

变系数 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的三孤子新解*

徐兰兰[†] 陈怀堂[‡]

(临沂大学理学院, 临沂 276005)

(山东师范大学数学科学学院, 济南 250014)

(2012 年 11 月 11 日收到; 2012 年 12 月 10 日收到修改稿)

本文为获得非线性发展方程的相互作用解, 研究了辅助方程法, 并扩展应用辅助方程法和 (G'/G) 展开法, 获得了变系数非线性 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的由椭圆函数、双曲函数、三角函数和有理函数混合构成的新相互作用解.

关键词: (G'/G) 展开法, 辅助方程法, 三孤子解

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.62.090204

1 引言

在最近几年里, 由于孤立子理论在自然科学领域中的广泛应用, 所以寻求非线性偏微分方程的精确解就变得十分重要. 构造非线性偏微分方程精确解的方法有很多, 而且这些方法都已经得到了很好的发展. 比如, Jacobi 椭圆函数展开法^[1], Bäcklund 变换^[2], Hirota 双线性方法^[3], Wronskian 形式展开法^[4], 椭圆方程方法^[5-7], 双辅助方程法^[8,9], 齐次平衡法^[10], Riccati 方程有理展开法^[11]等等. 但是, 到目前为止还没有一种统一的方法能够求解所有类型的非线性偏微分方程.

最近, 有人提出了一种求非线性偏微分方程精确解的方法, 即 (G'/G) 展开法. 其中 $G(\xi)$ 满足一个二阶常微分方程 $G''(\xi) + \lambda G'(\xi) + \mu G(\xi) = 0$, λ 和 μ 是任意常数. 这种方法的主要思路就是借助辅助方程的解以及 (G'/G) 展开形式求非线性偏微分方程的解. 对于该方法的具体应用可以参考文献 [12—14].

本文使用扩展的辅助方程法和 (G'/G) 展开法

构造变系数非线性偏微分方程的解, 获得了变系数 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的新相互作用解——三孤子解. 这些相互作用解混合了有理函数、三角函数、双曲函数以及雅可比椭圆函数. 变系数 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程是数学物理中最重要的方程之一, 被许多人研究^[15-17]. 该方程为

$$\begin{aligned} &u_t + k(t)u_{xxx} + r(t)u_{yyy} + s(t)u_x + q(t)u_y \\ &\quad - 3k(t)(uv)_x - 3r(t)(u\omega)_y = 0, \\ &u_x - v_y = 0, \\ &u_y - \omega_x = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $k(t)$, $r(t)$, $q(t)$, $s(t)$ 是关于 t 的任意函数.

2 方法介绍

该方法的主要步骤如下:

步骤 1 考虑下面非线性发展方程:

$$\begin{aligned} &H(u, u_t, u_x, u_y, u_{xy}, u_{ty}, \\ &u_{xt}, u_{tt}, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

* 山东省自然科学基金 (批准号: ZR2010AM014, Y2007A26) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: xulanlan777@163.com

[‡] 通讯作者. E-mail: chenhuaitang@sina.com

假设方程 (2) 的三孤子解的一般形式为

$$u(x, y, t) = a_0(x, y, t) + \sum_{k=1}^n \sum_{i+j+l=k} a_{ijl}(x, y, t) \phi^i(\xi) \times \left(\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} \right)^j \left(\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} \right)^l, \quad (3)$$

其中 $a_0(x, y, t)$, $a_{ijl}(x, y, t)$ ($i, j, l = 0, 1, 2, \dots, n$) 为待定系数. 通过齐次平衡法, 即利用给定方程的最高阶非线性项和最高阶导数项, 就能确定正整数 n .

步骤 2 新的变量 $\phi(\xi)$, $G(\eta)$ 和 $F(\theta)$ 分别满足以下三个辅助方程:

$$\phi'(\xi) = Q + R\phi(\xi) + P\phi^2(\xi), \quad (4)$$

其中 Q, R, P 是任意常数, 而且 $P \neq 0$, $\xi = k_1x + m_1y + \lambda_1(t)$.

$$G''(\eta) + \lambda G'(\eta) + \mu G(\eta) = 0, \quad (5)$$

其中 λ, μ 是任意常数, $\eta = k_2x + m_2y + \lambda_2(t)$.

$$(F'(\theta))^2 = A + BF^2(\theta) + CF^4(\theta), \quad (6)$$

其中 A, B, C 是任意常数, 而且 $C \neq 0$, $\theta = k_3x + m_3y + \lambda_3(t)$. $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3$ 是待定常数, $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$, 是关于 t 的待定函数.

