

基于变分方法的有限区域风场分解与重构 I: 理论框架和仿真实验*

赵延来[†] 黄思训 杜华栋

(解放军理工大学气象学院, 南京 211101)

(2012 年 2 月 9 日收到; 2012 年 9 月 4 日收到修改稿)

众所周知, 风场分解与重构最有效的方法就是引入速度势和流函数, 其一般通过求解两个 Poisson 方程得到. 由于速度势和流函数在边界上的耦合性质, 有限区域风场分解是不唯一的, 这对风场分解带来了很大困难. 本文采用变分伴随结合正则化方法来克服风场分解的不唯一性, 其核心是把速度势和流函数的边值作为控制变量来反演. 目标泛函由两部分组成, 一是衡量重构风场误差大小的观测项; 二是保证风场分解问题适定的正则化项, 其目的在于寻求具有气象意义的稳定正则化解. 数值试验结果表明, 在正确选取正则化参数后, 利用变分伴随结合正则化方法进行有限区域风场分解与重构是有效可行的.

关键词: 变分伴随方法, 正则化, 速度势和流函数, 风场分解和重构

PACS: 92.60.Gn, 92.60.Wc

DOI: 10.7498/aps.62.039204

1 引言

风场分解和重构一直是气象研究中的一个热点问题. 根据 Helmholtz 原理, 水平风场 $\mathbf{V}$ 可以分解为辐散风 $\mathbf{V}_\chi$ 和旋转风 $\mathbf{V}_\psi$ 两部分

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_\chi + \mathbf{V}_\psi = \nabla\chi + \mathbf{k} \times \nabla\psi, \quad (1)$$

其中, ∇ 为矢量梯度算子, χ 和 ψ 分别表示速度势和流函数. 速度势和流函数作为风场分解的基本工具, 其在大气科学各领域中有着广泛的应用^[1-3]. 一方面, 通过风场分解可以将水平风场分解为旋转风和辐散风两部分, 进而用于中尺度动力系统的诊断分析, 如研究旋转或辐散辐合运动对天气过程的影响及其相互作用^[4,5]; 另一方面, 风场重构就是在给定风场的边界条件时, 如何通过涡度和散度场重建原始风场, 对于以涡度和散度为基本控制变量的数值模式而言^[6], 这是非常必要的一步. 由上述分析可知, 风场分解和重构的关键均在于准确求解速度势和流函数. 但是速度势和流函数不是直接观测

量, 需要用观测风场通过求解 Poisson 方程得到.

$$\Delta\chi = D, \quad (2)$$

$$\Delta\psi = \zeta, \quad (3)$$

其中, Δ 为二维拉普拉斯算子, D 和 ζ 分别表示风场的水平散度和垂直涡度.

对于全球而言, 由于不存在侧边界, 可以采用周期边界条件求得速度势和流函数的唯一精确解^[7]. 但是对于有限区域而言, 此时必须考虑边界条件. 引入边界切向风速 V_t 和法向风速 V_n , 根据 (1) 式可知

$$V_t = \mathbf{s} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial\chi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial n}, \quad (4)$$

$$V_n = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial\chi}{\partial n} - \frac{\partial\psi}{\partial s}, \quad (5)$$

其中, $\mathbf{s}$ 和 $\mathbf{n}$ 分别表示边界切向 (沿逆时针方向) 和 (外) 法向单位向量, $\frac{\partial}{\partial s}$ 和 $\frac{\partial}{\partial n}$ 则分别表示求取变量在边界上的切向和法向导数. 由 (4) 和 (5) 式可知, 有限区域上速度势和流函数的边界条件既不是简单的 Dirichlet 问题 (第一类边界条件) 和 Neumann

* 国家自然科学基金 (批准号: 41175025, 41105012) 和国家科技支撑计划 (批准号: 2008BAC37B03) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: huangsxp@yahoo.com.cn

问题(第二类边界条件),也不是 Robin 问题(第三类边界条件).由于 χ 和 ψ 在边界上的耦合性,使得 Poisson 方程 (2) 和 (3) 式无法直接进行计算,所以有限区域风场分解至今还没有很好地得到解决.

为了克服这个问题,气象学家做了很多有意义的尝试.最初,Phillips^[8]提出用边界法向风速的线积分来确定流函数的边界值,从而求得 ψ 场.随后,Sangster^[9]首先求解零 Dirichlet 边界对应的 χ 场,然后根据 (5) 式确定 ψ 的边界条件,进而求得 ψ 场.后来的研究表明,该方法虽然满足风场分解后散度风动能最小的标准,但是重构风场和原始风场之间存在较大误差.在此基础上,Shukla 和 Saha^[10]提出同时采用边界法向和切向风速,通过迭代方法得到 χ 和 ψ 的边界条件,从而求得 χ 和 ψ 场. Stephens 和 Johnson^[11]认为 χ 和 ψ 在边界上是周期分布的,利用有限差分近似和 Fourier 变换计算了有限区域的 χ 和 ψ . Lynch^[12]则通过 χ 和 ψ 的 Dirichlet 边界或 Neumann 边界的八种组合来考虑有限区域的风场分解.上述方法的迭代收敛条件要求较高,很难满足;而且只能实现对某些天气个例的分析,不具有普适性.

