

旋转内接悬臂梁的刚柔耦合动力学特性分析*

方建士¹⁾²⁾ 章定国^{1)†}

1) (南京理工大学理学院, 南京 210094)

2) (南京工程学院材料工程学院, 南京 211167)

(2012年4月13日收到; 2012年9月16日收到修改稿)

对固结于旋转刚环上内接柔性梁的刚柔耦合动力学特性进行了研究. 在精确描述柔性梁非线性变形基础上, 利用 Hamilton 变分原理和假设模态法, 在计入柔性梁由于横向变形而引起的轴向变形二阶耦合量的条件下, 推导出一次近似耦合模型. 忽略柔性梁纵向变形的影响, 给出一次近似简化模型, 引入无量纲变量, 对简化模型做无量纲化处理. 首先分析在非惯性系下内接悬臂梁的动力学响应, 并与外接悬臂梁进行比较; 其次研究内接悬臂梁的稳定性; 最后分析内接悬臂梁失稳临界转速的收敛性. 研究发现, 与外接悬臂梁存在动力刚化效应不同, 内接悬臂梁存在着动力柔化效应; 给出了内接悬臂梁无条件稳定的临界径长比以及失稳的临界转速的计算方法; 若第一阶固有频率随转速增大而减小, 则该内接悬臂梁处于有条件稳定; 随着模态截断数的增加, 内接悬臂梁失稳的临界转速减小且有收敛值.

关键词: 内接悬臂梁, 一次近似简化模型, 动力柔化, 临界转速

PACS: 05.45.-a, 45.10.-b, 45.05.+x

DOI: 10.7498/aps.62.044501

1 引言

旋转悬臂柔性梁的动力学建模和振动分析在航天器、机器人和高速旋转机构等工程技术领域具有独特的理论和应用价值, 很多工程实例可以理想化为旋转悬臂梁, 比如涡轮叶片、直升机机翼和卫星天线等. 建立大范围旋转悬臂梁的动力学模型需要考虑结构柔性在运动中所产生的重大影响, 传统的柔性多体系统动力学理论和方法由于无法捕捉到大范围运动引起的动力刚化项, 造成仿真结果的偏差甚至错误^[1]. 1987年, Kane等^[1]指出, 传统零次近似模型在计算高速旋转机构的动力学问题时会产生错误, 并提出“动力刚化”的概念. 随后, 众多学者对动力刚化问题进行了大量研究, 并在此基础上对柔性体变形和其大位移运动之间的刚柔耦合问题开展了广泛而深入的研究^[2,3], 并逐渐形成了以计入横向变形引起的纵向缩短的二阶耦合变形量为主要方法的刚柔耦合动力学建模方法. 这些动力学方程在结构上都比传统的零次耦合模型

增加了由二阶耦合变形量引入的关于广义坐标的一阶或更高阶的量, 假如忽略更高阶量而保留一阶量的话, 这样的模型就成为一次近似耦合模型. 理论分析和实验都证明了一次近似耦合模型的合理性. 深入研究表明, 大范围运动柔性梁还存在着“动力柔化”现象^[4,5]. 但是, 无论对于动力刚化还是对于动力柔化的研究大多数仅局限于旋转外接悬臂梁系统.

旋转悬臂柔性梁的振动特性一直以来也是众多学者所感兴趣的研究方向, Southwell和Cough^[6]利用Rayleigh能量理论对旋转运动梁的固有频率进行研究, 推导出著名的Southwell方程. 随后, Putter和Manor^[7]在Southwell方程的基础上利用有限元并考虑剪力、旋转惯性等对梁的固有频率和振型进行研究; Yoo和Shin^[8]采用达朗贝尔原理和假设模态法研究旋转悬臂梁固有频率和振型的数值解; 和兴锁等^[9]应用Lagrange方程研究了考虑剪切效应且做大范围旋转运动的Timoshenko梁的固有频率; 陈思佳和章定国^[10]研究了刚体-变截面

* 国家自然科学基金(批准号: 11272155, 11132007, 10772085)、江苏省“333工程”(批准号: BRA2011172)和南京工程学院校级科研基金(批准号: QKJB201203, CJK2010004)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn

梁系统的动力学特性. 但在高层次刚柔耦合理论基础上对旋转内接悬臂梁的动力学特性的研究目前尚少见.

