

## 连续时间系统同宿轨的搜索算法及其应用\*

杨芳艳<sup>1)2)†</sup> 胡明<sup>2)</sup> 姚尚平<sup>1)</sup>

1) (重庆邮电大学, 工业物联网与网络化控制教育部重点实验室, 重庆 400065)

2) (重庆邮电大学非线性电路与系统研究所, 重庆 400065)

(2012年8月31日收到; 2013年1月10日收到修改稿)

同宿轨的求解是非线性系统领域的核心问题之一, 特别是对动力系统分岔与混沌的研究有重要意义. 根据同宿轨的几何特点, 采用轨线逼近的方式, 通过定义逼近轨线与鞍点的距离, 将同宿轨的求解转化为求距离最小值的无约束非线性优化问题. 为了提高优化结果的完整性, 还提出了基于区间细分的搜索算法和实现方法, 并找出了 Lorenz 系统, Shimizu-Morioka 系统和超混沌 Lorenz 系统等的多个同宿轨道和对应参数, 验证了本文方法的有效性.

**关键词:** 混沌, 同宿轨, 非线性系统, 数值计算

**PACS:** 05.10.-a, 05.45.-a, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.100501

## 1 引言

同宿轨是从一个鞍点到其本身的轨线, 是研究系统状态结构和稳定性的基础, 与非线性动力系统的分岔和混沌有着密切关系, 在 Hamilton 力学<sup>[1]</sup>、非线性震荡<sup>[2-4]</sup>、混沌信号产生器设计<sup>[5,6]</sup>中有重要应用. 同宿轨常常是混沌运动的组织中心, 同宿分岔和同宿相交往往是动力系统产生混沌的源泉. 借助于同宿轨, 人们可以利用 Silnikov 定理<sup>[7]</sup>、Smale-Birkhoff 定理<sup>[8,9]</sup>、Melnikov 方法<sup>[10-12]</sup>、拓扑马蹄理论<sup>[13-15]</sup>来判定混沌行为, 分析混沌产生的内在机制. 因此, 同宿轨的寻找一直是非线性系统研究的核心问题之一, 有着重要的研究价值.

关于同宿轨道的寻找问题, 国内外的研究成果主要有解析方法和数值方法. 解析方法主要有 Melnikov 方法<sup>[10]</sup>、级数待定系数法<sup>[16]</sup>以及它们的改进与应用等<sup>[17,18]</sup>. 此外, 一些特定系统同宿轨的存在性上, 也有若干理论推导工作<sup>[19,20]</sup>. 这些方法的优点是具有严格数学理论, 可以方便地对动力系统做定性和定量分析. 缺点是只能用于光滑系统的案例分析, 并且分析过程在一定程度上需要近似处理, 对于非线性项比较复杂的系统或者高维

系统, 因难以获得合适的解析表达式而失效. 关于同宿轨的数值计算, 由于同宿轨可看作是过鞍点且有无穷周期的周期轨, 因此人们最早采用周期轨进行逼近<sup>[21]</sup>. 但由于不适用于鞍点特征值实部较小的情形, 例如 Lorenz 系统<sup>[22]</sup>, 从而引发人们开始从不同角度进行尝试. 随着当今计算机科学和数值计算的发展, 国内外涌现出不少方法, 从核心思想上, 可分为以下几类: Rodríguez-Luis 和 Freire 的打靶法<sup>[23,24]</sup>, Beyn, Friedman, Sandstede, Bao, Witte 等的边值法<sup>[25-29]</sup>, Lenci, Tigan 等基于流形的方法<sup>[30-33]</sup>. 这些算法各具特色, 但也有不足. 打靶法简单直观, 但是容易遇到截面选取的困难. 因为轨线和鞍点都随系统参数和状态的变化而改变, 截面容易失效, 需要大量尝试. 此外, 对于高维系统, 截面的选取更为困难. 边值法的优点是具有简洁的数学模型, 其缺点是数值求解难度较大. 边值法通常通过求解长周期轨道来获取较好的初始点, 相当费时. 此外, 为了获得足够高的精度, 边值法中的截断时间必须充分大, 可是当时间充分大时, 轨线只在很小的区间上变化较快, 而其他大多时间几乎为零, 从而导致数值计算的难题. 采用流形计算的方法除了数值精度的问题外, 还面临计算量太大的难题.

针对上述方法通用性不高, 实现难度较大的缺

\* 国家自然科学基金(批准号: 61104150)、重庆市科委基金(批准号: cstcjjA40044)和重庆邮电大学博士启动金(批准号: A2009-12)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yangfy@cqupt.edu.cn

点, 本文根据同宿轨的几何性质, 采用轨道循序逼近的方式, 通过定义轨道与鞍点的距离, 将同宿轨的求解问题转化为一个通用的求距离最小值的无约束非线性优化问题, 进而提出一种基于区间细分的搜索算法, 去获得混沌或超混沌系统的同宿轨及其相关参数.