同时不少学者从另外一个角度出发,考虑将水平风场分解为旋转风、辐散风和调和风三部分.如 Bijlsma 等^[13]将 χ 和 ψ 分离成两部分,一部分在边界取零值,对应的风速场在区域内是无辐散和无旋的,即旋转风和辐散风;另一部分在边界为原 χ 和 ψ 值,对应的风速场在区域内既无旋又无辐散,即调和风. Chen 和 Kuo^[14,15]采用正弦/余弦调和函数对 χ 和 ψ 展开,求解边界条件为零时内部有旋风和辐散风对应的 χ 和 ψ ,以及区域内涡度和散度为零时调和风对应的 χ 和 ψ ,并进行调和风的迭代求解,最终得到全风场的 χ 和 ψ . 后来周玉淑等^[16,17]将 Chen 的方法应用于台风和暴雨的诊断分析.

Bishop^[18]认为,由于受到区域边界的限制,对于非线性分布的有限区域风场,往往难于重建准确的风场.而且从数学的观点来看,由于 Poisson 方程 (2) 和 (3) 式及其边界条件 (4) 和 (5) 式对应的齐次系统存在非零解,所以有限区域上风场分解问题的解是不唯一;但是这些解却能重构确定的初始风场.为了克服风场分解的不适定性,本文利用变分伴随方法,结合反问题中的正则化思想^[19-22],把 χ 和 ψ 的边值条件作为控制变量来反演,通过极小化给定的目标泛函,计算得到 χ 和 ψ 的边界条件,然后分别代入 Poisson 方程 (2) 和 (3),即可实现有限区域

风场的分解.最后仿真试验的结果表明,在正确选取正则化参数后,该方法能够有效进行有限区域风场分解,重构得到的风场具有很高的精度,为实际应用开辟了一条新路.

2 问题重述与模型构建

2.1 风场分解可行性分析

根据偏微分方程理论可知^[23],水平风场 V 分解成 (1) 式的形式,在数学上具有一定的条件限制.设 $V \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$,则 χ 和 ψ 分别是满足如下问题的解

$$(\nabla \chi, \nabla \mu) = (V, \nabla \mu), \quad \forall \mu \in H^1(\Omega), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &(-\text{curl} \psi, -\text{curl} \phi) \\ &= (V - \nabla \chi, -\text{curl} \phi), \quad \forall \phi \in \Phi \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$H^1(\Omega) = \{\mu | \mu \in L^2(\Omega), \nabla \mu \in L^2(\Omega)\},$$

$$\Phi = \{\phi | \phi \in H^1(\Omega), \phi|_{\Gamma} = 0\},$$

$$\text{curl} \psi = \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right).$$

由此可见,在有限区域上由风场 V 计算速度势 χ 和流函数 ψ 必须要在满足上述的条件下,才可转变为 Poisson 方程 (2) 和 (3) 的形式.关于边界条件约束,也一定得从 (6) 和 (7) 式相应导出.由于问题的复杂性,我们采用反问题中的正则化方法来最优决定 χ 和 ψ 的边值.

2.2 不唯一性说明

设 $f = \chi_0 + i\psi_0$ 为区域 Ω 内解析并在闭区间 $\bar{\Omega}$ 上连续的任意函数.由 Cauchy-Riemann 方程可知

$$\nabla \chi_0 + k \times \nabla \psi_0 = 0.$$

同时由解析函数的性质可知, χ_0 和 ψ_0 必为区域 Ω 上的调和函数,且 ψ_0 为 χ_0 的共轭调和函数

$$\Delta \chi_0 = 0,$$

$$\Delta \psi_0 = 0.$$

设 χ 和 ψ 是满足方程 (1), (2) 和 (3) 的解.此时,令 $\chi' = \chi + \chi_0$, $\psi' = \psi + \psi_0$; 根据上述方程,可以判断 χ' 和 ψ' 也是满足方程 (1), (2) 和 (3) 的一个解

$$V = \nabla \chi' + k \times \nabla \psi',$$

$$\Delta\chi' = D,$$

$$\Delta\psi' = \zeta.$$

由于 f 的任意性, 所以在区域 Ω 上风场分解是不唯一的. 对于全球区域而言, 此时调和函数 χ_0 和 ψ_0 简化为任意常数.

2.3 模型构建

为了保证有限区域风场分解的唯一性, 人们采取了各种假定或判断标准. Sangster^[9] 假定速度势 χ 在边界消失, 即 $\chi|_r = 0$. Lynch^[12] 把分解后散度风动能达到最小作为判断标准, 得到 $\frac{\partial\psi}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{V}$ 的边界条件. 但是上述标准对于以辐合辐散为主的中尺度强对流天气而言, 明显是不适合的. Dimet 和 Mohamed^[24] 采用变分最优控制方法, 把 ψ 和 χ 在边界上的值作为控制变量来反演, 然后再求解 Poisson 方程.

$$J[\alpha, \beta] = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} - u^0 \right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} - v^0 \right)^2 \right] d\Omega, \quad (8)$$

其中

$$\chi|_r = \alpha, \quad (9)$$

$$\psi|_r = \beta. \quad (10)$$

由上述的分析可知, 泛函 (8) 仍然未能克服风场分解的不适定性. 在此基础之上, 我们引入反问题中的正则化方法, 构建新的泛函如下:

$$J[\alpha, \beta] = J_0 + \gamma J_{\text{reg}}, \quad (11)$$

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial\chi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} - u^0 \right)^2 + \left(\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial x} - v^0 \right)^2 \right] d\Omega, \quad (12)$$

$$J_{\text{reg}} = \frac{\gamma}{2} \int_{\Omega} (\chi^2 + \psi^2) d\Omega, \quad (13)$$