本文对固结在旋转刚环上内接柔性梁的刚柔耦合动力学建模及其动力学特性进行研究, 在精确描述柔性梁非线性变形的基础上, 利用 Hamilton 变分原理和假设模态法, 在计入柔性梁由于横向变形而引起的轴向变形的二阶耦合量的条件下, 推导出系统的一次近似耦合动力学方程, 进而给出一次近似简化模型. 基于一次近似简化模型, 分析在非惯性系下内接悬臂梁的动力学响应, 并与外接悬臂梁进行比较; 研究了旋转内接悬臂梁的稳定性; 分析了内接悬臂梁失稳临界转速的收敛性, 得出相关结论.

2 柔性悬臂梁的变形描述

本文采用等截面的 Euler-Bernoulli 梁模型, 做旋转运动的平面柔性梁如图 1 所示. 图 1 中 $O-XY$ 为惯性坐标系; $o-xy$ 为浮动坐标系, 固连在未变形的柔性梁上, r_0 为浮动坐标系相对于惯性坐标系的矢径, r_1 为未变形时梁轴线上任意一点 p_0 点在浮动坐标系下的矢径, u 为 p_0 点变形位移矢量, 则 p 点相对于惯性坐标系的矢径可写成

$$r_p = r_0 + A(r_1 + u), \quad (1)$$

式中 A 为浮动坐标系相对于惯性坐标系的方向余弦矩阵. 将 (1) 式对时间求导, 得在惯性坐标系下 p 点的速度矢量

$$\dot{r}_p = \dot{r}_0 + A\tilde{I}(r_1 + u)\dot{\theta} + A\dot{u}, \quad (2)$$

式中,

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad \tilde{I} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

设 x 为 p_0 点在浮动坐标系下的纵向坐标, 则有 $r_1 = (x \ 0)^T$. 根据弹性梁的变形理论, 考虑完全几何非线性变形, 梁上 p 点的变形位移 u 为

$$u = \begin{bmatrix} u_1(x, t) \\ u_2(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1(x, t) - \frac{1}{2} \int_0^x (\partial w_2 / \partial \xi)^2 d\xi \\ w_2(x, t) \end{bmatrix}, \quad (3)$$

式中, $w_1(x, t)$ 为轴线的轴向伸长量, $w_2(x, t)$ 为横向弯曲变形量, $w_c = -\frac{1}{2} \int_0^x (\partial w_2 / \partial \xi)^2 d\xi$ 是横向弯曲

引起的纵向变形量, 称为耦合变形量. 该耦合变形量在传统的零次近似方法中是不考虑的, 但在某些条件下它会对系统的动力学特性产生重要影响.

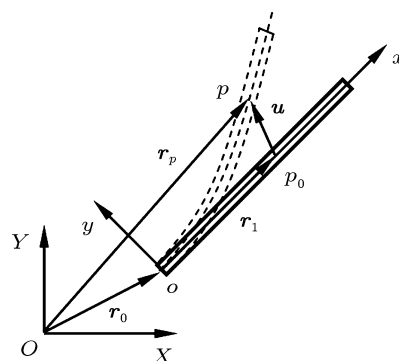


图 1 做大范围运动的柔性梁

采用假设模态法来描述柔性梁的变形, 表示为

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= \phi_1(x)B_1(t), \\ w_2(x, t) &= \phi_2(x)B_2(t), \end{aligned} \quad (4)$$

其中, $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$ 分别为梁的轴向和横向振动模态函数行向量, $B_1(t)$ 和 $B_2(t)$ 分别为梁的轴向和横向振动模态坐标列阵.

3 旋转内接悬臂梁系统刚柔耦合动力学方程

考虑如图 2 所示的旋转刚环内接悬臂梁的刚柔耦合系统, 刚环上受到外驱动力矩 $M(t)$ 的作用, 过刚环圆心建立惯性坐标系 $O-XY$, 在柔性梁上建立浮动坐标系 $o-xy$, 其中 o 为柔性梁和刚环的连接处, x 轴沿未变形时梁的轴线通过转轴 O . 刚环绕转轴 O 的转动惯量为 J_{oh} , 半径为 a , 均质柔性梁的长度为 L , 单位长度质量为 ρA_0 , 梁的抗弯刚度为 EI , 拉压刚度为 EA_0 .