## 2 基于轨道远近点的搜索原理

考虑含参数的连续时间自治系统

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \lambda), \quad (1)$$

这里  $x$  为  $n$  维状态列向量,  $\lambda$  为  $p$  维参数变量, 向量值函数  $f: R^n \times R^p \rightarrow R^n$  连续. 设  $O$  表示系统 (1) 的鞍型平衡点, 即  $f(O, \lambda) = 0$ . 则  $O$  的同宿轨是指当  $t \rightarrow \pm\infty$  时均有  $x(t) \rightarrow O$  轨线.

同宿轨的寻找主要面临三个难题: 一是搜索方法的问题, 即设计一个迭代算法, 使初始轨线能最终收敛于同宿轨道; 二是参数估计问题, 由于  $x(t)$  会随  $\lambda$  改变而变,  $O$  也可能是关于  $\lambda$  的函数, 而同宿轨常常只在某些特定的参数中存在; 三是精度问题. 众所周知, 同宿轨道常常与混沌现象密不可分, 例如拓扑马蹄、Silnikov 混沌等. 由于混沌系统对初值和参数都很敏感, 而鞍点附近的轨道有着强烈的发散趋势, 因此从鞍点附近出发, 直接搜索同宿轨难以达到精度要求, 所以不可行. 如何设计一个简洁方法, 能将上述三个问题有效结合并解决, 是同宿轨搜索的关键. 这也是传统的打靶法、边值法等效果不好的根本原因. 为此, 本文充分利用同宿轨的几何特性, 结合流形理论和优化算法, 提出了基于轨道远近点的搜索方法.

不妨假设当  $\lambda = \lambda^*$  时系统 (1) 有一条连接鞍点  $O$  的同宿轨  $\gamma$ , 如图 1 所示. 因为 (1) 为自治系统, 并且满足解的存在和惟一性定理, 所以  $\gamma$  可以仅由参数  $\lambda^*$  以及  $\gamma$  上的任意一点  $x^*$  惟一确定. 也就是说, 要搜索同宿轨  $\gamma$ , 只需某一初始状态  $\bar{x}$  和初始参数  $\lambda$  开始迭代, 使之分别收敛到合适的  $x^*$  和  $\lambda^*$  即可. 鞍点  $O$  附近的轨道有强烈的发散性, 为克服数值精度的问题,  $\bar{x}$  和  $x^*$  应尽可能远离  $O$ , 如图 1 所示. 这样, 从  $x^*$  出发的正半轨线与  $O$  的稳定流形重合, 称之为  $W^s$ ; 从  $x^*$  反向出发的负半轨线与  $O$  的不稳定流形重合, 称之为  $W^u$ . 于是,  $W^s$  和  $W^u$  一起构成了鞍点  $O$  的同宿轨  $\gamma$ . 在迭代时, 从  $\bar{x}$  出发的正半轨  $\bar{W}^s$  和负半轨  $\bar{W}^u$  将分别收敛于  $W^s$  和  $W^u$ .

为衡量收敛的程度, 采用欧氏距离  $\bar{d}$  进行度量.

$$\bar{d}^2 = \bar{d}_s^2 + \bar{d}_u^2, \quad (2)$$

其中,  $\bar{d}_s$  和  $\bar{d}_u$  分别表示  $\bar{W}^s$  和  $\bar{W}^u$  到  $O$  的最近欧氏距离, 其最近点分别用  $\bar{x}_s$  和  $\bar{x}_u$  表示. 由于  $\bar{d}$  为正,  $\bar{d}^2$  是它的单调函数, 所以在衡量收敛性时, 两者是等价的. 为了计算的方便 (避免开平方、简化求导等), 这里直接采用  $\bar{d}^2$  进行度量.

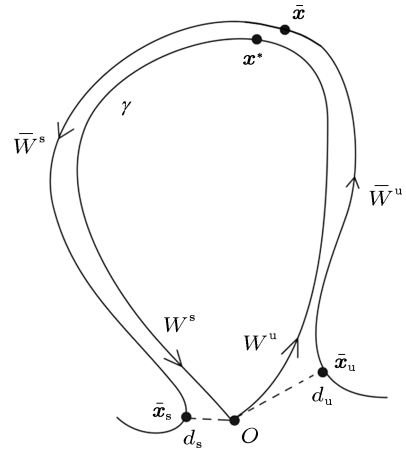


图 1 基于轨道远近点的搜索算法图解

计算  $\bar{d}^2$  的值, 需要分别求解  $\bar{d}_s$  和  $\bar{d}_u$ . 对于  $\bar{d}_s$ , 以  $\bar{x}$  为初始状态, 以  $\lambda$  为系统参数, 对 (1) 式进行数值积分, 得出  $\bar{W}^s$ , 并在求解过程中寻找距离的最近点  $\bar{x}_s$ . 为此, 考虑该轨线上的任意一点  $x$  到  $O$  的距离平方:

$$d^2 \triangleq \|x - O\|_2^2 \equiv (x - O)^T (x - O), \quad (3)$$

显然, 当  $x = \bar{x}_s$  时, 满足下式

$$(d^2)' \triangleq \frac{dd^2}{dt} \equiv 2(x(t) - O)^T f(x(t), \lambda) = 0. \quad (4)$$