其中, J_0 为观测项, 表征的是重构风场与观测风场之间的误差大小, 用以控制整个反演过程的精度; J_{reg} 为正则化项 (也称稳定泛函项), 其相当于极小化速度势和流函数的模^[25]. 正则化项 J_{reg} 的意义有二: 其一, 克服反演问题的不唯一性, 保证目标泛函 (11) 式解唯一, 我们所求的正则化解实际上是广义解, 它满足两点要求: 正则化解存在且唯一; 如果原问题有解, 则正则化解即为解; 其二, 正则化项加

入具有稳定性, 当误差趋于零时, 正则化解收敛到真解 (如果真解存在), 或者收敛于无误差的广义解. 由于观测项 J_0 中已经使用了 χ 和 ψ 的导数, 故本文 J_{reg} 项对 χ 和 ψ 的模取极小, 即 χ 和 ψ 的 L^2 模具有协调性.

由反问题的理论可知, 上述方法成功的关键在于正确地选取正则化参数 γ . 记水平风场 $\mathbf{V}$ 的观测

误差为 δ , 此时对应的正则化解为 $\mathbf{X}_{\gamma}^{\delta} = \begin{pmatrix} \alpha_{\gamma}^{\delta} \\ \beta_{\gamma}^{\delta} \end{pmatrix}$,

同时用 H 表示由 $\mathbf{X}_{\gamma}^{\delta}$ 到观测风场 $\mathbf{V}$ 的非线性观测算子 (H 在本文中无法给出具体形式), 此时应有

$$|\mathbf{V} - H(\mathbf{X}_{\gamma}^{\delta})|^2 - \delta^2 = 0. \quad (14)$$

根据 Kirsch 的结论^[26], (14) 式左端是一个关于 γ 的严格单调递增函数, 存在唯一的解 $\gamma = \gamma(\delta)$, 即为所求的正则化参数.

3 变分伴随方法实施

在各种不同的极小化算法当中 (如最速下降法、牛顿下山法、拟牛顿下山法和共轭梯度法等), 均需要计算泛函 J 对 α 和 β 的梯度. 下面我们采用变分伴随的方法来求取泛函梯度表达形式.

3.1 切线性模型

对控制变量 α 和 β 进行扰动, 令 $\tilde{\alpha} = \alpha + \varepsilon \hat{\alpha}$, $\tilde{\beta} = \beta + \varepsilon \hat{\beta}$, 代入控制模型 (2), (3) 和 (9), (10) 式. 令 $\tilde{\chi}$ 和 $\tilde{\psi}$ 分别表示扰动模型对应的速度势和流函数, 则有

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\chi} = D^0, \\ \tilde{\chi}|_r = \tilde{\alpha}; \end{cases} \quad (15)$$

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\psi} = \zeta^0, \\ \tilde{\psi}|_r = \tilde{\beta}. \end{cases} \quad (16)$$

定义 $\hat{H}_i$ 为 $\hat{H}_i = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\tilde{H}_i - H_i}{\varepsilon}$, 其中 $\mathbf{H} = (\chi, \psi, \alpha, \beta)$. 于是将扰动后的模型 (15) 和 (16) 式分别减去控制模型, 再除以 ε 后取极限, 可得切线性模型为

$$\begin{cases} \Delta\hat{\chi} = 0, \\ \hat{\chi}|_r = \hat{\alpha}; \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \Delta\hat{\psi} = 0, \\ \hat{\psi}|_r = \hat{\beta}. \end{cases} \quad (18)$$

3.2 目标泛函的方向导数

利用泛函 J 的表达式 (11), 则 J 在 (α, β) 处沿 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ 方向的导数如下:

$$\begin{aligned} J[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}] &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y} - u^o \right) \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} - v^o \right) \left(\frac{\partial \hat{\chi}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} \right) \right] d\Omega \\ &\quad + \gamma \int_{\Omega} (\chi \hat{\chi} + \psi \hat{\psi}) d\Omega. \end{aligned}$$

对上式分步积分, 再利用 Green 公式可得

$$\begin{aligned} J[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}] &= - \int_{\Omega} [(\Delta \chi - D^o) \hat{\chi} + (\Delta \psi - \zeta^o) \hat{\psi}] d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial s} - V_n^o \right) \hat{\alpha} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial n} - V_t^o \right) \hat{\beta} ds \\ &\quad + \gamma \int_{\Omega} (\chi \hat{\chi} + \psi \hat{\psi}) d\Omega, \end{aligned}$$

其中, V_t^o 和 V_n^o 表示观测风场在区域边界 Γ 上的切向和法向分量. 代入控制模型 (2) 和 (3) 式, 可以得到

$$\begin{aligned} J[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}] &= \gamma \int_{\Omega} (\chi \hat{\chi} + \psi \hat{\psi}) d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial s} - V_n^o \right] \hat{\alpha} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial n} - V_t^o \right) \hat{\beta} ds. \quad (19) \end{aligned}$$

另一方面, 按照方向导数的定义可知

$$J[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}] = \int_{\Gamma} \nabla_{\alpha} J \cdot \hat{\alpha} ds + \int_{\Gamma} \nabla_{\beta} J \cdot \hat{\beta} ds. \quad (20)$$