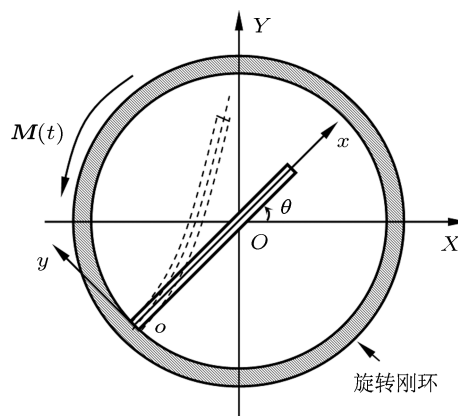


图 2 旋转内接悬臂梁系统

上述旋转刚环内接柔性梁系统的动能可写成

$$T = \frac{1}{2} J_{\text{oh}} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \int_0^L \rho A_0 \dot{\mathbf{r}}_p^T \dot{\mathbf{r}}_p dx. \quad (5)$$

由于考虑系统在水平面内运动, 所以系统势能只有弹性变形能, 可写成

$$V = \frac{1}{2} \int_0^L EA_0 \left(\frac{\partial w_1(x,t)}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 w_2(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 dx, \quad (6)$$

根据 Hamilton 变分原理

$$\int_0^t (\delta T - \delta V + \delta W_F) dt = 0, \quad (7)$$

其中 δT 和 δV 分别为系统动能和势能的变分, δW_F 为作用在刚环上的外驱动力矩 $\mathbf{M}(t)$ 所做虚功, 可表示为 $\delta W_F = \mathbf{M}(t) \delta \theta$.

(1) 式中的 $\mathbf{r}_0 = (-a \cos \theta \quad -a \sin \theta)^T$. 在 (5) 式展开时, 考虑到变形耦合项 w_c 是横向弯曲变形量 w_2 的二阶小量, 故可以做适当简化, 舍去与 w_c 相关的一些高阶量. 根据 (7) 式, 可得系统的一次近似耦合动力学方程

$$\begin{bmatrix} M_{\theta\theta} & M_{\theta 1} & M_{\theta 2} \\ M_{1\theta} & M_{11} & 0 \\ M_{2\theta} & 0 & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{B}_1 \\ \ddot{B}_2 \end{bmatrix} + 2\dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{23} \\ 0 & G_{32} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{B}_1 \\ \dot{B}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_\theta \\ Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{M}(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中

$$M_{\theta\theta} = J_{\text{oh}} + J_1 + 2\mathbf{R}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \mathbf{B}_2, \quad (9)$$

$$M_{\theta 1} = M_{1\theta}^T = \mathbf{R}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{P}, \quad (10)$$

$$M_{22} = \mathbf{D}_2 = \int_0^L \rho A_0 \phi_2^T \phi_2 dx, \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_{23} = -\mathbf{G}_{32}^T = -\mathbf{P}, \quad (12)$$

$$k_{33} = \mathbf{K}_2 - \dot{\theta}^2 (\mathbf{D}_2 - \mathbf{S}), \quad (13)$$

$$Q_\theta = -2\dot{\theta} [\mathbf{R}_1 \dot{B}_1 - \mathbf{B}_2^T \mathbf{S} \dot{B}_2 + \mathbf{B}_1^T \mathbf{D}_1 \dot{B}_1 + \mathbf{B}_2^T \mathbf{D}_2 \dot{B}_2], \quad (14)$$

$$Q_1 = \dot{\theta}^2 \mathbf{R}_1^T. \quad (15)$$

需要指出的是, 在传统零次近似模型中由于直接套用了结构动力学的小变形假设, 认为纵向和横向变形间没有耦合, 因此在所建立的动力学方程中

并不包含式 (9), (13) 和 (14) 式中的下划线项. (13) 式中的下划线项称为附加刚度项, 传统的零次近似模型在处理大范围运动为高速时产生失效正是由于忽略了附加刚度项所导致的.

