

大尺度浅水波方程中相互调制的非线性波*

毛杰健 杨建荣†

(上饶师范学院物理与电子系, 上饶 334001)

(2013 年 1 月 19 日收到; 2013 年 3 月 14 日收到修改稿)

基于一般的浅水波方程, 根据大尺度正压大气的特点, 得到无量纲的控制大尺度大气的动力学非线性方程组. 利用多尺度法, 由无量纲的动力学方程组导出了扰动位势的非线性控制方程. 采用椭圆方程构造该扰动位势控制方程的解, 获得了扰动位势和速度的多周期波与冲击波(爆炸波)并存的解析解. 扰动位势的解表明经向和纬向具有不同周期和波长的周期波, 且都受纬向孤波的调制; 速度的解表明大尺度大气流动存在气旋和反气旋周期性分布的现象.

关键词: 浅水波方程, 大尺度正压大气, 解析解, 非线性波

PACS: 02.90.+p, 52.35.Mw, 47.35.Lf, 92.70.Cp

DOI: 10.7498/aps.62.130205

1 引言

浅水波方程广泛地应用于大气和海洋等领域^[1-8], 是无黏性不可压缩正压大气的原始方程组, 可描述为

$$U_t + UU_x + VU_y = -\Phi'_x + fV, \quad (1)$$

$$V_t + UV_x + VV_y = -\Phi'_y - fU, \quad (2)$$

$$\Phi'_t + U\Phi'_x + V\Phi'_y + (\bar{\Phi} + \Phi')(U_x + V_y) = 0, \quad (3)$$

式中 t, x 和 y 分别为时间、空间变量, $f = 2\Omega \sin \theta$ 为 Coriolis 参数, θ 为纬度, Ω 为地球自转角速度; U 和 V 分别为 x - y 平面的纬向和经向水平运动速度; $A_m = \frac{\partial}{\partial m} A$, $A = (U, V, \Phi)$, $m = (x, y, t)$; $\bar{\Phi} = gH$ 为平均位势, 是常数, g 为重力加速度, 若以静态为背景, 则 H 为静态流体的深度; $\Phi' = gh$ 为扰动位势, h 为流体自由面的扰动高度, 是 (x, y, t) 的函数. 总的位势为 $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi' = g(H + h)$.

浅水波方程的线性波、扰动和剪切流存在不稳定性^[1], 在半地转风近似下的解具有唯一性^[2]. 众多学者采用浅水波方程的数值解, 模拟仿真大气和海洋领域中的物理现象, 如用它的数值解分析 β 平面近似的波动现象^[3], 用它的极坐标形式的数值

解, 模拟仿真 Rossby 波^[4], 研究正压大气的 Rossby - Haurwitz 波和带状流^[5], 用 Particle-Mesh 方法求地转风平衡下浅水波方程的解^[6], 用它的有限差分模型仿真近赤道的 Kelvin 波^[7], 文献 [8] 对二条平行行进的船产生的水波相互作用现象进行了数值研究等. 我们想寻找浅水波方程的解析解, 研究大气中的波动现象. 但求高阶非线性方程的解析解是一个比较困难的问题, 文献 [9] 介绍了用同伦映射法求浅水波方程的近似解; Lou 等分别用 Darboux 变换、Bäcklund 变换和对称群法成功地得到了 $(2+1)$ 维欧拉方程的解析解^[10,11]; 我们将采用多尺度法和移植法^[12,13], 寻求大尺度正压大气的浅水波方程的解析解, 探索在大尺度情况下周期波和孤波并存的情况.

2 新的非线性发展方程

对于中纬度大尺度的大气运动, 若取水平尺度为 L , 水平速度尺度为 $\bar{U}$, 则时间尺度为 $L/\bar{U}$. 取 β 平面近似, 对方程 (1)–(3) 中的物理量无量纲化如下:

$$(x, y) = L(x_1, y_1), \quad t = \frac{L}{\bar{U}} t_1,$$

$$(U, V) = \bar{U}(u, v), \quad \Phi' = f_0 L \bar{U} \phi,$$

* 江西省自然科学基金(批准号: 2009GZW0026)和国家自然科学基金(批准号: 10905038, 11275123)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: sryangjr@163.com

$$f = f_0 + \beta y = f_0(1 + RoBy_1), \quad (4)$$

式中 Rossby 数 $Ro = \frac{\bar{U}}{f_0 L}$, $B = \frac{\beta L^2}{\bar{U}}$.