于是, 选取 (4) 式为截面.  $x(t) = O$  位于该截面内, 并且在  $O$  的充分小去心邻域内,  $f(x(t), \lambda)$  为  $x(t)$  处的曲面法线矢量, 所以系统 (1) 的轨线在  $O$  附近几乎垂直穿过该曲面. 当  $x$  靠近  $\bar{x}_s$  时, 随着时间  $t$  的增加,  $d^2$  会先变小后增加. 因此, 可以通过捕捉  $(d^2)'$  从负向正穿过 0 的点  $x$  来搜索  $\bar{x}_s$ . 由于上述过程与 Poincaré 映射一致, 因此不仅可采用现有算法和程序进行求解, 而且还可保留  $\bar{x}_s$  对初值  $\bar{x}$  和参数  $\lambda$  的连续性. 所以  $\bar{d}_s$  对初值  $\bar{x}$  和参数  $\lambda$  连续.

类似地, 对于  $\bar{d}_u$ , 利用 (1) 式的时间取反系统

$$\dot{x}(t) = -f(x(t), \lambda) \quad (5)$$

替换 (1) 式, 采用计算与  $\bar{d}_s$  同样的方式进行计算, 这时的 (4) 式变为

$$(d^2)' \equiv -2(\mathbf{x}(t) - O)^T \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}) = 0. \quad (6)$$

同样  $\bar{d}_u$  对初值  $\bar{\mathbf{x}}$  和参数  $\boldsymbol{\lambda}$  也连续. 因此, 由 (2) 式可知,  $\bar{d}^2$  是关于  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  的连续函数. 于是, 整个同宿轨的求解问题转化为函数求最小值的无约束非线性优化问题. 即

$$\min \bar{d}^2(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}), \quad (7)$$

关于  $\bar{d}^2(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})$  求解, 则又是传统的 Poincaré 映射数值计算问题. 这两种问题目前已经有许多优秀成熟算法可以借鉴, 甚至有一些可靠的程序代码可直接利用. 因此, 在上述框架下, 能够保障计算的精度、速度和普适性, 同宿轨的搜索将变得更加可行.

关于初始值  $\bar{\mathbf{x}}$ , 首先给定  $\boldsymbol{\lambda}$  以及  $O$  充分小邻域内的一初始值  $\bar{\mathbf{x}}(0)$ , 然后对 (1) 或 (5) 式数值求解, 使其远离  $O$  即可. 这里的  $\bar{\mathbf{x}}(0)$  可随机给定, 因为在  $O$  邻域内, 不管  $\bar{\mathbf{x}}(0)$  取何值, 都会以很快的速度向系统的不稳定流形靠拢. 为方便起见, 选择  $\bar{\mathbf{x}}$  为轨道距离  $O$  的极远点. 在  $\bar{\mathbf{x}}(t)$  靠近最远点时, 距离  $d^2$  先变大然后变小. 因此通过扑捉  $(d^2)'$  从正向负穿过 0 的点, 来判定  $\bar{\mathbf{x}}$ . 其计算过程与  $\bar{\mathbf{x}}_s$  和  $\bar{\mathbf{x}}_u$  类似.

### 3 算法的实现

从原理上讲, 在优化数值函数  $\bar{d}^2(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})$  值时,  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  都是多维, 可以将  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  合并为一个未知向量, 无需设计专门的搜索算法, 采用现有的非线性函数优化方法即可直接求解. 但是, 由于这些方法都需要给定一个迭代初始值, 如果初始值不在收敛区域内, 则优化无法进行; 或者如果初值都在同一个收敛区域, 则会遗漏其他收敛结果. 考虑到搜索结果的完整性和计算误差的问题, 下面采用区间细分的方法, 将  $\bar{\mathbf{x}}$  和  $\boldsymbol{\lambda}$  区分开来实现该优化问题.

对于许多混沌系统, 例如 Lorenz 或 Chen 系统, 其同宿轨的其中一端常常是一维稳定或不稳定流形. 为便于论述上述框架的应用方法, 我们将以这类同宿轨为例, 结合单纯形优化算法, 给出基于一维参数搜索的算法. 对于多参数或者同宿轨的两端都不是一维流形的情形, 我们可以分别对参数和初始值  $\bar{\mathbf{x}}(0)$  进行多维搜索来解决. 假设参数范围是  $[\lambda^-, \lambda^+]$ , 算法的流程如图 2 所示, 具体步骤如下.