(9)—(15) 式中相关的部分常值系数和矩阵为

$$\mathbf{R}_i = \int_0^L \rho A_0 (x-a) \phi_i dx \quad (i=1,2), \quad (16)$$

$$\mathbf{S} = \int_0^L \rho A_0 (x-a) \mathbf{H} dx, \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_2 = \int_0^L EI \phi_2''^T \phi_2'' dx, \quad (18)$$

其中 $\mathbf{R}_i \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{K}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

在研究非惯性系下的动力学问题时, 系统大范围运动往往是已知的, 不用求解. 这种情况下的柔性梁动力学模型可由 (8) 式忽略大范围运动方程而得到. 忽略 (8) 式的第一行和第二行, 可得内接柔性梁的一次近似简化模型

$$M_{22} \ddot{B}_2 + [\dot{\theta}^2 (\underline{\mathbf{S}} - \mathbf{D}_2) + \mathbf{K}_2] B_2 = -\ddot{\theta} \mathbf{R}_2^T. \quad (19)$$

若忽略 (19) 式中的下划线项, 即可转化为零次近似简化模型.

4 内接悬臂柔性梁的动力特性分析

由于柔性梁的纵向变形量级比横向变形小很多, 忽略纵向变形不会对横向变形的动力特性造成很大影响. 由 (19) 式可得一次近似简化模型下的柔性梁的横向自由振动微分方程

$$M_{22} \ddot{B}_2 + [\dot{\theta}^2 (\mathbf{S} - \mathbf{D}_2) + \mathbf{K}_2] B_2 = 0, \quad (20)$$

对 (20) 式进行无量纲化处理, 引入无量纲变量和参数

$$\zeta = t/T^*, \quad \xi = x/L, \quad \kappa_2 = \mathbf{B}_2/L,$$

$$\delta = a/L, \quad \gamma = T^* \dot{\theta},$$

其中 $T^* = (\rho A_0 L^4 / EI)^{1/2}$, δ 称为系统径长比. (20) 式可写成

$$\overline{M}_{22} \ddot{\kappa}_2 + [\gamma^2 (\overline{\mathbf{S}} - \overline{\mathbf{D}}_2) + \overline{\mathbf{K}}_2] \kappa_2 = 0, \quad (21)$$

式中

$$\overline{M}_{22} = \overline{D}_2 = \int_0^1 \phi_2^T \phi_2 d\xi, \quad (22)$$

$$\overline{\mathbf{S}} = \int_0^1 (\xi - \delta) \overline{\mathbf{H}}(\xi) d\xi, \quad (23)$$

$$\overline{\mathbf{K}}_2 = \int_0^1 \phi_2''^T \phi_2'' d\xi, \quad (24)$$

其中

$$\bar{H}(\xi) = \int_0^\xi \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right)^T \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial \eta} \right) d\eta.$$

引入关于无量纲时间量 ζ 的调和函数

$$\kappa_2 = e^{j\omega\zeta} \Theta, \quad (25)$$

其中 j 为虚数单位, ω 为无量纲固有频率, Θ 为常数列阵

将 (25) 式代入 (21) 式可得特征值问题

$$\omega^2 M \Theta = K^C \Theta, \quad (26)$$

其中 M 和 K^C 为对称矩阵, 表示为

$$M = \bar{M}_{22}, \quad K^C = \gamma^2(\bar{S} - \bar{D}_2) + \bar{K}_2. \quad (27)$$

4.1 内接悬臂梁的动力柔化现象

众多研究表明, 旋转外接悬臂柔性梁的一次近似简化模型存在“动力刚化”效应^[2-4], 即采用该模型进行动力学仿真, 其结果不会出现发散, 而且随着角速度增大, 其稳态响应频率也增大. 为了研究旋转内接悬臂梁的动力学特性, 取图 2 所示旋转刚环内接悬臂梁旋转系统的参数: 悬臂梁长度 $L = 10$ m, 线密度 $\rho A_0 = 1.2$ kg/m, 截面抗弯刚度 $EI = 14000$ N·m², $EA_0 = 686000$ Pa·m². 假定旋转刚环由静止开始做大范围运动, 大范围运动角速度规律取为

$$\dot{\theta} = \begin{cases} \frac{\omega_0 t}{T} - \frac{\omega_0}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) & 0 < t \leq T \\ \omega_0 & t > T \end{cases}, \quad (28)$$

其中, $T = 15$ s, 柔性梁在 $T = 15$ s 时达到角速度 ω_0 ; ω_0 的取值为 $\omega_0 = \dot{\theta} = \gamma/T^*$.

