad (35)$$

由方程 (34) 和 (35) 可以求出  $x, y$  方向满足光束的衍射展宽与非线性压缩相互平衡的方程

$$P_{cx} = \frac{\pi^2 w_y^2 \alpha_x}{2Q - Q_1 w_x}, \quad (36)$$

$$P_{cy} = \frac{\pi^2 w_x^2 \alpha_y}{2Q - Q_2 w_y}, \quad (37)$$

$P_{cx}$  表示  $x$  方向满足光束的衍射展宽与非线性压缩相互平衡时的功率,  $P_{cy}$  表示  $y$  方向满足光束的衍射展宽与非线性压缩相互平衡时的功率. 当  $P_0 = P_{cx} = P_{cy}$  时, 则从束腰入射的椭圆高斯光束两横向的衍射展宽与非线性压缩同时达到平衡, 椭圆高斯光束的初始束宽保持不变, 形成稳定传输的椭圆空间光孤子. 我们称满足此条件的输入功率为临界功率, 用  $P_c$  表示, 因此我们可以得到

$$P_c = \frac{\pi^2 w_y^2 \alpha_x}{2Q - Q_1 w_x}, \quad (38)$$

$$\frac{w_y^2 \alpha_x}{2Q - Q_1 w_x} = \frac{w_x^2 \alpha_y}{2Q - Q_2 w_y}. \quad (39)$$

从方程 (38) 和 (39) 可以看出, 临界功率  $P_c$  既跟光束的束宽  $w_x, w_y$  有关, 又跟各向异性衍射效应  $\alpha_x, \alpha_y$  有关. 当各向异性衍射效应  $\alpha_x$  或者  $\alpha_y$  越大时, 临界功率  $P_c$  也越大.  $\alpha_x$  或者  $\alpha_y$  越大使得光束的衍射效应越强, 临界功率  $P_c$  越大使得光束的非线性效应越强. 当光束的衍射效应引起的展宽跟非线性效应引起的压缩达到平衡时, 就能够形成空间光孤子.  $P_c, \alpha_x, \alpha_y, w_x, w_y$  这五个参量中,  $\alpha_x, \alpha_y$  是由介质材料的性质决定的, 对于特定的材料来说  $\alpha_x, \alpha_y$  是给定的, 对于不同的材料  $\alpha_x, \alpha_y$  则不一样.

当知道特定材料的  $\alpha_x, \alpha_y$  时, 我们只需给定  $P_c, w_x, w_y$  中的一个参量, 就可以从方程 (38), (39) 数值地求出另外两个参量, 进而可以求出  $U, c_x, c_y, \theta$ , 然后将解代入试探解 (12) 式即得到在线性各向异性强非局域非线性介质中传输的孤子变分解, 其满足初始条件 (在  $z = 0$  处)

$$\psi(x, y) = \sqrt{\frac{P_0}{\pi w_{x0} w_{y0}}} \exp \left[ -\frac{x^2}{2w_{x0}^2} - \frac{y^2}{2w_{y0}^2} \right]. \quad (40)$$

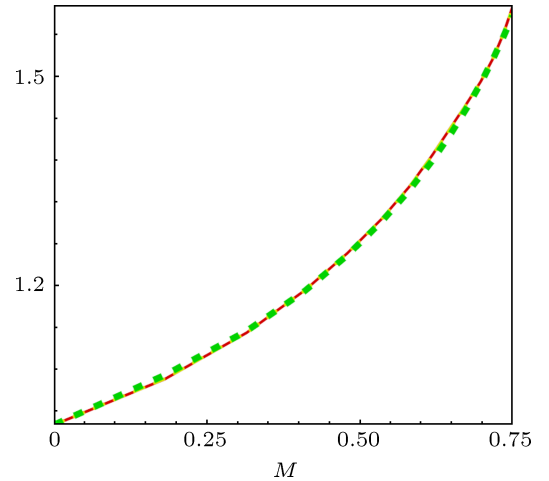


图3 孤子椭圆度与各向异性衍射效应的关系图 (虚线为  $\sqrt[3]{\alpha_x/\alpha_y}$  与  $M$  的关系, 实线为椭圆度  $w_x/w_y$  与  $M$  的关系)

一般情况下, 对于铅玻璃中的响应函数  $R(x, y, x_0, y_0)$ , 解析求出  $\ell_n$  是困难的, 我们只能求其数值积分. 方程 (38) 和 (39) 的部分计算结果如表 1 所示.

表 1 中对应的孤子光强分布图如图 2 所示. 窗口大小均为  $0.2 \times 0.2$  (归一化后数值), 横轴为  $x$ , 纵轴为  $y$ . 从图中可以看到当  $\alpha_y = 1$ , 随着  $\alpha_x$  的不断增大, 孤子的椭圆度  $w_x/w_y$  也在增大, 当  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$  时孤子的椭圆度达到了 1.6.