将 (4) 式中的变量代入方程 (1)–(3), 并除去 (x_1, y_1, t_1) 中的下标, 得到下列无量纲的非线性方程组

$$Ro(u_t + uu_x + vv_y) - v(1 + RoBy) + \phi_x = 0, \quad (5)$$

$$Ro(v_t + uv_x + vv_y) + u(1 + RoBy) + \phi_y = 0, \quad (6)$$

$$Ro(\phi_t + u\phi_x + v\phi_y) + (\mu^2 + Ro)(u_x + v_y) = 0, \quad (7)$$

式中 $\mu = \frac{\sqrt{gH}}{Lf_0}$.

利用多尺度法, 对自变量作如下的尺度变换

$$X = c_1x - c_2t, \quad Y = By, \quad T = Rot, \quad (8)$$

式中 c_1, c_2 是待定常数. 对于中纬度大尺度的大气运动, 以 $O(Ro)$ 为小量, 对速度和扰动位势作渐近展开:

$$u = u_0 + Rou_1 + O(Ro^2), \quad (9)$$

$$v = v_0 + Rov_1 + O(Ro^2), \quad (10)$$

$$\phi = \phi_0 + Ro\phi_1 + O(Ro^2). \quad (11)$$

式中 u_i, v_i, ϕ_i 是 (X, Y, T) 的函数. 将 (9)–(11) 式代入 (5)–(7) 式, 并收集 $O(Ro)$ 的系数, 得零级近似方程

$$u_0 + B\phi_{0,Y} = 0, \quad (12)$$

$$-v_0 + c_1\phi_{0,X} = 0, \quad (13)$$

$$\mu^2(c_1u_{0,X} + Bv_{0,Y}) = 0. \quad (14)$$

和一级近似方程

$$\begin{aligned} & -c_2v_{0,X} + c_1u_{0,Y} + Bv_{0,Y} \\ & + u_0Y + u_1 + B\phi_{1,Y} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & -c_2u_{0,X} + c_1u_{0,X} + Bv_{0,X} \\ & - v_0Y - v_1 + c_1\phi_{1,X} = 0, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & (\mu^2v_{1,Y} + v_0\phi_{0,Y} + v_{0,Y})B \\ & + (-c_2 + u_0c_1)\phi_{0,X} + c_1(u_{0,X} + \mu^2u_{1,X}) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

由零级近似方程 (12)–(14) 得

$$u_0 = -B\phi_{0,Y}, \quad v_0 = c_1\phi_{0,X}, \quad (18)$$

将 (18) 式代入 (15)–(17) 式得

$$\begin{aligned} & B(c_2 + c_1B\phi_{0,Y})\phi_{0,X,Y} - c_1(Y + B^2\phi_{0,Y,Y})\phi_{0,X} \\ & + \phi_{1,X}c_1 - v_1 = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -c_1(c_1B\phi_{0,Y} + c_2)\phi_{0,X,X} - \phi_{0,Y}BY + B\phi_{1,Y} \\ & + Bc_1^2\phi_{0,X}\phi_{0,X,Y} + u_1 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\mu^2(c_1u_{1,X} + Bv_{1,Y}) - c_2\phi_{0,X} = 0. \quad (21)$$

由 (19) 式和 (20) 式解得

$$\begin{aligned} u_1 &= c_1(\phi_{0,Y}c_1B + c_2)\phi_{0,X,X} \\ & - Bc_1^2\phi_{0,X}\phi_{0,X,Y} - B\phi_{1,Y} + BY\phi_{0,Y}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= B(\phi_{0,Y}c_1B + c_2)\phi_{0,X,Y} \\ & - c_1(Y + B^2\phi_{0,Y,Y})\phi_{0,X} + \phi_{1,X}c_1. \end{aligned} \quad (23)$$

显然, 一级近似速度 u_1 和 v_1 由 ϕ_0 和 ϕ_1 决定. 将 (22) 和 (23) 式代入 (21) 式得到描述大尺度正压大气扰动位势 ϕ_0 新的非线性发展方程

$$\begin{aligned} & (c_2 + \mu^2Bc_1 + \mu^2Bc_1^3\phi_{0,X,X,Y} + \mu^2c_1B^3\phi_{0,Y,Y,Y}) \\ & \times \phi_{0,X} - \mu^2(c_1B\phi_{0,Y} + c_2)(B^2\phi_{0,X,Y,Y} + c_1^2\phi_{0,X,X,X}) \\ & = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

式中不显含时间 T , 而 t 隐含在 X 中. 由上可知, 该控制方程在形式上不同于准地转正压位涡方程^[14], 在近似处理方法上采用的是渐近展开, 而正压位涡方程采用的是地转风近似^[2,6].