图 3 为系统径长比 $\delta = 0.2$, 模态截断数 $N_f = 3$ 时, 内接悬臂梁与外接悬臂梁的一次近似简化模型在不同角速度时梁末端横向变形位移 u_y 的响应时程. 从图 3(a) 中可以看出, 不论角速度多大, 外接悬臂梁的一次近似简化模型仿真结果始终收敛; 而在角速度不大的情况下 (即 $\gamma = 9$), 内接悬臂梁的一次近似简化模型仿真结果已经发散. 图 3(b) 为 $15 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$ 时间域内的响应放大图. 尽管在 $\gamma = 8$ 时, 内接悬臂梁的一次近似简化模型仿真结果仍然收敛, 但是其末端的响应较外接悬臂梁在相同角速度时的响应急剧增大, 稳态响应频率降低, 这表明此时的内接悬臂梁已经出现动力柔化现象. 图 3(b) 中的小图为虚线方框部分的放大图, 从中可

以发现, 外接悬臂梁的稳态响应频率随着角速度的增大而增大, 这表明外接悬臂梁完全刚化.

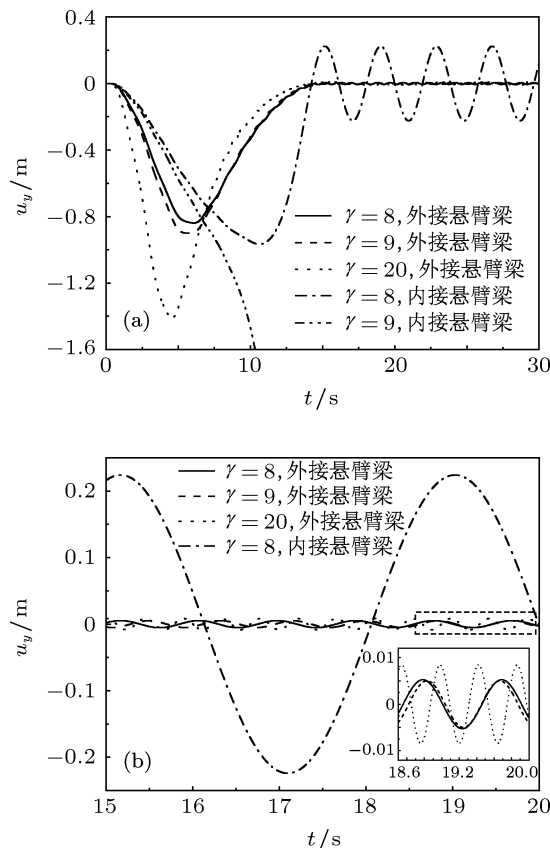


图 3 一次近似简化模型的梁末端 y 方向的变形位移 (a) 全局响应时程; (b) $15 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$ 时间域内的响应放大图

4.2 内接悬臂梁的稳定性分析

文献 [8, 9] 对旋转外接悬臂梁的固有频率进行了分析, 发现外接悬臂梁横向弯曲振动的第一阶固有频率始终随角速度的增大而增大, 从动力学响应角度可以解释为外接悬臂梁的横向弯曲振动始终稳定, 即存在显著的动力刚化效应. 求解 (26) 式所示的特征值问题, 即可对内接悬臂梁一次近似简化模型进行频率分析. 在实际系统中无论是对其建模还是控制, 第一阶频率和振型都是最重要的, 梁的横向弯曲振动模态只取一阶 (即 $N_f = 1$), 则梁的横向弯曲振动频率可表示为

$$\omega = \sqrt{K^C/M}, \quad (29)$$

其中, $K^C = \gamma^2(\bar{S} - \bar{D}_2) + \bar{K}_2$, $M = \bar{M}_{22}$. 此时, $K^C \in \mathbb{R}^1$, $M \in \mathbb{R}^1$. 若 $\bar{S} - \bar{D}_2 > 0$, 则梁的横向弯曲振动频率将随角速度的增大而增大, 表明此种情况下的内接悬臂梁的横向弯曲振动始终稳定. 若 $\bar{S} - \bar{D}_2 < 0$, 则梁的横向弯曲振动频率将随角速度的增大而减小, 内接悬臂梁的横向弯曲振动处于有