表 1 计算结果

|     | $\alpha_x$ | $\alpha_y$ | $w_x$ | $w_y$ | $P_c$   |
|-----|------------|------------|-------|-------|---------|
| (a) | 1          | 1          | 0.048 | 0.048 | 5499.83 |
| (b) | 1.5        | 1          | 0.048 | 0.042 | 7714.16 |
| (c) | 2          | 1          | 0.048 | 0.038 | 9833.62 |
| (d) | 4          | 1          | 0.048 | 0.03  | 17824.8 |

计算出的椭圆度  $w_x/w_y$  与各向异性衍射效应  $\alpha_x, \alpha_y$  的关系如图 3 所示, 横坐标为  $M = (\alpha_x - \alpha_y)/\alpha_x$ , 虚线纵坐标为  $\sqrt[3]{\alpha_x/\alpha_y}$ , 实线纵坐标

为椭圆度  $w_x/w_y$ . 从图中可以看到, 实线和虚线符合的很好, 我们可得到经验公式

$$\frac{w_x}{w_y} \approx \sqrt[3]{\frac{\alpha_x}{\alpha_y}}. \quad (41)$$

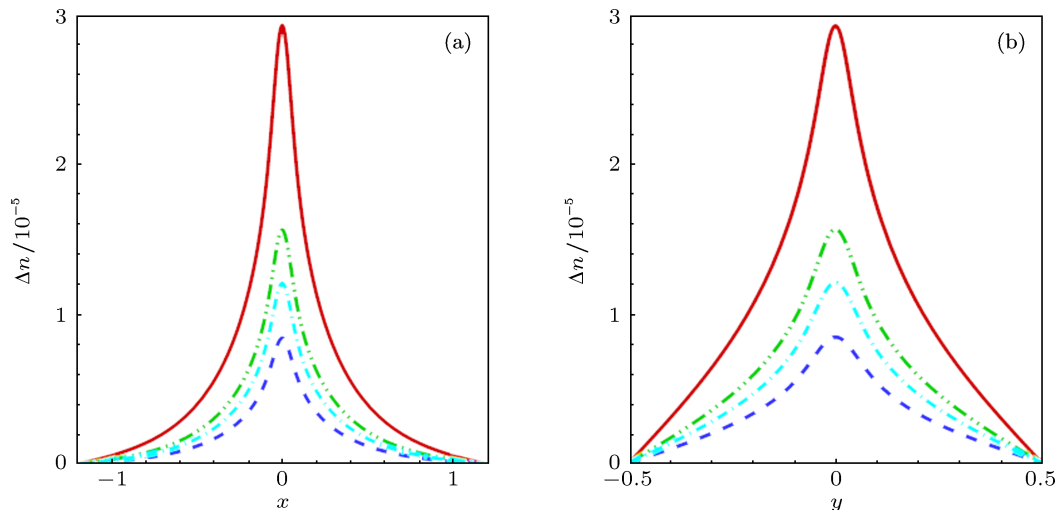


图4 图中为不同衍射效应下变分解的  $\Delta n$  的比较, (虚线:  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ; 点虚线:  $\alpha_x = 1.5, \alpha_y = 1$ ; 双点虚线:  $\alpha_x = 2, \alpha_y = 1$ ; 实线:  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$ ) (a)  $x$  方向  $\Delta n$  的分布; (b)  $y$  方向  $\Delta n$  的分布

当  $\alpha_x, \alpha_y$  取不同值时, 铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值也有明显不同.

由图4可见, 当  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$  时, 铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值为  $0.84 \times 10^{-5}$ . 随着  $\alpha_x$  的增大, 铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值也在增加. 当  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$  时, 铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值达到了  $2.92 \times 10^{-5}$ , 是线性各向同性 (即  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ) 时的 3.5 倍. 此时的  $w_x$  为 0.048,  $w_y$  为 0.03,  $w_x$  是  $w_y$  的 1.6 倍, 椭圆度与文献 [8] 中实验观察到的椭圆孤子的椭圆度一样. 而文献 [8] 中提到铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的测量值为  $5 \times 10^{-5}$ , 而他们的理论值 (其理论模型是线性各向同性) 只有  $2 \times 10^{-5}$ , 测量值是理论值的 2.5 倍. 可见各向异性衍射效应  $\alpha_x, \alpha_y$ , 对椭圆孤子的形成有很重要的影响. 线性各向同性 (即  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ) 时, 本文计算得到的铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值与文献 [8] 得到的计算值不一样, 是因为文献 [8] 的理论计算所用的样品尺寸远远小于实验的样品尺寸, 而我们的铅玻璃模型尺寸是跟文献 [8] 的实验样品尺寸完全一样的. 当边界温度一样时, 尺寸越大的铅玻璃温度梯度越小, 从而导致铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值越小, 所以我们计算得到的铅玻璃中心位置的  $\Delta n$  的值比文献 [8] 得到的计算

由经验公式可以看出, 衍射系数越大, 对应的束宽越大. 在物理上可以解释为: 衍射系数越大, 那么在那个方向上光束的衍射也就越强, 因此形成孤子时那个方向的束宽也就越大.