3.3 伴随模型及伴随边界条件

引入伴随量 P 和 Q , 乘以切线性模型 (17) 和 (18) 式, 并且在整个区域 Ω 上积分

$$\int_{\Omega} (P \Delta \hat{\chi} + Q \Delta \hat{\psi}) d\Omega = 0.$$

利用 Green 公式, 上式变形为

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} \Delta P \hat{\chi} d\Omega + \int_{\Gamma} P \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial P}{\partial n} \hat{\alpha} ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \Delta Q \hat{\psi} d\Omega + \int_{\Gamma} Q \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n} ds - \int_{\Gamma} \frac{\partial Q}{\partial n} \hat{\beta} ds. \quad (21) \end{aligned}$$

将 (19) 和 (21) 式等号两端分别相加, 合并同类项

$$J[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}]$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\Omega} (\gamma \chi + \Delta P) \hat{\chi} d\Omega + \int_{\Gamma} P \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial s} - V_n^o - \frac{\partial P}{\partial n} \right) \hat{\alpha} ds \\ &\quad + \int_{\Omega} (\gamma \psi + \Delta Q) \hat{\psi} d\Omega + \int_{\Gamma} Q \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial n} - V_t^o - \frac{\partial Q}{\partial n} \right) \hat{\beta} ds. \end{aligned}$$

根据 (20) 式中方向导数的定义, 上式变形为

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\gamma \chi + \Delta P) \hat{\chi} d\Omega + \int_{\Omega} (\gamma \psi + \Delta Q) \hat{\psi} d\Omega \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial s} - V_n^o - \frac{\partial P}{\partial n} - \nabla_{\alpha} J \right) \hat{\alpha} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial n} - V_t^o - \frac{\partial Q}{\partial n} - \nabla_{\beta} J \right) \hat{\beta} ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} P \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n} ds + \int_{\Gamma} Q \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n} ds = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

考虑到问题中 $\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial n}$ 和 $\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial n}$ 的任意性, 同时保证 $\hat{J}[\alpha, \beta; \hat{\alpha}, \hat{\beta}] = 0$, 于是引入如下伴随模型及伴随边界条件

$$\begin{cases} \Delta P = -\gamma \chi, \\ P|_{\Gamma} = 0; \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} \Delta Q = -\gamma \psi, \\ Q|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

又由于 (22) 式中 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 的任意性, 于是得到目标泛函 J 关于控制变量 α 和 β 的梯度表达式为

$$\nabla_{\alpha} J = \frac{\partial \chi}{\partial n} - \frac{\partial \psi}{\partial s} - V_n^o - \frac{\partial P}{\partial n}, \quad (25)$$

$$\nabla_{\beta} J = \frac{\partial \chi}{\partial s} + \frac{\partial \psi}{\partial n} - V_t^o - \frac{\partial Q}{\partial n}. \quad (26)$$

4 仿真实验

4.1 数据模拟

仿真实验具体流程设计如图 1 所示, 其中上标 t 表示“真实数据”, 上标 o 表示模拟的“观测数据”. 首先给定平面矩形区域 Ω 上势流函数的精确分布为

$$\chi^t(x, y) = 10 \sin(x + y), \quad (27)$$

$$\psi^t(x, y) = 20 \sin x \sin y, \quad (28)$$

其中, $x \in [0, \pi]$ 和 $y \in [0, \pi]$. 根据 (1) 式定义, 分别得

到“真实”的辐散风场 $\mathbf{V}_\chi^t$ 和旋转风场 $\mathbf{V}_\psi^t$ 为

$$\begin{aligned} u_\chi^t &= \frac{\partial \chi^t}{\partial x} = 10 \cos(x+y), \\ v_\chi^t &= \frac{\partial \chi^t}{\partial y} = 10 \cos(x+y), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} u_\psi^t &= -\frac{\partial \psi^t}{\partial y} = -20 \sin x \cos y, \\ v_\psi^t &= \frac{\partial \psi^t}{\partial x} = 20 \cos x \sin y. \end{aligned} \quad (30)$$

图 2 给出了“真实”的势流函数及其对应的风场分量分布. 将 $\mathbf{V}_\chi^t$ 和 $\mathbf{V}_\psi^t$ 合成即可得到“真实”风场 $\mathbf{V}^t$, 此时在 $\mathbf{V}^t$ 上叠加一个服从均匀分布的随机误差 $[-\delta, \delta]$ (误差大小由 δ 控制), 生成模拟“观测”风场 $\mathbf{V}^o$. 随后将“观测”风场放入上述反演系统, 计算得到势流函数的 Dirichlet 边界 α 和 β , 从而反演出区域上的势流函数分布. 再次利用反演得到的势流函数计算出辐散风场 $\mathbf{V}_\chi$ 和旋转风场 $\mathbf{V}_\psi$, 同时得到重构风场 $\mathbf{V}'$. 最后分别对合成风场和风场分量进行误差分析. 数值试验中, 离散方案采用的是非跳点网格, 微分采用中心差分公式近似, 反演系

统中下降算法调用 LBFGS 程序 [27] 实现.