条件稳定. 以上两种情况可以说明旋转内接悬臂梁的一次近似简化模型既可以存在动力刚化现象, 也可以存在动力柔化现象. 根据 $\bar{S} - \bar{D}_2 < 0$, 可解得内接悬臂梁的横向弯曲振动失稳的临界径长比 δ_c 为

$$\delta_c = \frac{\int_0^1 \xi \bar{H}(\xi) d\xi - \int_0^1 \phi_2^T(\xi) \phi_2(\xi) d\xi}{\int_0^1 \bar{H}(\xi) d\xi} = 0.123079. \quad (30)$$

当系统径长比 $\delta < \delta_c$ 时, 内接悬臂梁对于任何转速无条件稳定; 当系统径长比 $\delta > \delta_c$ 时, 内接悬臂梁处于有条件稳定, 而稳定的条件为 $K^C = \gamma^2(\bar{S} - \bar{D}_2) + \bar{K}_2 > 0$, 进一步表示为

$$\gamma^2 < \lambda = \bar{K}_2 / (\bar{D}_2 - \bar{S}). \quad (31)$$

文献 [11] 利用绝对坐标法给出一阶模态下内接悬臂梁失稳的临界径长比 $\delta_c = 1/9$, 当 $\delta > 1/9$ 时, 内接悬臂梁处于有条件稳定, 即当 $\gamma^2 < \lambda = 72/(9\delta - 1)$, 系统仍然稳定. 需要指出的是, 应用本文方法所得出的临界径长比与文献 [11] 的临界径长比在大小上稍有差别, 这种差别主要源于两者动力学建模方法上的差异, 但两文都得出了在某个临界径长比下动力学方程解出现分岔的结论. 图 4 为 $N_f = 1$ 时, 临界参数 λ 随径长比 δ 的变化曲线. 由图 4 可以看出, 临界参数 λ 随径长比 δ 的增大而减小, 且本文所得结果与文献 [11] 的结果符合得较好. 当 $\delta = 1$ 时, 本文的临界参数 $\lambda = 8.97424$, 而文献 [11] 的临界参数 $\lambda = 9$. 然而, 采用一阶模态计算所得内接悬臂梁失稳的临界转速的计算精度值得怀疑.