1) 设置待搜索的区间队列为  $L = \{[\lambda^-, \lambda^+]\}$ , 设置参数: 最小区间  $\Delta_{\min}$ , 细分点数  $N$ , 轨线最大长度  $S$  和求解精度  $\varepsilon$ .

2) 如果队列  $L$  为空, 则结束算法, 否则取队头区间, 等分为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_i, \dots, \lambda_N$ , 并设  $\Delta$  为等分间距.

3) 对于每个参数  $\lambda_i$ , 将其代入系统 (1) 中, 求相应鞍点  $O_i$  的坐标, 并在  $O_i$  的  $\varepsilon$  邻域内, 随机的选择一个初始点计算  $\bar{\mathbf{x}}_i$ .

4) 用优化算法对  $\bar{\mathbf{x}}_i$  进行迭代, 使得  $\bar{d}_i^2$  最小. 其中, 函数  $\bar{d}_i^2(\bar{\mathbf{x}}_i, \lambda_i)$  的求解过程如下: 以  $\bar{\mathbf{x}}_i$  为初始点求解系统 (1), 当 (4) 式中的  $(d^2)'$  从负向正穿过 0 时, 记下距离  $d_s$  和轨线  $\bar{W}^s$ ; 同时求解反向系统 (5) 式, 当 (6) 式中的  $(d^2)'$  从负向正穿过 0 时, 记下距离  $d_u$  和轨线  $\bar{W}^u$ ; 取  $\bar{d}_i^2 = \bar{d}_s^2 + \bar{d}_u^2$ . 在轨道积分时, 为避免无解或无界, 如果轨道长度超过  $S$  则立即终止, 并令  $\bar{d}_i^2 = NaN$ .

5) 求  $\bar{d}_1^2, \bar{d}_2^2, \dots, \bar{d}_N^2$  的极小值  $\bar{d}_j^2$ , 如果  $\bar{d}_j^2 < \varepsilon^2$ , 则输出  $\mathbf{x}_j, \lambda_j, \bar{d}_j^2$  以及该参数对应的同宿轨  $\gamma = \bar{W}^u \cup \bar{W}^s \cup O$ ; 否则如果  $\Delta > \Delta_{\min}$ , 则需要对  $\lambda_j$  附近缩小区间进一步搜索, 即将区间  $[\lambda_j - \Delta, \lambda_j + \Delta]$  加入区间队列  $L$ , 然后返回第 2) 步.

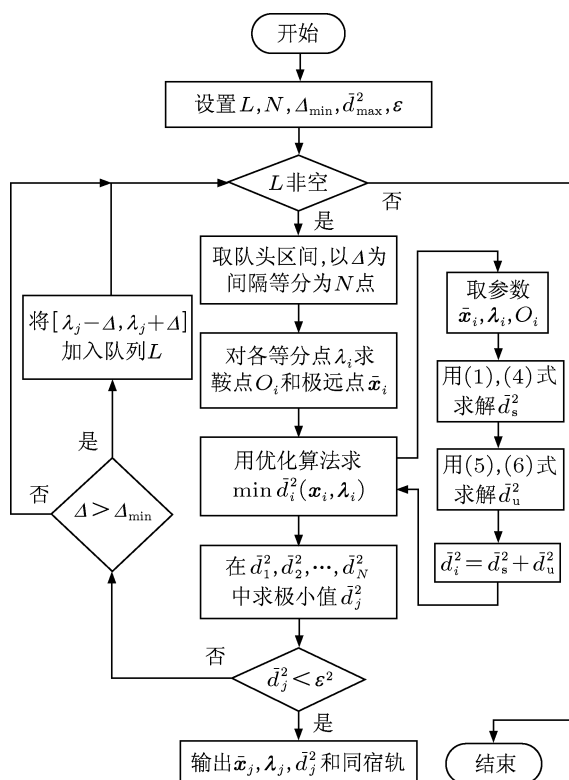


图 2 算法流程图

算法适用范围分析: 对于一个存在同宿轨的实际系统, 如果初始参数区间正确, 那么算法能否找到该同宿轨的关键是能否使  $\bar{d}^2(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda})$  收敛至 0. 这取决于以下两个问题: 1)  $\bar{d}_s$  和  $\bar{d}_u$  是否真实地代表

着迭代轨道与鞍点的最短距离; 2) 无约束优化问题  $\min \bar{d}^2(\bar{x}, \lambda)$  能否收敛到最小值, 而不是一个其他极小值. 对于问题 1), 如果 Poincaré 映射的第一次回归点不是距  $O$  最近点, 算法可能失效. 例如, 当系统的雅可比矩阵  $Df$  在鞍点  $O$  的特征值非零虚部时,  $W^s$  或  $W^u$  出现螺旋收敛或发散的情形. 因为迭代轨道不是最终的同宿轨, 它必然会在鞍点  $O$  附近离开, 所以通过 Poincaré 映射的有限次迭代, 就可找出轨道离开  $O$  前的最近点, 从而有效避免问题 1) 的出现. 对于问题 2), 这属于无约束优化问题的基本难题, 可采用不同的初始值或尝试不同的优化算法, 来获得最佳效果.