3 发展方程的解析解

我们采用解的移植法^[12,13], 求方程 (24) 的解析解. 将满足如下椭圆方程

$$\frac{d}{d\xi}w(\xi) = \sqrt{a_1w(\xi)^2 + a_2w(\xi)^3 + a_3w(\xi)^4} \quad (25)$$

的解移植到方程 (24), 够造 ϕ_0 的解, 上式中 a_1, a_2, a_3 为待求常数, $\xi = \xi(X, Y, T)$, $w(\xi)$ 为待定函数. 设

$$\phi_0 = \frac{p_1 + b_1w(\xi)}{p_2 + w(\xi)}, \quad (26)$$

式中 p_1 和 p_2 为待定常数, $b_1 = b_1(X, Y, T)$ 是待求的函数. 将 (25) 和 (26) 式代入方程 (24), 合并

$$w(\xi)^i \left(\sqrt{a_1w(\xi)^2 + a_2w(\xi)^3 + a_3w(\xi)^4} \right)^j$$

项的系数 ($i = 0, 1, \dots, 5, j = 0, 1$), 令其为零, 可得到新的超定方程组, 解此方程组可知, 当

$$a_1 = \frac{c_2 + \mu^2Bc_1}{4k_1^2\mu^2c_1^2c_2}, \quad (27)$$

$$a_2 = \frac{c_2 + \mu^2Bc_1}{2k_1^2\mu^2c_1^2c_2p_2}, \quad (28)$$

$$a_3 = \frac{c_2 + \mu^2Bc_1}{4p_2^2k_1^2\mu^2c_1^2c_2}, \quad (29)$$

$$q = \sqrt{-c_2 - \mu^2Bc_1}, \quad \xi = k_1X, \quad (30)$$

可解得

$$b_1 = f_2 \cos(F_1) + f_1 \sin(F_1) + \frac{p_1}{p_2} + \frac{4\sqrt{3}Bf_2\mu\sqrt{c_2}\sin(F_2)}{3q}, \quad (31)$$

$$F_1 = \frac{qX}{2\mu c_1 \sqrt{c_2}},$$

$$F_2 = \frac{\sqrt{3}q(Y + f_3)}{2B\mu\sqrt{c_2}}, \quad (32)$$

式中 f_1, f_2 和 f_3 是 T 的任意函数. 将 (27)—(29) 式代入 (25) 式, 可定得 $w(\xi)$ 的解, 这里选取其中的二

种情况详细介绍如下.

情况1 当

$$c_1 = \frac{B\mu \pm \sqrt{B^2\mu^2 + 16c_2^2n^2k_1^2}}{8c_2n^2k_1^2\mu}, \quad (33)$$

有如图 1 和图 2 所示的冲击波解

$$w_{1,2} = -\frac{p_2(\sinh(n\xi) \pm \cosh(n\xi) \mp 1)}{2\sinh(n\xi)}, \quad (34)$$

$$w_{3,4} = \frac{-p_2k_3(k_2 \cosh(n\xi) \pm k_2 \sinh(n\xi) + k_3)}{(2k_2k_3 \cosh(n\xi) + k_3^2 + k_2^2)}, \quad (35)$$

以及如图 3 所示的爆炸波解

$$w_{5,6} = \frac{-p_2((k_4 \pm k_3)(\cosh(n\xi) \pm \sinh(n\xi)) + \sqrt{k_4^2 - k_3^2})}{(k_3 \cosh(n\xi) + k_4 \sinh(n\xi))}. \quad (36)$$