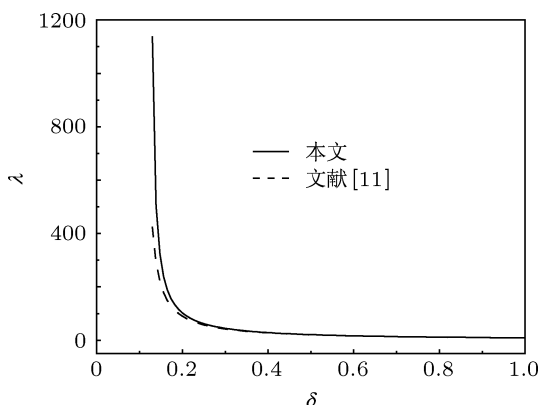


图 4 临界参数 λ 的变化曲线

4.3 内接悬臂梁失稳临界转速的收敛性分析

通常情况下, 内接悬臂梁的系统径长比 $\delta > \delta_c$, 因此考虑内接悬臂梁失稳的临界转速无疑更具现实意义. 当系统径长比 $\delta = 0.2 > \delta_c$, 内接悬臂梁处于有条件稳定, 由 (31) 式计算可得, 其失稳的临界转速 $\gamma_c = 10.114815$. 图 5 为 $\delta = 0.2$, 模态截断数分别取 1, 2, 3 和 10 时, 内接悬臂梁横向弯曲振动第一阶无量纲固有频率 ω 随角速度 γ 的变化轨迹. 由图 5 可看出, 四种情况的第一阶无量纲固有频率都随无量纲角速度 γ 的增大而减小, 且 γ 达到一定值时, 第一阶无量纲固有频率都将降为零, 其中 $N_f = 1$ 时, 第一阶无量纲固有频率变为零所对应的无量纲角速度 $\gamma \approx 10.115$, 而此角速度与 (31) 式计算所得的失稳临界转速 γ_c 正好符合. 图 6 为 $\delta = 0.2$, 模态截断数 $N_f = 1$ 时, 内接悬臂梁的一次近似简化模型在不同角速度时梁末端 y 方向变形位移的响应时程. 由图 6 可看出, 当 $\gamma = 10.115$ 时, 内接悬臂梁末端横向变形位移的仿真结果已经发散, 这说明内接悬臂梁失稳的临界转速就等于第一阶无量纲固有频率由正变为零时的角速度.

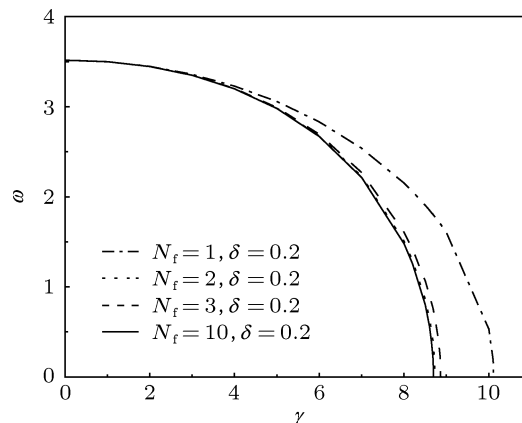
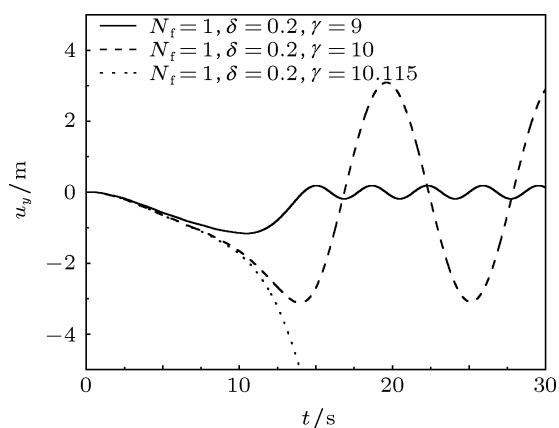


图 5 横向弯曲振动第一阶固有频率曲线

表 1 内接悬臂梁失稳的临界转速

模态截断数 N_f	临界转速 γ_c		
	$\delta = 0.2$	$\delta = 0.3$	$\delta = 0.4$
1	10.115	6.670	5.331
2	8.870	6.427	5.250
3	8.730	6.404	5.244
5	8.700	6.400	5.244
10	8.695	6.400	5.244

图6 梁末端 y 方向的变形位移

从图5中还可以发现,随着所取模态截断数的增加,内接悬臂梁失稳的临界转速不断减小且收敛,而且收敛速度很快.表1为内接悬臂梁失稳的临界转速与模态截断数之间的收敛关系.由表1可以看出,随着模态截断数的增加,不同系统径长比的内接悬臂梁失稳的临界转速都在降低.当 $\delta = 0.2$ 时, N_f 由1变为2时,两者临界转速相差约14%,而 N_f 由2变为3时,两者临界转速相差已只有1.6%,可见收敛速度很快.同时还可以发现,随着系统径长

比的增大,内接悬臂梁失稳的临界转速对模态截断数的依赖性降低.