算法的复杂度分析: 由于本算法的核心任务是求解优化问题  $\min \bar{d}^2(\bar{x}, \lambda)$ , 该问题求解次数越少, 算法的执行效率越高. 在最坏情况下, 区间会被细分至  $\Delta_{\min}$  才找到解. 由于每次搜索区间大小变为  $2/(N-1)$ , 若初始参数范围为  $[\lambda_0^-, \lambda_0^+]$ , 则求解一个极小值最多需要细分  $\ln \frac{\Delta_{\min}}{\lambda_0^+ - \lambda_0^-} / \ln \frac{2}{N-1}$  次. 而每次细分需要对优化问题求解  $N$  次, 若存在  $M$  个参数极小值点, 则总优化次数不超过

$$I_{\max} = MN \frac{\ln \Delta_{\min} - \ln(\lambda_0^+ - \lambda_0^-)}{\ln 2 - \ln(N-1)}.$$

当今计算机已进入多核时代, 中央处理 CPU 有数个内核, 而通用图形处理器 GPU 有数千个内核, 有很强的并行计算能力. 在上述步骤中, 几乎所有的计算集中在第 3) 和 4) 步. 由于不同参数  $\lambda$  对应的计算过程相互独立, 因此在算法实现时可采用多核 CPU 多线程并行处理, 来获得多倍提速; 也可采用与文献 [34, 35] 类似的 CPU+GPU 异构平台实现, 以获得数十乃至上百倍的加速.

由于本算法采用细分原理, 有效降低了计算量, 因此本文采用 MATLAB 实现. 在 MATLAB 中, 常微分方程数值求解函数很多, 例如最常用的 ode45 函数完成, 由于其内部集成 Event 事件处理功能, 因此在轨道计算的同时, 可以判断  $\bar{x}$  穿越 Poincaré 截面的位置  $\bar{x}_s$  和  $\bar{x}_u$ , 从而实现函数  $\bar{d}_i^2(\bar{x}_i, \lambda_i)$  的计算. 同样, MATLAB 中的优化算法也很多, 这里采用 Nelder-Mead 单纯形算法, 因为该算法比较简单, 不需要求解  $\bar{d}_i^2$  的导数, 并且只要求  $\bar{d}_i^2(\bar{x}_i, \lambda_i)$  满足连续性.

### 4 数值仿真结果

为说明上述方法的有效性, 下面将在 MATLAB 平台下, 尝试寻找 Lorenz 系统、Shimizu-Morioka 系统和超混沌 Lorenz 系统的同宿轨.

例 1 Lorenz 系统在所有混沌微分方程中是最为著名, 该系统是由 Lorenz<sup>[22]</sup> 在 1963 年研究大气对流时引入的一个简化模型, 它具有后来人们所熟知的“奇怪吸引子”. 该系统方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\beta x_1 + x_2 x_3, \\ \dot{x}_2 &= \sigma(x_3 - x_2), \\ \dot{x}_3 &= -x_1 x_2 + \rho x_2 - x_3, \end{aligned} \tag{8}$$

显然, 原点  $O$  是本系统的一个鞍型平衡点, 其稳定和不稳定流形在文献 [32—34] 中得到了深入研究和刻画. 选择系统参数  $\sigma = 10$  和  $\beta = 8/3$ , 参数  $\rho$  的搜索区间为 [13, 16], 细分点数为  $N = 30$ , 最小区间  $\Delta_{\min} = 10^{-4}$ , 最大轨道长度  $S = 1000$ , 求解精度为  $\varepsilon = 10^{-8}$ . 最终得到: 当  $\rho \approx 13.926557$ , 轨道远点  $x^*$  为

$$[20.7243985861, 11.2074863293, 9.27588845321]^T$$

时存在同宿轨道  $\Gamma_1$ , 如图 3 所示. 由于 Lorenz 系统具有对称性, 通过变换  $(x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow (x_1, -x_2, -x_3)$ , 可以得出另一个同宿轨  $\Gamma_2$ . 从图 3 可以看出,  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  沿着同一方向 ( $x_1$  轴的负方向) 回到鞍点, 所以它们在鞍点处彼此相切. 通过改变参数  $\beta$ , 我们还发现 Lorenz 系统在参数  $(\sigma, \rho, \beta)$  取下列值 (10, 23.2002, 14/3), (10, 38.33393002, 20/3), (10, 60.55472667, 8.3) 时, 也存在着连接原点的系列同宿轨, 这些同宿轨在  $x_1$ - $x_2$  平面的投影如图 4 所示.