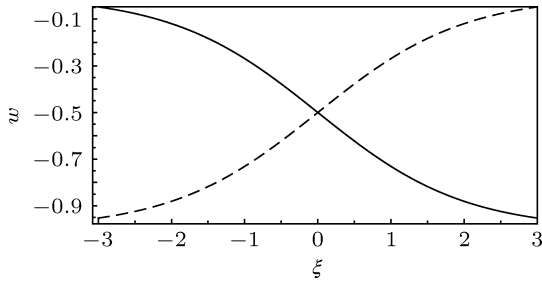


图 1 由 (34) 式决定的冲击波 w_1 (实线) 和 w_2 (虚线). 对应的参量值为: $n=1, p_2=1$

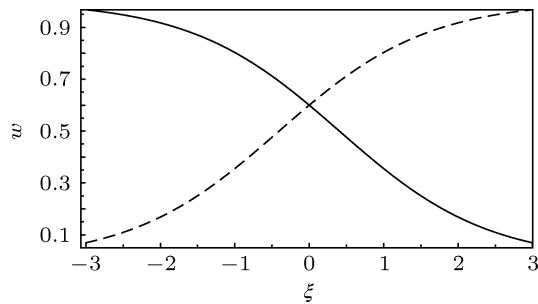


图 2 由 (35) 式决定的冲击波 w_3 (实线) 和 w_4 (虚线). 对应的参量值为: $n=1, k_2=2, k_3=3, p_2=1$

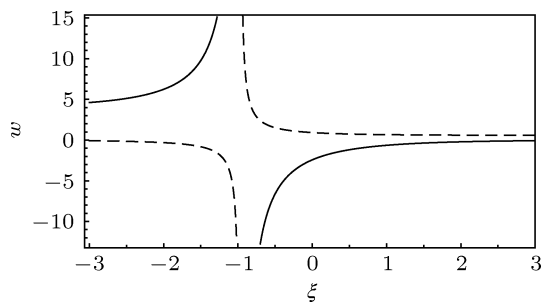


图 3 由 (36) 式决定的爆炸波 w_5 (实线) 和 w_6 (虚线). 对应的参量值为: $n=1, k_3=2, k_4=3, p_2=1$

情况2 当

$$c_1 = \frac{B\mu \pm \sqrt{B^2\mu^2 + 64c_2^2n^2k_1^2}}{32c_2n^2k_1^2\mu}, \quad (37)$$

有如图 3 所示的爆炸波解

$$w_{7,8} = \pm \frac{(1 \pm \tanh(n\xi))p_2}{2\tanh(n\xi)}, \quad (38)$$

和如图 1 所示的冲击波解

$$w_{9,10} = \pm \frac{k_2(1 \mp \tanh(n\xi))p_2}{(2k_2 \mp p_2k_3)\tanh(n\xi) - p_2k_3}. \quad (39)$$

上述所有的解中 k_2, k_3, k_4, p_1, p_2 和 n 都是常数; $c_2 > 0, c_1 < 0$, 且受 $-c_2 - \mu^2 B c_1 > 0$ 的制约. 把 $w(\xi)$ 和 b_1 的解代入 (26) 式, 可定得满足 (24) 式的 ϕ_0 的解析解, 再代回 (18) 式, (22) 式和 (23) 式, 可求得速度的零级近似和一级近似的解析解.

4 分析讨论

由 (32) 和 (31) 式可知 b_1 是由 X 和 Y 方向的周期波叠加组成, 但 X 方向的周期波的波长和周期不同于 Y 方向. 将 (31) 式代入 (26) 式, 得

$$\phi_0 = \frac{wf_2 \cos(F_1)}{p_2 + w} + \frac{wf_1 \sin(F_1)}{p_2 + w} + \frac{4\sqrt{3}Bwf_2\mu\sqrt{c_2}\sin(F_2)}{3q(p_2 + w)} + \frac{p_1}{p_2}, \quad (40)$$

式中 $w = w(\xi)$ 是由 (3)—(39) 式决定的冲击波或爆炸波. 以 (35) 式的 w_3 冲击波解为例, 代入 (40) 式, 并注意到 (8) 式, 可定得大尺度正压大气浅水波方程扰动位势 ϕ_0 的解析解, 解的结果表明扰动位势