5 结论

本文以旋转刚环和内接悬臂柔性梁组成的刚柔耦合系统为对象,推导出系统的刚柔耦合一次近似耦合动力学方程,并对其动力学特性进行研究.研究发现,与外接悬臂梁的一次近似简化模型存在完全动力刚化效应不同,内接悬臂梁的一次近似简化模型既可以存在动力刚化效应,又可以存在动力柔化效应,这主要依赖于系统的径长比;当系统径长比小于某个临界值时,大位移运动就产生动力刚化效应,而当系统径长比大于临界值时,大位移运动就产生动力柔化效应,这表明内接悬臂柔性梁系统动力学存在分岔行为.本文给出了 $N_f = 1$ 时,内接悬臂梁无条件稳定的临界径长比 δ_c 以及失稳的临界转速的计算方法;若第一阶无量纲固有频率随转速增大而减小,则该内接悬臂梁处于有条件稳定,且失稳的临界转速 γ_c 等于第一阶无量纲固有频率由正变为零时的角速度;随着模态截断数的增加,内接悬臂梁失稳的临界转速减小且有收敛值.

- [1] Kane T R, Ryan R R, Banerjee A K 1987 *J. Guid. Contr. Dyn.* **10** 2
- [2] Zhang D J, Huston R L 1996 *Mech. Struct. Mach.* **24** 3
- [3] Liu J Y, Hong J Z 2004 *J. Sound Vib.* **278** 1147
- [4] Wu S B, Zhang D G 2011 *J. Vib. Eng.* **24** 1 (in Chinese) [吴胜宝, 章定国 2011 振动工程学报 **24** 1]
- [5] He X S, Yan Y H, Deng F Y 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 024501 (in Chinese) [和兴锁, 闫业毫, 邓峰岩 2012 物理学报 **61** 024501]
- [6] Southwell R, Gough F 1921 *British A. R. C. Rep. Memo.* **766**
- [7] Putter S, Manor H 1978 *J. Sound Vib.* **56** 175
- [8] Yoo H H, Shin S H 1998 *J. Sound Vib.* **212** 5
- [9] He X S, Song M, Deng F Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 044501 (in Chinese) [和兴锁, 宋明, 邓峰岩 2011 物理学报 **60** 044501]
- [10] Chen S J, Zhang D G 2011 *Chin. J. Theo. Appl. Mech.* **43** 4 (in Chinese) [陈思佳, 章定国 2011 力学学报 **43** 4]
- [11] Xiao S F, Chen B 1997 *Sci. China A* **29** 10 (in Chinese) [肖世富, 陈滨 1997 中国科学 (A 辑) **29** 10]

Analyses of rigid-flexible coupling dynamic properties of a rotating internal cantilever beam*

Fang Jian-Shi¹⁾²⁾ Zhang Ding-Guo^{1)†}

1) (School of Sciences, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

2) (School of Materials Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, China)

(Received 13 April 2012; revised manuscript received 16 September 2012)

Abstract

The rigid-flexible coupling dynamic properties of an internal cantilever beam attached to a rotating hub are studied in this paper. Based on the accurate description of non-linear deformation of the flexible beam, the first-order approximation coupling model is derived from Hamilton theory and assumed mode method, taking into account the second-order coupling quantity of axial displacement caused by transverse displacement of the beam. The simplified first-order approximation coupling model which neglects the effect of axial deformation of a beam is presented. The simplified model is transformed into dimensionless form in which dimensionless parameters are identified. Firstly, the dynamic response of an internal cantilever beam is compared with that of an external cantilever beam, which are both in non-inertia system. Then, the stability of an internal cantilever beam is analyzed. Finally, the convergence of critical rotating speed of an internal cantilever beam is analyzed. Generally, it is pointed that an internal cantilever beam has a dynamic softening phenomenon, which is different from the dynamic stiffening phenomenon of an external cantilever beam. The critical ratio of the internal radius to the length of the beam for unconditional stability and the critical rotating speed of conditional stability of an internal cantilever beam are derived. When the first natural frequency decreases as the rotating speed increases, the dynamic system of the internal cantilever beam is conditionally stable. As the number of modes increases, the critical rotating speed of an internal cantilever beam decreases, and it has a convergent value.

Keywords: internal cantilever beam, first-order approximation simplified model, dynamic softening, critical rotating speed

PACS: 05.45.-a, 45.10.-b, 45.05.+x

DOI: 10.7498/aps.62.044501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11272155, 11132007, 10772085), the 333 Project of Jiangsu Province, China (Grant No. BRA2011172), and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology, China (Grant Nos. QKJB201203, CKJ2010004).

† Corresponding author. E-mail: zhangdg419@mail.njust.edu.cn