步骤 3 借助辅助方程 (4), (5), (6), 把 (3) 代入到 (2) 式中左端, 整理得到一个关于 $\phi^i(\xi) \left(\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} \right)^j \left(\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} \right)^l$ ($i, j, l = 0, 1, 2, \dots$) 的多项式, 令每一项的系数为零, 得到关于 $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), a_0(x, y, t)$ 以及 $a_{ijl}(x, y, t)$ 的微分方程组. 解这个微分方程组, 得到 $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), a_0(x, y, t)$ 以及 $a_{ijl}(x, y, t)$ 的解或表达式.

步骤 4 把 $a_0(x, y, t)$, $a_{ijl}(x, y, t)$ ($i, j, l = 0, 1, 2, \dots, n$), $k_1, k_2, k_3, m_1, m_2, m_3, \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t)$ 以及辅助方程 (4), (5), (6) 的解代入到 (3) 式中, 就得到非线性发展方程 (2) 的解.

步骤 5 辅助方程包括 Riccati 方程 (4), 线性常微分方程 (5) 和椭圆方程 (6), 它们的解列在表 1—3 中, 利用这些解就能得到非线性发展方程 (2) 的一系列相互作用解.

3 变系数 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程的三孤子新解

下面利用上述方法构造变系数 (2+1) 维

Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程 (1) 的三孤子解.

通过平衡 (1) 的最高阶非线性项和最高阶导数项, 得到 $n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 2$. 为简化计算量, 假设方程 (1) 的三孤子解的形式为

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= a_0(t) + a_1(t)\phi(\xi) \\ &\quad + a_2(t)\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} + a_3(t)\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}, \\ v(x, y, t) &= b_0(t) + b_1(t)\phi(\xi) \\ &\quad + b_2(t)\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} + b_3(t)\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}, \\ \omega(x, y, t) &= c_0(t) + c_1(t)\phi(\xi) \\ &\quad + c_2(t)\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} + c_3(t)\frac{F'(\theta)}{F(\theta)}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $a_0(t), b_0(t), c_0(t), a_i(t), b_i(t), c_i(t), k_i, m_i, \lambda_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$), $\xi = k_1x + m_1y + \lambda_1(t)$, $\eta = k_2x + m_2y + \lambda_2(t)$, $\theta = k_3x + m_3y + \lambda_3(t)$ 待定. 借助辅助方程 (4), (5) 和 (6), 把 (7) 式代入到 (1) 式中, 整理得到关于 $\phi^i(\xi) \left(\frac{G'(\eta)}{G(\eta)} \right)^j \left(\frac{F'(\theta)}{F(\theta)} \right)^l$ ($i, j, l = 0, 1, 2, \dots$) 的多项式. 令每一项的系数都为零, 得到关于 $k(t), r(t), q(t), s(t), a_0(t), b_0(t), c_0(t), a_i(t), b_i(t), c_i(t), k_i, m_i, \lambda_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 的微分方程组. 求解这个微分方程组, 得到许多组解. 这里, 给出最具代表性的一组解:

$$\begin{aligned} k_1 &= k_1, \quad k_2 = k_2, \quad k_3 = k_3, \\ m_1 &= \frac{k_1 m_2}{k_2}, \quad m_2 = m_2, \quad m_3 = \frac{k_3 m_2}{k_2}, \\ k(t) &= k(t), \quad q(t) = q(t), \quad s(t) = s(t), \\ r(t) &= -\frac{k(t)k_2^3}{m_2^3}, \quad a_0(t) = C_4, \\ a_1(t) &= C_7, \quad a_2(t) = C_6, \\ a_3(t) &= C_5, \quad b_0(t) = b_0(t), \\ b_1(t) &= \frac{a_1(t)k_2}{m_2}, \quad b_2(t) = \frac{a_2(t)k_2}{m_2}, \\ b_3(t) &= \frac{a_3(t)k_2}{m_2}, \quad c_0(t) = c_0(t), \\ c_1(t) &= \frac{a_1(t)m_2}{k_2}, \quad c_2(t) = \frac{a_2(t)m_2}{k_2}, \\ c_3(t) &= \frac{a_3(t)m_2}{k_2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \int \left(-\frac{k_1(3k(t)k_2^3c_0(t) + m_2^2s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2k(t)k_2b_0(t))}{m_2^2k_2} \right) dt + C_3, \\
\lambda_2(t) &= \int \left(-\frac{3k(t)k_2^3c_0(t) + m_2^2s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2k(t)k_2b_0(t)}{m_2^2} \right) dt + C_2, \\
\lambda_3(t) &= \int \left(-\frac{k_3(3k(t)k_2^3c_0(t) + m_2^2s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2k(t)k_2b_0(t))}{m_2^2k_2} \right) dt + C_1.
\end{aligned} \tag{8}$$