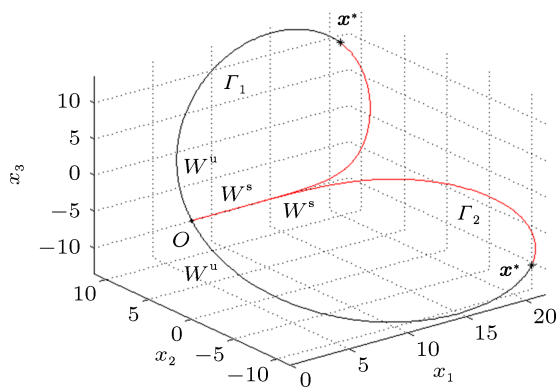


图 3 Lorenz 系统的同宿轨  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$

例2 Shimizu-Morioka 系统<sup>[36]</sup>如下

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = x - ay - xz, \\ \dot{z} = -bz + x^2, \end{cases} \quad (9)$$

原点是该系统的一个鞍点, 搜索该点的同宿轨. 在程序中, 设置系统参数  $b = 0.9$ ,  $a$  的搜索区间为  $[0.2, 2.3]$ , 细分点数  $N = 50$ , 其他参数同上. 经过计算, 得到当  $a \approx 0.8865579$  时, 系统存在两个同宿轨, 其对应的轨道远点坐标  $(x, y, z)$  如下

$$\begin{aligned} &(-1.35105194, 0.471714326, 1.85432111), \\ &(1.35105194, -0.471714326, 1.85432111). \end{aligned}$$

以这两个点为初始值, 经过轨道计算, 得到 Shimizu-Morioka 系统的同宿轨, 如图 5 所示. 从图 5 可以发现, 该系统在平衡点处的稳定流形和不稳定流形各有两支  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ , 与 Lorenz 系统不同, 两支稳定流形回到鞍点的方向并不相切, 所以 Shimizu-Morioka 系统中的同宿轨呈八字形.

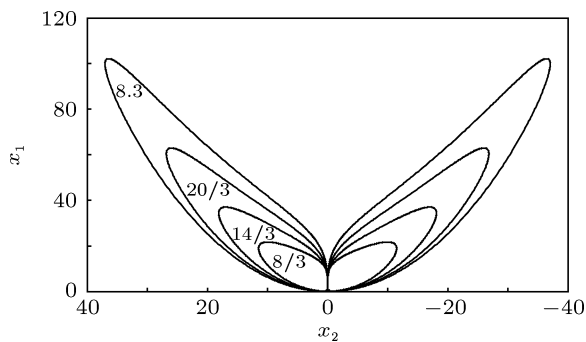


图4 Lorenz 系统的蝴蝶同宿轨在  $x_1-x_2$  平面的投影

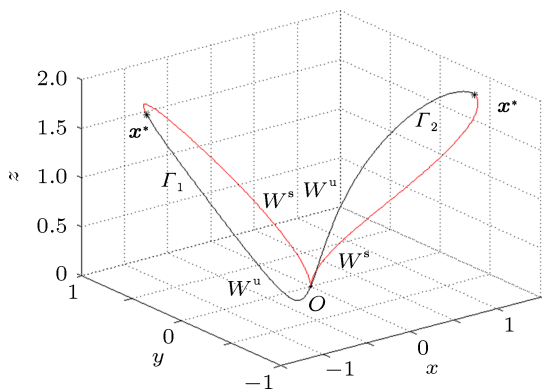


图5 Shimizu-Morioka 系统的同宿轨道

例3 下面考察一个四维超混沌 Lorenz 系统<sup>[37]</sup>, 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) + w, \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \\ \dot{w} = -yz + rw, \end{cases} \quad (10)$$

其超混沌性已被具有二维拉伸的拓扑马蹄验证<sup>[15]</sup>. 这里, 原点同样是系统的一个鞍型平衡点, 选取  $a = 10, b = 8/3, c = 13.904156$ , 并令  $r$  的搜索区间为  $[-20, 0]$ ,  $N = 200$ , 其余参数与例 1 相同. 经过搜索, 在  $r \approx -2.9503$  时找到两个同宿轨道  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$ , 如图 6 所示, 其轨道远点的坐标  $(x, y, z, w)$  分别为

$$\begin{aligned} &(-7.6781530, -5.688575, 20.94132, 29.059647), \\ &(7.6781530, 5.688575, 20.94132, -29.059647). \end{aligned}$$