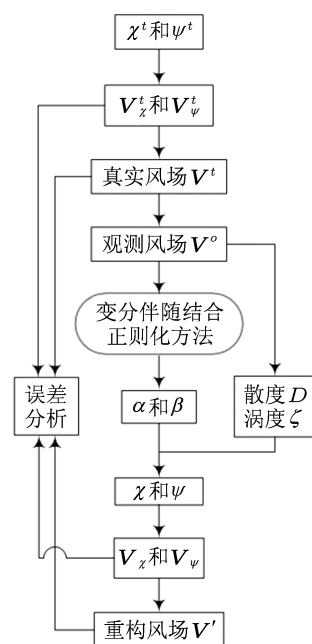


图 1 仿真试验流程示意图

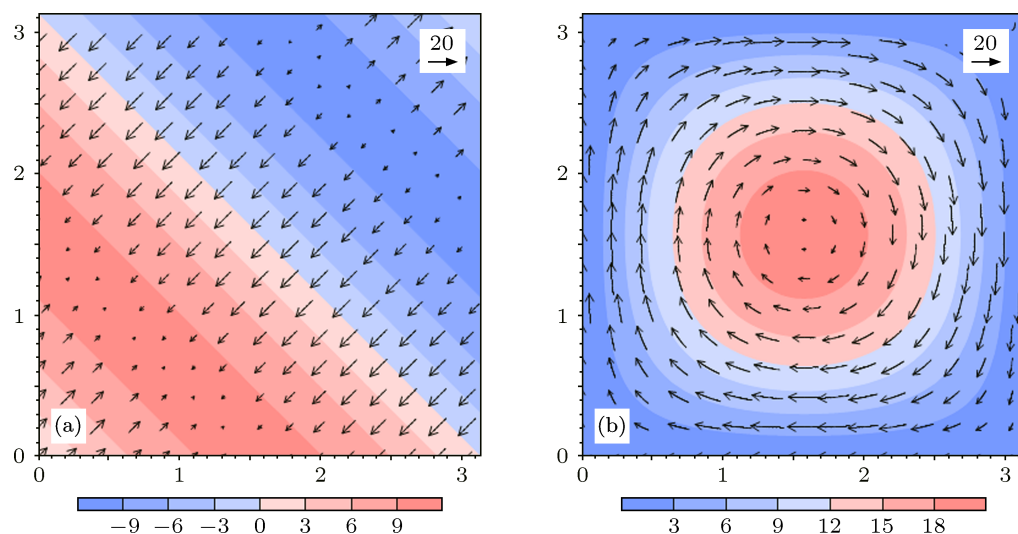


图 2 (a)“真实”的速度势场 χ^t (阴影部分) 和辐散风场 $\mathbf{V}_\chi^t$ (曲线矢量箭头); (b)“真实”的流函数场 ψ^t (阴影部分) 和旋转风场 $\mathbf{V}_\psi^t$ (曲线矢量箭头)

4.2 正则化参数选取

正则化参数的选取方法有多种, 例如偏差原理、交叉检验和 L 曲线准则等. 本文采用 Engl 准则 [28] 来选取正则化参数, 其核心在于找到一个

γ 值,

$$\varphi(\gamma) = \|\mathbf{X}_\gamma^\delta\| \|\mathbf{V} - \mathbf{H}(\mathbf{X}_\gamma^\delta)\|. \quad (31)$$

图 3 给出了在取 $\delta = 0.1$ m/s 时, 泛函 $\varphi(\gamma)$ 与正则化参数 γ 的对应关系. 可以看出, 随着 γ 的减小, 泛函 $\varphi(\gamma)$ 也逐渐减小. 当 $\gamma = 10^{-3}$ 时, $\varphi(\gamma)$ 达到极小值. 随后当 γ 继续减小时, 泛函 $\varphi(\gamma)$ 反而

略有增加. 这种情形符合正则化的思想: 如果 γ 太大, 得到的解会偏离原问题解的范围; 反之, 如果 γ 太小, 则无法改善问题解的不适定性. 特别是当 δ 取 0.2 m/s 或是更大的值时, 随着 γ 的减小, 泛函 $\varphi(\gamma)$ 先是明显的下降达到一个最小值, 随后又会快速地增大 (图略). 根据上述分析可知, 观测误差 $\delta = 0.1$ m/s 对应的正则化参数为 $\gamma = 10^{-3}$.

按照上述方法, 分别计算了观测误差 δ 在 [0.1, 2.0] m/s 区间内对应的正则化参数 γ 分布. 从图 4 中可以看出, 不同的观测误差 δ 对应不同的正则化参数 γ , 正则化参数 γ 随 δ 的变化比较缓慢, 且主要集中在 $\gamma = 10^{-2}$ 附近.

4.3 试验结果分析

为了进一步检验新方法在有限区域风场分解与重构中的应用效果, 下面对 $\delta = 0.1$ m/s 和 $\gamma = 10^{-3}$ 时的反演结果进行分析讨论 (试验中初值为 $\alpha = 0$ 和 $\beta = 0$).

由前面的叙述已知, 一旦得到边界上的速度势和流函数值, 问题有唯一解, 因此能否精确反演边值是问题的关键. 下面首先将边界上的速度势和流函数反演值和准确值加以比较 (见图 5), 可以看到势流函数边值反演误差主要集中在矩形区域的四个角点附近, 这主要是由于泛函梯度在角点处不连续所致. 对于光滑边界而言, 反演精度会有显著提高.