方程 (4)—(6) 的解见表 1—3.

表 1 Riccati 方程 (4) 的一般解

$\Delta = R^2 - 4PQ$	$\phi(\xi)$
$\Delta > 0$	$\phi(\xi) = -\frac{R+\sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)$
$\Delta > 0$	$\phi(\xi) = -\frac{R+\sqrt{\Delta}}{2P} \coth\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right)$
$\Delta < 0$	$\phi(\xi) = -\frac{R-\sqrt{-\Delta}}{2P} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$
$\Delta < 0$	$\phi(\xi) = -\frac{R-\sqrt{-\Delta}}{2P} \cot\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right)$
$R = Q = 0, P \neq 0$	$\phi(\xi) = \frac{-1}{P\xi + H_1}$

表 2 线性常微分方程 (5) 的 $G'(\eta)/G(\eta)$ 形式解

λ, μ	$G'(\eta)/G(\eta)$
$\lambda^2 > 4\mu$	$G'(\eta)/G(\eta) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2} \frac{c_1 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right) + c_2 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right)}{c_1 \cosh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right) + c_2 \sinh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}\eta\right)}$
$\lambda^2 < 4\mu$	$G'(\eta)/G(\eta) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}$
$\lambda^2 = 4\mu$	$G'(\eta)/G(\eta) = -\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2\eta}$

表 3 椭圆方程 (6) 的一般解

A	B	C	$F(\theta)$	$F'(\theta)$
r^2	$-(1+r^2)$	1	$\text{sn}(\theta, r), \text{cd}(\theta, r)$	$\text{cn}(\theta, r)\text{dn}(\theta, r), (-1+r^2\text{cd}^2(\theta, r))\text{sn}(\theta, r)$
$-r^2$	$2r^2-1$	$1-r^2$	$\text{cn}(\theta, r)$	$-\text{sn}(\theta, r)\text{dn}(\theta, r)$
-1	$2-r^2$	r^2-1	$\text{dn}(\theta, r)$	$-r^2\text{sn}(\theta, r)\text{cn}(\theta, r)$
1	$-(1+r^2)$	r^2	$\text{ns}(\theta, r), \text{dc}(\theta, r)$	$-\text{cs}(\theta, r)\text{ds}(\theta, r), (-r^2+\text{dc}^2(\theta, r))\text{sn}(\theta, r)$
$1-r^2$	$2r^2-1$	$-r^2$	$\text{nc}(\theta, r)$	$\text{sc}(\theta, r)\text{dc}(\theta, r)$
r^2-1	$2-r^2$	-1	$\text{nd}(\theta, r)$	$r^2\text{sd}(\theta, r)\text{cd}(\theta, r)$
$1-r^2$	$2r^2-1$	1	$\text{sd}(\theta, r)$	$(1+r^2\text{sd}^2(\theta, r))\text{cn}(\theta, r)$
1	$2-r^2$	$1-r^2$	$\text{cs}(\theta, r)$	$(-1-\text{cs}^2(\theta, r))\text{dn}(\theta, r)$
1	$2r^2-1$	$r^2(1-r^2)$	$\text{ds}(\theta, r)$	$(-r^2-\text{ds}^2(\theta, r))\text{cn}(\theta, r)$