ϕ_0 同时存在周期波和冲击波 (爆炸波), 在经向只有周期波, 在纬向同时存在周期波和孤波; 经向周期波的周期和波长与纬向的不同, 彼此的周期波是相互叠加的, 如图 4; 而周期波与冲击波 (爆炸波) 的波幅是相互调制的, 调制波的波幅随时间的演变如图 5, 对于同一地点调制波的波幅是随时间变小的; (40) 式中的 f_1, f_2 和 f_3 都是 T 的任意函数, f_1 和 f_2 对波幅具有调制作用, f_3 决定经向周期波的速度. 作图时考虑了大尺度中纬度的物理背景, 选取典型参数 $L = 10^6$ m, $g = 9.8$ m/s, $H = 10^4$ m, $\theta = 45^\circ$, $\Omega = 7.292 \times 10^{-5}$ rad/s, $f_0 = 10^{-4}$ /s, $\bar{U} = 10$ m/s, 由此可得 $B = 1.6$, $\mu = 3$, $Ro = 0.1$. 考虑到 (30), (33) 式的制约和大尺度运动, 取 $n = 1$, $k_1 = 0.01985$, $c_2 = 0.01$, 可得 $c_1 = -6.9793 \times 10^{-4}$, $q = 7.0843 \times 10^{-3}$.

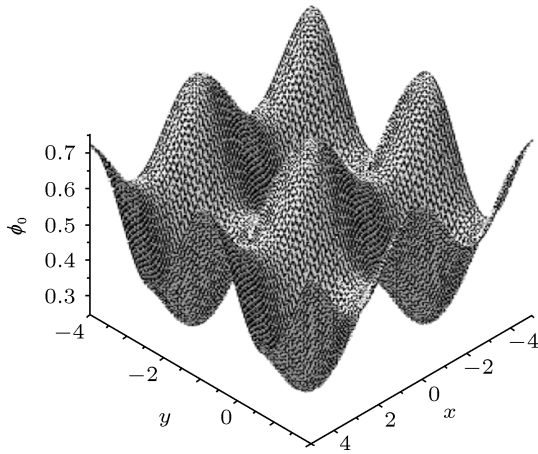


图 4 扰动位势的分布. 对应的参量值为: $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.001$, $f_3 = 0.1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$

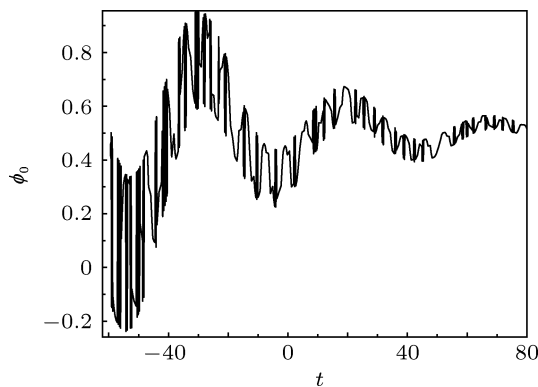


图 5 孤波与周期波幅度的相互调制作用. 对应的参量值为: $x = 1$, $y = 1$, $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.001$, $f_3 = 0.1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$

将 (40) 式的 ϕ_0 代入 (18) 式, 得零级近似的速度

$$u_0 = -2 \frac{w f_2 \cos(F_2) B}{p_2 + w}, \quad (41)$$

$$v_0 = 1/2 \frac{(-f_2 \sin(F_1) + f_1 \cos(F_1)) w q}{(p_2 + w) \sqrt{c_2} \mu} + \frac{k_1 p_2 c_1 (f_2 \cos(F_1) + f_1 \sin(F_1)) w \xi}{(p_2 + w)^2} + 4/3 \frac{k_1 p_2 c_1 f_2 \mu B \sqrt{c_2} \sqrt{3} \sin(F_2) w \xi}{q (p_2 + w)^2}. \quad (42)$$

代入 (22) 式和 (23) 式, 并取 $\phi_1 = 0$, 得一级近似速度的解析解. 再将零级和一级近似的速度代入 (9) 和 (10) 式, 可定得大尺度正压大气浅水波方程速度场的解析解. 解的结果如图 6 所示, 可以看出, 此速度场的解反映了大尺度大气呈现周期性气旋和反气旋的运动现象.