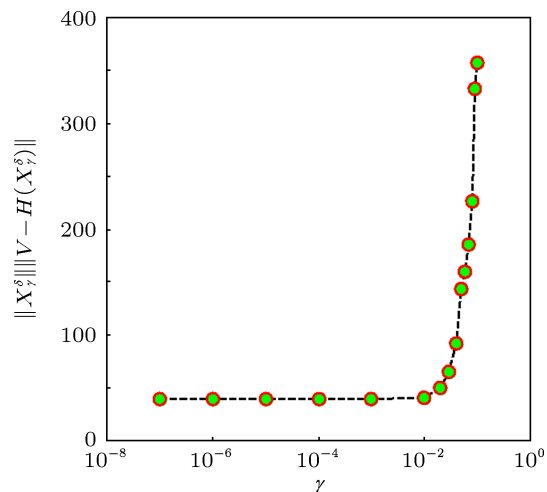


图3 函数 $\varphi(\gamma)$ 与正则化参数 γ 的关系曲线 ($\delta = 0.1$ m/s)

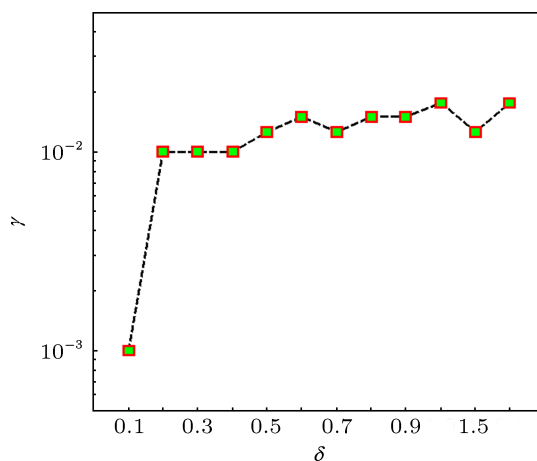


图4 不同观测误差 δ 对应的正则化参数 γ 分布

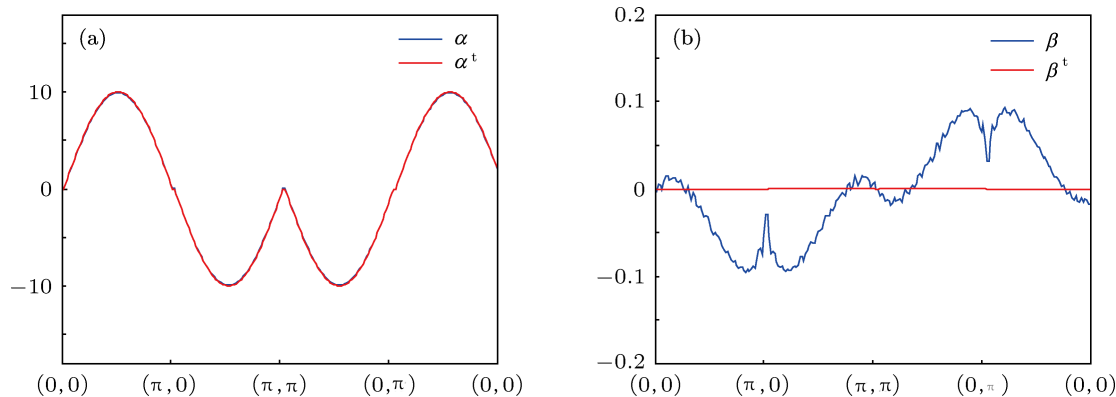


图5 边界条件的真实值和反演值 (a) 速度势; (b) 流函数

通常评价风场分解正确性的方法主要有两种: 第一, 分解得到的风场分量能否精确地重构原始风场^[17]; 第二, 分解得到的风场分量能否合理的解释相应天气现象^[16]. 由于文中进行的是理想实验, 辐散风和旋转风分量的准确值都是已知的, 则可以通过直接检验反演得到的辐散风和旋转风分量的精度来判断分解的可靠性. 图 6 给出了反演得到的

势流函数及其对应的辐散风和旋转风分量 (其中图 6(b) 给出的流函数分布是在反演结果的基础上加上常数 7.85 得到). 从图中可以看出, 势流函数反演结果与“真实”状态比较接近, 说明正则化方法能够有效地克服观测中包含的噪声. 同时, 分解得到的风场分量与“真实”分量存在一定误差 (见图 7), 而且边界上的误差比区域内误差要大.

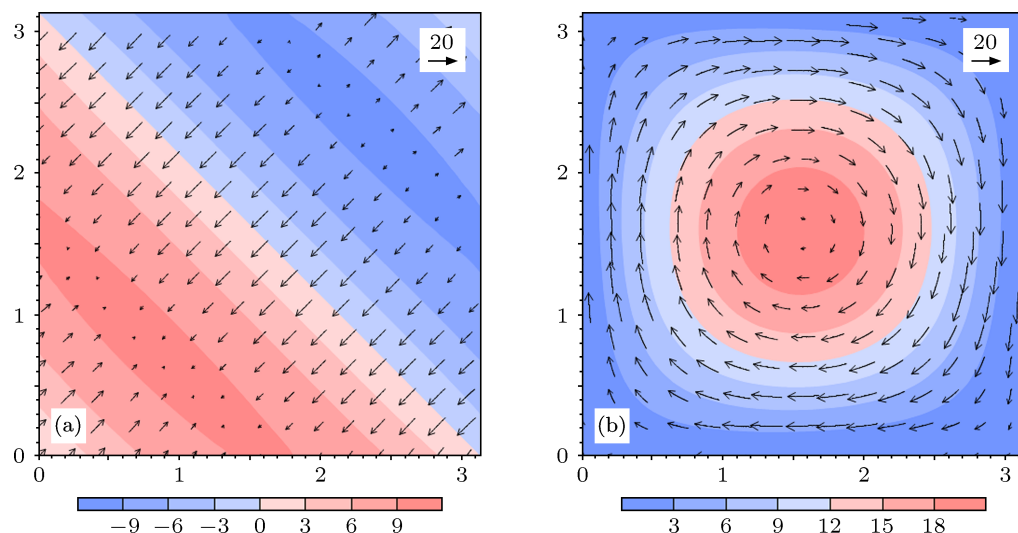


图 6 (a) 反演得到的速度势场 χ (阴影部分) 和辐散风场 V_χ (曲线矢量箭头); (b) 反演得到的流函数场 ψ (阴影部分) 和旋转风场 V_ψ (曲线矢量箭头)