表中 H_1 是积分常数, c_1 和 c_2 是任意常数, r 是 Jacobi 椭圆函数的模数, $\text{ns}(\theta, r) = \frac{1}{\text{sn}(\theta, r)}$, $\text{nc}(\theta, r) = \frac{1}{\text{cn}(\theta, r)}$, $\text{nd}(\theta, r) = \frac{1}{\text{dn}(\theta, r)}$, $\text{cd}(\theta, r) = \frac{\text{cn}(\theta, r)}{\text{dn}(\theta, r)}$, $\text{dc}(\theta, r) = \frac{\text{dn}(\theta, r)}{\text{cn}(\theta, r)}$, $\text{ds}(\theta, r) = \frac{\text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}$, $\text{sd}(\theta, r) = \frac{\text{sn}(\theta, r)}{\text{dn}(\theta, r)}$, $\text{cs}(\theta, r) = \frac{\text{cn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}$, $\text{sc}(\theta, r) = \frac{\text{sn}(\theta, r)}{\text{cn}(\theta, r)}$.

根据表 1、表 2 和表 3, 把 (8) 式代入 (7) 式中, 得到 (1) 式的三孤子新解. 例如:

1) 如果 $\Delta > 0$, $\lambda^2 < 4\mu$, 而且 $A = r^2$, $B = -(1+r^2)$, $C = 1$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= C_4 + C_7 \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + C_6 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)} \\ &\quad + C_5 \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \\ v(x, y, t) &= b_0(t) + \frac{C_7 k_2}{m_2} \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 k_2}{m_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)} \\ &\quad + \frac{C_5 k_2}{m_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \\ \omega(x, y, t) &= c_0(t) + \frac{C_7 m_2}{k_2} \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 m_2}{k_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2} \right) \\ &\quad \times \frac{-c_1 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)}{c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4\mu - \lambda^2}}{2}\eta\right)} \\ &\quad + \frac{C_5 m_2}{k_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}. \end{aligned}$$

2) 如果 $\Delta > 0$, $\lambda^2 = 4\mu$, 而且 $A = r^2$, $B = -(1+r^2)$, $C = 1$, 则有

$$u(x, y, t) = C_4 + C_7 \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right)$$

$$\begin{aligned} &+ C_6 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 \eta + c_2} \right) \\ &+ C_5 \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(x, y, t) &= b_0(t) + \frac{C_7 k_2}{m_2} \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 k_2}{m_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 \eta + c_2} \right) \\ &\quad + \frac{C_5 k_2}{m_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \\ \omega(x, y, t) &= c_0(t) + \frac{C_7 m_2}{k_2} \left(-\frac{R + \sqrt{\Delta}}{2P} \tanh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 m_2}{k_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 \eta + c_2} \right) \\ &\quad + \frac{C_5 m_2}{k_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}. \end{aligned}$$

3) 如果 $\Delta < 0$, $\lambda^2 = 4\mu$, 而且 $A = r^2$, $B = -(1+r^2)$, $C = 1$, 则有

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= C_4 + C_7 \left(-\frac{R - \sqrt{-\Delta}}{2P} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + C_6 \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \eta} \right) \\ &\quad + C_5 \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \\ v(x, y, t) &= b_0(t) + \frac{C_7 k_2}{m_2} \left(-\frac{R - \sqrt{-\Delta}}{2P} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 k_2}{m_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \eta} \right) \\ &\quad + \frac{C_5 k_2}{m_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \\ \omega(x, y, t) &= c_0(t) + \frac{C_7 m_2}{k_2} \left(-\frac{R - \sqrt{-\Delta}}{2P} \tan\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\xi\right) \right) \\ &\quad + \frac{C_6 m_2}{k_2} \left(-\frac{\lambda}{2} + \frac{c_2}{c_1 + c_2 \eta} \right) \\ &\quad + \frac{C_5 m_2}{k_2} \frac{\text{cn}(\theta, r) \text{dn}(\theta, r)}{\text{sn}(\theta, r)}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi &= k_1 x + \frac{k_1 m_2}{k_2} y + \int \left(-\frac{k_1(3k(t)k_2^3 c_0(t) + m_2^2 s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2 k(t)k_2 b_0(t))}{m_2^2 k_2} \right) dt + C_3, \\ \eta &= k_2 x + m_2 y + \int \left(-\frac{3k(t)k_2^3 c_0(t) + m_2^2 s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2 k(t)k_2 b_0(t)}{m_2^2} \right) dt + C_2, \\ \theta &= k_3 x + \frac{k_3 m_2}{k_2} y + \int \left(-\frac{k_3(3k(t)k_2^3 c_0(t) + m_2^2 s(t)k_2 + q(t)m_2^3 - 3m_2^2 k(t)k_2 b_0(t))}{m_2^2 k_2} \right) dt + C_1,\end{aligned}$$