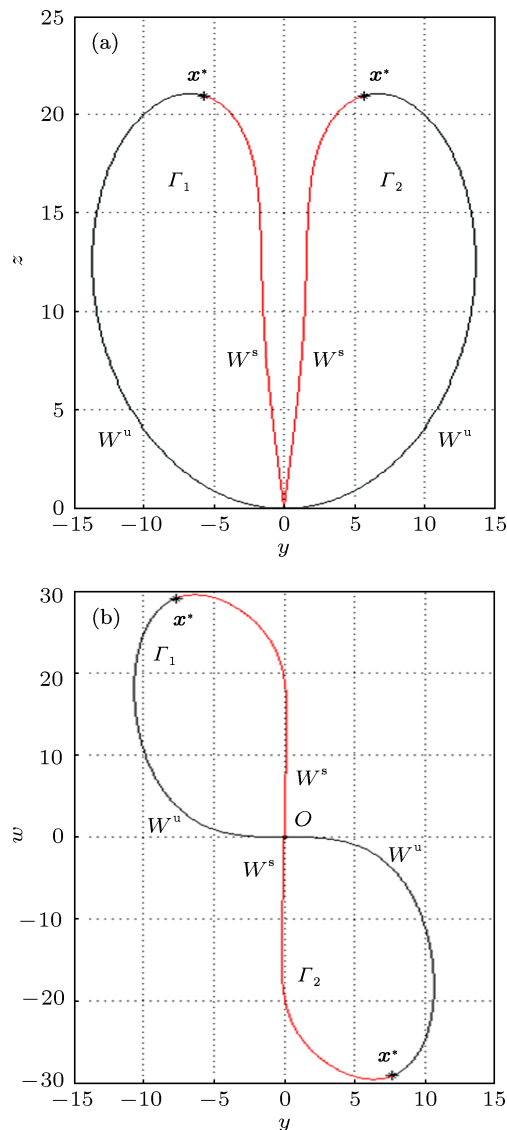


图6 超混沌 Lorenz 系统的同宿轨  $\Gamma_1$  和  $\Gamma_2$  在  $y-z$  平面和  $x-w$  平面的投影

## 5 结论

本文根据同宿轨道的几何特征, 利用逼近轨道与鞍点的距离, 将同宿轨的求解问题转化为一个通用的求函数最小值的无约束非线性优化问题, 从而使算法具备简洁性、普适性和高效性. 为了提高搜索结果的完整性, 本文又提出了基于区间细分的优化算法和实现方法, 并通过 Lorenz 系统、Shimizu-Morioka 系统和超混沌 Lorenz 系统, 验证了其有效性. 同过去的算法相比, 本算法不必像打靶法那样, 每次都要计算平衡点附近的稳定和不稳定特征向量空间, 节约了不少时间. 同时, 在本算法中轨道远近点所需的 Poincaré 截面是系统自动生成, 并且可以利用 MATLAB 的事件功能直接求解;

而打靶法需要人为地选取截面, 不仅求解困难, 而且随着系统参数和初始状态的改变, 该截面可能会失效. 同边值法相比, 本算法的优点是基于微分方程初值问题的求解, 更为简单, 易于同成熟的数值算法相结合, 可达到更快的速度和更高的精度. 此外, 边值法还需通过求解周期非常大的周期轨来获取较好的初始点, 这不仅难度大而且又费时, 然而本文算法的初始点是随机获取的, 没有如此要求. 与 Melnikov 方法相比, 本算法适用范围更广, 甚至可以应用在高维系统上. 另外, 本算法只要求系统满足解的存在和惟一性, 即系统方程连续即可, 而目前大多方法要求系统方程二阶导数连续甚至光滑, 所以本算法是所有同宿轨求解方法中要求最低的.