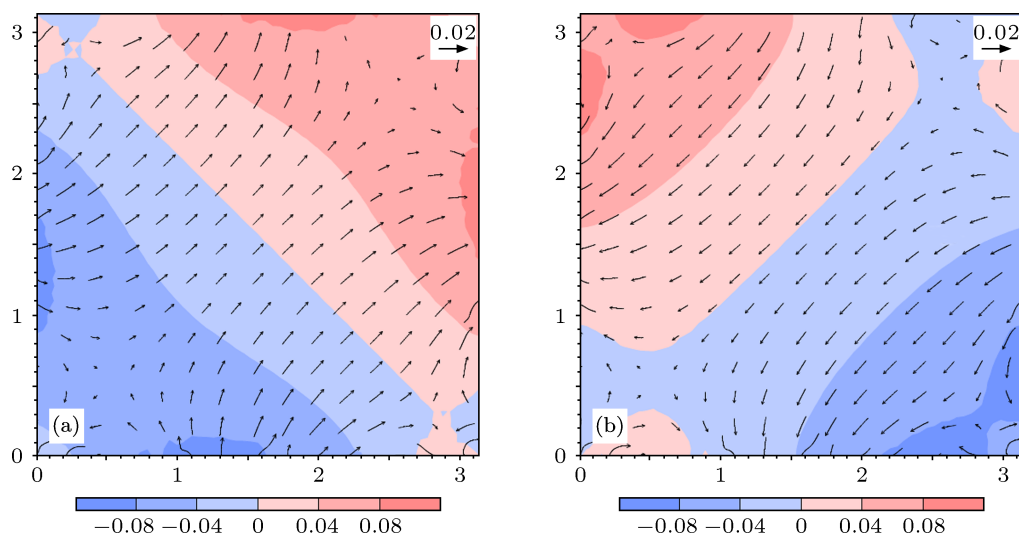


图 7 (a) 速度势场 (阴影部分) 和辐散风场 (曲线矢量箭头) 的反演误差分布; (b) 流函数场 (阴影部分) 和旋转风场 (曲线矢量箭头) 的反演误差分布

在图 7 中辐散风和旋转风的误差分布形式相同而值却相反, 这样就有效地抵消了重构风场存在的误差. 从表 1 可以看出, 辐散风场和旋转风场分量的最大绝对反演误差在 0.1 左右, 而相应重构风场分量的最大绝对反演误差只有 10^{-2} 量级 (特别是 v 分量的最大绝对反演误差为 0.0041). 同时, 重构风场分量的均方根反演误差只有辐散风场和旋转风场分量均方根反演误差的一半. 上述现象存在的具体原因有待进一步分析研究. 综上所述, 利用变分伴随结合正则化方法进行有限区域的风场分解与重构是准确的, 后续我们将结合天气实例对该方法进行更多的检验.

表 1 风场反演误差

单位 (m/s)	均方根误差		最大绝对误差	
	u 分量	v 分量	u 分量	v 分量
重构风场	0.0034	0.0041	0.0127	0.0041
辐散风场	0.0082	0.0083	0.0996	0.1125
旋转风场	0.0081	0.0082	0.0948	0.1091

5 结 论

在总结国内外研究工作的基础上, 提出了采用变分伴随结合正则化方法进行有限区域风场的分解和重构. 将风场分解为旋转风和辐散风, 最有效的方法就是引入速度势和流函数. 对有限区域而言, 决定流函数与速度势需涉及到边界处理问题, 如果边界处理不妥当, 就不能在有限区域中得到正确的速度势和流函数. 以往计算速度势和流函数时, 一般都在边界上取 χ 为零或 ψ 和 χ 取周期边界条件, 而忽略了速度势和流函数在边界上的相关性. 本文采用变分伴随方法, 把速度势和流函数的边界条件作为控制变量直接进行反演. 同时引入正则化思想, 克服了风场分解的不适定性. 随后的仿真试验表明, 在合理选取正则化参数的前提下, 该方法能够有效地进行有限区域风场分解, 并且重构的风场具有较高的精度.

后续的工作将在以下两个方面进行研究和探讨: 1) 研究势流函数取不同权重时的反演算法, 即双正则化参数选取问题; 2) 本文的重点在于方法的论证和检验, 今后要进一步将该方法用于实际天气的诊断分析.