其中 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ 是任意常数. 根据表 1、表 2 和表 3 的解, 还能得到更多的三孤子新解, 包含椭圆函数, 双曲函数, 三角函数和有理函数混合的新相互作用解. 这里就不一一列举.

4 结 论

本文给出了一种求非线性发展方程的三孤子解的一种方法. 该方法是对辅助方程方法的扩展和 (G'/G) 展开法的改进. 利用这种方法, 成功地获得

了变系数非线性 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 方程 (1) 的三孤子新解. 这些相互作用解混合了有理函数、三角函数、双曲函数以及雅克比椭圆函数. 这些解要比之前文献 [15—17] 中的解更丰富. 这些结果对于研究解的物理意义有一定参考价值. 本文利用三个不同的辅助方程构造了非线性发展方程的解, 该方法在研究非线性发展方程方面更具有有效性和实用性. 本文提到的非线性发展方程以及求出的解的物理意义有待于进一步探讨.

-
- [1] Lu D Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4501 (in Chinese) [吕大昭 2005 物理学报 **54** 4501]
 - [2] Wu J P 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 060207
 - [3] Zuo J M, Zhang Y M 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010205
 - [4] Lu D Z, Cui Y Y, Liu C H, Zhang Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6793 (in Chinese) [吕大昭, 崔艳英, 刘长河, 张艳 2010 物理学报 **59** 6793]
 - [5] Liang L W, Li X D, Li Y X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2159 (in Chinese) [梁立为, 李兴东, 李玉霞 2009 物理学报 **58** 2159]
 - [6] Chen H T, Zhang H Q 2003 *Chaos, Solitons and Fractals* **15** 585
 - [7] Chen H T, Zhang H Q 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **20** 765
 - [8] Houria Triki, Abdul-Majid Wazwaz 2009 *Appl. Math. Comput.* **214** 370
 - [9] Chen H T, Yin H C 2007 *Journal of Mathematical Physics* **48** 013504
 - [10] Ye C E, Zhang W G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5929 (in Chinese) [叶彩儿, 张卫国 2010 物理学报 **59** 5929]
 - [11] Wang J 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2924 (in Chinese) [王静 2010 物理学报 **59** 2924]
 - [12] Li B Q, Ma Y L, Xu M P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1409 (in Chinese) [李帮庆, 马玉兰, 徐美萍 2010 物理学报 **59** 1409]
 - [13] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Physics Letters A* **372** 417
 - [14] Zayed E M E 2009 *Appl. Math. Comput.* **89** 103
 - [15] Zayed E M E 2009 *J. Appl. Math. Comput.* **30** 89
 - [16] Zhang S, Xia T C 2011 *Appl. Math. Comput.* **218** 1308
 - [17] Gepreel K A, Shehata A R 2012 *Scientific Research and Essays*. **7** 149

New three-soliton solutions to (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Vesselov equations with variable coefficients*

Xu Lan-Lan[†] Chen Huai-Tang[‡]

(School of Science, Linyi University, Linyi 276005, China)

(Department of Mathematics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

(Received 11 November 2012; revised manuscript received 10 December 2012)

Abstract

In this paper, in order to obtain new solutions to nonlinear evolution equations, the auxiliary equation method and (G'/G) -expansion method are studied and extended. By using the method, many new exact solutions of the nonlinear (2+1)-dimensional Nizhnik-Novikov-Vesselov equations with variable coefficients are obtained. The interaction new solutions include Jacobi elliptic function, hyperbolic function, triangular function and rational function.

Keywords: (G'/G) -expansion method, auxiliary equation method, three-soliton solution

PACS: 02.30.Jr, 04.20.Jb, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.62.090204

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant Nos. ZR2010AM014, Y2007A26).

[†] Corresponding author. E-mail: xulanlan777@163.com

[‡] Corresponding author. E-mail: chenhuitang@sina.com