- [1] Zhang Q F, Tang X H 2012 *Appl. Math. Comput.* **218** 7164
- [2] Li X H, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 020504 (in Chinese) [李向红, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 020504]
- [3] Jia B, Gu H G, Li Y Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 090507
- [4] Feng J J, Zhang Q C, Wang W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 090202
- [5] Huan S M, Li Q D, Yang X S 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1915
- [6] Yang X L, Xu W, Sun Z K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1678 (in Chinese) [杨晓丽, 徐伟, 孙中奎 2006 物理学报 **55** 1678]
- [7] Li W Y, Zhang Q C, Wang W 2010 *Chin. Phys. B* **19** 060510
- [8] Li Q D, Zhou L, Zhou H W 2010 *J. Chongqing Univ. Posts and Telecommun.* (Natural Science Edition) **22** 339 (in Chinese) [李清都, 周丽, 周红伟 2010 重庆邮电大学学报 (自然科学版) **22** 339]
- [9] Guo K M, Li Q D 2008 *J. Chongqing Univ. Posts Telecommun.* (Natural Science Edition) **20** 221 (in Chinese) [郭克敏, 李清都 2008 重庆邮电大学学报 (自然科学版) **20** 221]
- [10] Melnikov V 1963 *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** 1
- [11] Di G H, Xu Y, Xu W, Gu R C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020504 (in Chinese) [狄根虎, 许勇, 徐伟, 顾仁财 2011 物理学报 **60** 020504]
- [12] Tian R L, Yang X W, Cao Q J, Wu Q L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 020503
- [13] Li Q D, Yang X S 2010 *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **20** 467
- [14] Li Q D 2008 *Phys. Lett. A* **372** 2989
- [15] Li Q D, Tang S 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020510 (in Chinese) [李清都, 唐宋 2013 物理学报 **62** 020510]
- [16] El-Dessoky M M, Yassen M T, Aly E S 2012 *Appl. Math. Comput.* **218** 11859
- [17] Li J B, Chen F J 2011 *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **21** 3305
- [18] Li X Y, Wang H J 2011 *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **21** 2695
- [19] Li T C, Chen G T, Chen G R 2006 *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **16** 3035
- [20] Chen P, Xiao L 2010 *E. J. Qualitative Theory Diff. Equ.* **72** 1
- [21] Doedel E, Kernevez J P *AUTO86: Software for Continuation and Bifurcation Problems in Ordinary Differential Equations* <http://indy.cs.concordia.ca/auto/> [1986]
- [22] Lorenz E N 1963 *J. Atmosph. Sci.* **20** 130
- [23] Rodríguez-Luis A J, Freire E, Ponce E 1990 *Continuation and Bifurcations: Numerical Techniques and Applications* (Leuven:Kluwer Academic Publishers) 197
- [24] Freire E, Pizarro L, Rodríguez-Luis A J 1999 *IMA J. Numer. Anal.* **19** 51
- [25] Beyn W J 1990 *IMA J. Numer. Anal.* **10** 379
- [26] Friedman M J, Doedel E J 1993 *J. Dyn. Different. Equations* **5** 37
- [27] Sandstede B 1997 *IMA J. Numer. Anal.* **17** 437
- [28] Bao J H, Yang Q G 2011 *Appl. Math. Comput.* **217** 6526
- [29] De Witte V, Govaerts W, Kuznetsov Y A, Friedman M 2012 *ACM T. Math. Software* **38** 34
- [30] Lenci S, Rega G 2011 *Nonlinear Dyn.* **63** 83
- [31] Tigan G 2010 *Appl. Math. Inf. Sci.* **4** 383
- [32] Li Q D, Yang X S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1416 (in Chinese) [李清都, 杨晓松 2010 物理学报 **59** 1416]
- [33] Li H M, Fan Y Y, Sun H Y, Zhang J, Jia M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 029501 (in Chinese) [李慧敏, 樊养余, 孙恒义, 张菁, 贾蒙 2012 物理学报 **61** 029501]
- [34] Li Q D, Tan Y L, Yang F Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 030206 (in Chinese) [李清都, 谭宇铃, 杨芳艳 2011 物理学报 **60** 030206]
- [35] Li Q D, Zhou H W, Yang X S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 040503 (in Chinese) [李清都, 周红伟, 杨晓松 2012 物理学报 **61** 040503]
- [36] Shimizu T, Morioka N 1980 *Phys. Lett. A* **76** 201
- [37] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese) [王兴元, 王明军 2007 物理学报 **56** 5136]

# Algorithm for detecting homoclinic orbits of time-continuous dynamical system and its application\*

Yang Fang-Yan<sup>1)2)†</sup> Hu Ming<sup>2)</sup> Yao Shang-Ping<sup>1)</sup>

1) (*Key Laboratory of Industrial Internet of Things and Networked Control of Ministry of Education, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

2) (*Institute for Nonlinear Circuits and Systems, Chongqing University Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China*)

( Received 31 August 2012; revised manuscript received 10 January 2013 )

## Abstract

Detecting homoclinic orbits is a key problem in nonlinear dynamical systems, especially in the study of bifurcation and chaos. In this paper, we propose a new method to solve the problem with trajectory optimization. By defining a distance between a saddle point and its near trajectories, the problem becomes a common problem in unconstrained nonlinear optimization to minimize the distance. A subdivision algorithm is also proposed in this paper to improve the integrity of results. By applying the algorithm to the Lorenz system, the Shimizu-Morioka system and the hyperchaotic Lorenz system, we successfully find many homoclinic orbits with the corresponding parameters, which suggests that the method is effective.

**Keywords:** chaos, homoclinic orbits, nonlinear system, numerical computation

**PACS:** 05.10.-a, 05.45.-a, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.100501

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61104150), the Natural Science Foundation Project of Chongqing, China (Grant No. cstcjjA40044) and the Doctoral Fund of Chongqing University of Posts and Telecommunication, China (Grant No. A2009-12).

† Corresponding author. E-mail: yangfy@cqupt.edu.cn