值小.

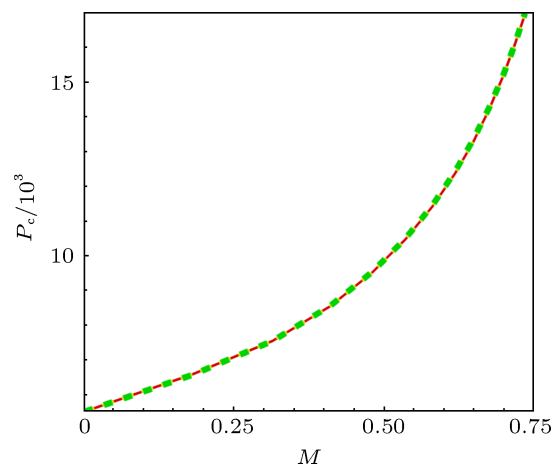


图5 临界功率  $P_c$  与  $M$  的关系 (虚线为数值解的临界功率  $P_c$ , 实线为变分解的临界功率  $P_c$ )

#### 4 变分解与数值解的比较

为了验证变分解的正确性, 将变分解的临界功率  $P_c$  与数值解的临界功率  $P_c$  比较如图5所示. 图中横坐标为  $M = (\alpha_x - \alpha_y)/\alpha_x$ , 纵坐标为临界功率  $P_c$ , 虚线为数值解的临界功率  $P_c$ , 实线为变分解的临界功率  $P_c$ , 变分解与数值解符合得很好.

变分解的光场  $\psi$  分布与数值解的光场  $\psi$  分布相比较, 比较结果如图6所示.