- [1] Krishnamurti T, Ramanathan Y 1982 *J. Atmos. Sci.* **39** 1290
- [2] Ran L K, Gao S T, Li C Y 1995 *Chin. J. Atmos. Sci.* **19** 209 (in Chinese) [冉令坤, 高守亭, 李崇银 1995 大气科学 **19** 209]
- [3] Zhang L, Zhang L F, Wu H Y, Li G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 44 (in Chinese) [张亮, 张立凤, 吴海燕, 李刚 2010 物理学报 **59** 44]
- [4] Ding Y H, Hu G Q 2003 *Acta Mete. Sin.* **61** 129 (in Chinese) [丁一汇, 胡国权 2003 气象学报 **61** 129]
- [5] Gao S T, Sun J H, Cui X P 2008 *Chin. J. Atmos. Sci.* **32** 854 (in Chinese) [高守亭, 孙建华, 崔晓鹏 2008 大气科学 **32** 854]
- [6] Baede A P M, Jarraud M M, Cubasch U 1979 *ECMWF Tech. Rep.* **15** 39
- [7] Bourke W 1974 *Mon. Wea. Rev.* **102** 687
- [8] Phillips N A 1958 *Geophysica* **6** 389
- [9] Sangster W E 1960 *J. Atmos. Sci.* **17** 166
- [10] Shukla J, Saha K R 1974 *Mon. Wea. Rev.* **102** 419
- [11] Stephens J, Johnson K 1978 *Mon. Wea. Rev.* **106** 1452
- [12] Lynch P 1989 *Mon. Wea. Rev.* **117** 1492
- [13] Bijlsma S J, Hafkensheid L M, Lynch P 1986 *Mon. Wea. Rev.* **114** 1547
- [14] Chen Q S, Kuo Y H 1992 *Mon. Wea. Rev.* **120** 91
- [15] Chen Q S, Kuo Y H 1992 *Mon. Wea. Rev.* **120** 2653
- [16] Zhou Y S, Cao J, Gao S T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6654 (in Chinese) [周玉淑, 曹洁, 高守亭 2008 物理学报 **57** 6654]
- [17] Zhou Y S, Cao J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2898 (in Chinese) [周玉淑, 曹洁 2010 物理学报 **59** 2898]
- [18] Bishop H C 1996 *J. Atmos. Sci.* **53** 241
- [19] Tikhonov A N, Arsenin V Y 1977 *Solution of Ill-Posed Problems* (New York: Winston and Sons) p224
- [20] Huang S X, Wu R S 2005 *Mathematical and Physical Problems in Atmospheric Science* (Beijing: Meteorological Press) p422 (in Chinese) [黄思训, 伍荣生 2005 大气科学中的数学物理问题 (北京: 气象出版社) 第 422 页]
- [21] Sheng Z, Huang S X 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1734 (in Chinese) [盛峥, 黄思训 2010 物理学报 **59** 1734]
- [22] Zhao Y L, Huang S X, Du H D, Zhong J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 079202 (in Chinese) [赵延来, 黄思训, 杜华栋, 仲跻芹 2011 物理学报 **60** 079202]
- [23] Li K T, Ma Y C 1990 *Hilbert Space Methods for Mathematical Equation* (Vol. 1) *General Function and Sobolev Spaces* (Xi'an: Xi'an Jiaotong University Press) p222 (in Chinese) [李开泰, 马逸尘 1990 数理方程 Hilbert 空间方程方法 (上) 广义函数和 Sobolev 空间 (西安: 西安交通大学出版社) 第 222 页]
- [24] Le Dimet F X, Mohamed O 1993 *Tellus A* **45** 449
- [25] Li Z J, Chao Y, McWilliams J C 2006 *Mon. Wea. Rev.* **134** 3384
- [26] Kirsch A 1996 *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems* (New York: Springer-Verlag) p48
- [27] Liu D C, Nocedal J 1989 *Math. Program.* **45** 503
- [28] Engl H W 1987 *J. Optim. Theory. Appl.* **52** 209
- [29] Barker D M, Huang W, Guo Y R, Bourgeois A J, Xiao Q N 2004 *Mon. Wea. Rev.* **132** 897

Wind partitioning and reconstruction with variational method in a limited domain I: theoretical frame and simulation experiments*

Zhao Yan-Lai Huang Si-Xun[†] Du Hua-Dong

(*Institute of Meteorology, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China*)

(Received 9 February 2012; revised manuscript received 4 September 2012)

Abstract

As is well known, the efficient method to wind partitioning and reconstruction is to introduce the velocity potential and stream function which are calculated from divergence and vorticity by solving two Poisson's equations. Since velocity potential and stream function are coupled at the boundary of limited domain, the wind partitioning problem is nonunique. To overcome the nonuniqueness of the wind partitioning, a new variational adjoint method combined with regularization is proposed in this paper, which is based on the control of velocity potential and stream function boundary values under Dirichlet conditions. The cost function is composed of two parts, one is the observation term to minimize the error of the reconstructed wind field, and the other is the regularization term to guarantee the uniqueness of the reconstruction problem by seeking a stable regularization solution within meteorological content. The results of numerical experiments demonstrate that after choosing an appropriate regularization parameter, the new variational adjoint method combined with regularization is efficient and suitable for wind partitioning and reconstruction in a limited domain.

Keywords: variational adjoint method, regularization method, stream function and velocity potential, wind partition and reconstruction

PACS: 92.60.Gn, 92.60.Wc

DOI: 10.7498/aps.62.039204

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41175025, 41105012) and the National Key Technology Research and Development Program of the Ministry of Science and Technology of China (Grant No. 2008BAC37B03).

[†] Corresponding author. E-mail: huangxp@yahoo.com.cn