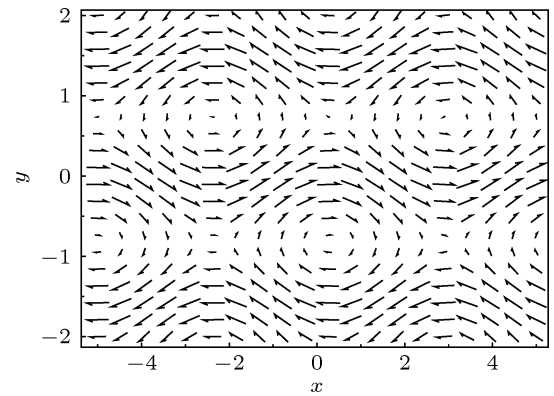


图 6 速度的分布. 对应的参量值为: $f_1 = 0.1$, $f_2 = 0.001$, $f_3 = 0.1$, $k_2 = 1$, $k_3 = 1$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1$

5 结论

从一般的浅水波方程出发, 根据大尺度正压大气的特点, 得到它的无量纲的非线性控制方程组. 利用多尺度法 (8) 式, 推导出了扰动位势的非线性发展方程 (24), 在形式和近似处理方法上, 它不同于地转风近似下的无黏准地转正压位涡方程. 采用椭圆方程 (25) 构造控制方程 (24) 的解, 得到扰动位势和速度的周期波和孤波并存的解析解. 解的结果 (40) 和图 4 表明扰动位势 ϕ_0 在经向和纬向都具有周期波, 但周期和波长不同; 经向周期波的波幅与纬向的孤波相互调制, 在纬向同时具有相互调制的冲击波 (爆炸波) 和周期波, 调制波的波幅随时间的演化如图 5. 由 ϕ_0 的解析解, 分别代入 (18) 式、(22) 式和 (23) 式, 可得到速度场的解析解, 此解和图 6 表明大尺度大气流动存在气旋和反气旋周期性分布的现象. 可见, 我们所得到的非线性发展方程 (24) 式及其解析解对研究大气环流具有一定的理论参考价值.

- [1] Vincent H C 2010 *J. Hydro-enviro. Res.* **3** 173
- [2] Cullen M J P 2008 *Phys. D* **237** 1461
- [3] Agnes H 2008 *Comput. Math. Appl.* **55** 2295
- [4] Callaghan T G, Forbes L K 2006 *J. Comput. Phys.* **217** 845
- [5] Läuter M, Dörthe H, Natalja R 2007 *J. Comput. Phys.* **223** 609
- [6] Frank J, Reich S 2002 *J. Comput. Phys.* **180** 407
- [7] Boyd J P 1998 *Dyna. Atmosph. Oceans* **28** 69
- [8] Wu J, Lee T S, Shu B 2001 *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 2099
- [9] Mo J Q, Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3662 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2007 物理学报 **56** 3662]
- [10] Lou S Y, Jia M, Tang X Y, Huang F 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056318
- [11] Lou S Y, Jia Man, Huang F, Tang X Y 2007 *Internat. J. Theor. Phys.* **46 C** 2007
- [12] Yang J R, Mao J J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3611 (in Chinese) [杨建荣, 毛杰健 2009 物理学报 **58** 3611]
- [13] Mao J J, Yang J R 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5049 (in Chinese) [毛杰健, 杨建荣 2007 物理学报 **56** 5049]
- [14] Tang X Y, Shukla P K 2008 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **49** 229

Nonlinear intermodulation waves of large-scale shallow water equations*

Mao Jie-Jian Yang Jian-Rong[†]

(Department of Physics and Electronics, Shangrao Normal University, Shangrao 334001, China)

(Received 19 January 2013; revised manuscript received 14 March 2013)

Abstract

According to the general shallow water equations, the nondimensional nonlinear dynamic equations are obtained that can describe large-scale barotropic atmosphere. Using multi-scale method, a nonlinear controlling equation for disturbed height (or pressure) field is deduced. Applying elliptic equation to construct the solutions of the controlling equation, the analytic solutions of the disturbed height field and velocity are obtained, which include the multiply periodic waves and shock (explosive) waves. The solutions of the disturbed height field present periodic waves with different periodicity and wavelength along longitude and latitude, which are modulated by the solitary waves of latitude. The velocity solutions display that in the large-scale air flows exist periodic distribution phenomena of cyclone and anticyclone.

Keywords: shallow water equations, large-scale barotropic atmosphere, analytic solution, nonlinear wave

PACS: 02.90.+p, 52.35.Mw, 47.35.Lf, 92.70.Cp

DOI: 10.7498/aps.62.130205

* Project supported by the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 2009GZW0026), and the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10905038, 11275123).

[†] Corresponding author. E-mail: sryangjr@163.com