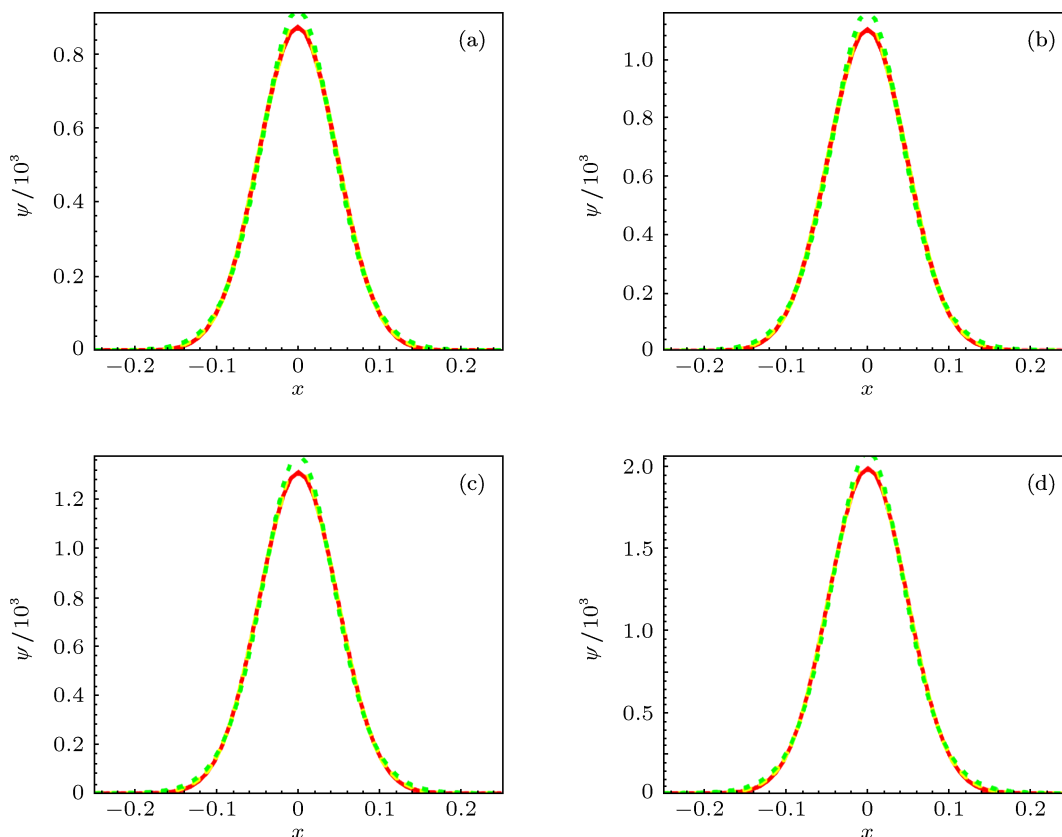


图6 不同各向异性衍射效应下, 变分解的光场  $\psi$  分布与数值解的光场  $\psi$  分布比较 (虚线为数值解的光场  $\psi$  分布, 实线为变分解的光场  $\psi$  分布) (a)  $\alpha_x = 1, \alpha_y = 1$ ; (b)  $\alpha_x = 1.5, \alpha_y = 1$ ; (c)  $\alpha_x = 2, \alpha_y = 1$ ; (d)  $\alpha_x = 4, \alpha_y = 1$

由图6可见, 变分解与数值解基本符合, 从而证明变分解的正确性.

## 5 结 论

在非局域非线性薛定谔方程的基础上引入各向异性衍射效应, 从而得到线性各向异性非局域非线性薛定谔方程. 采用变分法研究光束在矩形铅

玻璃中传输的演化规律, 得到椭圆孤子的变分解. 我们的计算结果表明, 各向异性衍射效应 (即  $\alpha_x, \alpha_y$ ) 对矩形铅玻璃椭圆孤子的形成有很重要的影响. 椭圆孤子的椭圆度与各向异性衍射效应的关系为  $w_x/w_y \approx \sqrt[3]{\alpha_x/\alpha_y}$ . 为了验证变分解的正确性, 我们又采用牛顿迭代法求线性各向异性非局域非线性薛定谔方程的数值解, 将变分解和数值解相互比较, 结果表明我们的变分解是正确的.

- [1] Aitchison J S 1990 *Opt. Lett.* **15** 471
- [2] Segev M, Crosignani B, Yariv A 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 923
- [3] Wang X S, She W L, Lee W K 2004 *Opt. Lett.* **29** 277
- [4] Snyder A W, Mitchell D J 1997 *Science* **276** 1538
- [5] Wang X, Bezryadina A, Chen Z 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 123903
- [6] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016612
- [7] Dreischuh A, Neshev D N, Petersen D E, Bang O, Krolikowski W 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 043901.
- [8] Rotschild C, Cohen O, Manela O, Segev M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 213904
- [9] Bang O, Krolikowski W, Wyller J, Rasmussen J J 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046619
- [10] Conti C, Peccianti M, Assanto G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 113902
- [11] Guo Q 2004 *Optical Transmission, Switching, and Subsystems* (Washington: SPIE 5281) 581
- [12] Guo Q, Chi S 2000 *J. Opt. A-Pure Appl. Op.* **2** 5
- [13] Polyakov S V, Stegeman G I 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046622
- [14] Conti C, Oecianti M, Assanto G 2005 *Phys. Rev. E* **72** 066614
- [15] Iturbe-Castillo M D, Stepanov S, Sanchez-Mondragon J J 1996 *Opt. Lett.* **21** 1622
- [16] Shou Q, Jiang Q, Guo Q 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 205202
- [17] Wang z x, Guo D R 2000 *The Series of Advanced Physics of Peking University Introduction to Special Function* (Vol. 1) (Beijing: Peking University Press) p520 (in Chinese) [王竹溪, 郭敦仁 2000 北京大学物理学丛书特殊函数概论 (第一版) (北京: 北京大学出版社) 第520页]
- [18] Goldstein H, Poole C, Safko J 2005 *Classical Mechanics* (Vol. 3) (Beijing: Higher Education Press) p558-598

# The characteristics of elliptical optical soliton in anisotropic medium\*

Li Qiong Zhai Yong-Hui Liang Guo Guo Qi<sup>†</sup>

(Laboratory of Nanophotonic Functional Materials and Devices, South China Normal University, Guangzhou 510631)

(Received 9 May 2012; revised manuscript received 21 August 2012)

## Abstract

Formation of elliptical optical soliton in rectangular lead glass is theoretically investigated, and an anisotropic diffraction effect is introduced into our theoretical model. Using the variational approach, we obtain an analytic elliptic soliton solution in a strongly nonlocal medium with anisotropy, which demonstrates that anisotropic diffraction effect has a great influence on the formation of the elliptical optical soliton. To confirm the analytic solution, we work out the numerical solution by the Newton iterative method. And the analytic solution accords with the numerical solution very well.

**Keywords:** strong nonlocality, linear anisotropic, variational approach

**PACS:** 42.25.Bs, 42.65.-k, 42.65.Tg

**DOI:** 10.7498/aps.62.024202

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074080, 10904041), the Key Program of the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 10151063101000017), and the Specialized Research Foundation for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20094407110008).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: guoq@snnu.edu.cn