

一类含非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统的 激变研究*

刘莉[†] 徐伟 岳晓乐 韩群

(西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

(2013年5月31日收到; 2013年7月8日收到修改稿)

以一类含非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统为研究对象, 运用复合胞坐标系方法, 分析了该系统的全局分岔特性. 对于非黏滞阻尼模型而言, 它与物体运动速度的时间历程相关, 能更真实地反映出结构材料的能量耗散现象. 研究发现, 随着阻尼系数、松弛参数及恢复系数的变化, 系统发生两类激变现象: 一种是混沌吸引子与其吸引域内的混沌鞍发生碰撞而产生的内部激变, 另一种是混沌吸引子与吸引域边界上的周期鞍 (混沌鞍) 发生碰撞而产生的常规边界激变 (混沌边界激变), 这两类激变都使得混沌吸引子的形状发生突然改变.

关键词: 非黏滞阻尼, Duffing 碰撞振动系统, 激变, 复合胞坐标系方法

PACS: 05.10.-a, 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Ac

DOI: 10.7498/aps.62.200501

1 引言

在动力系统中, 人们通常用黏滞阻尼来模拟结构动力响应中的能量耗散现象, 这种阻尼由 Rayleigh^[1] 于 1877 年首次提出. 由于这类阻尼的模型简单、分析方便等优点, 使其得到了广泛的应用和研究. 然而, 随着现代复杂材料广泛使用于多个领域, 如汽车轮胎、高楼及桥梁的抗震装置、舰船、飞机、卫星、导弹的仪器仪表、导航设备和电子系统等的振动控制及噪声控制、磁流变阻尼器等, 经典阻尼愈加显示出其局限性. 而非黏滞阻尼与物体运动速度的时间历程相关, 能更好地反映结构材料的能量耗散特性, 已成为诸多领域研究的热点^[2-4].

碰撞振动系统是一类典型的非光滑动力系统, 它普遍存在于日常生活和生产实际中, 如振动落砂机、冲击机械、打印机机头等, 其研究一直受到国内外学者的广泛关注^[5-9]. 从力学角度上来说, 碰撞振动系统一般可以分为刚性碰撞振动系统和弹性碰撞振动系统. 刚性碰撞振动系统又称为约束系

统, 其碰撞过程是瞬间完成的; 对于弹性碰撞振动系统而言, 要充分考虑碰撞过程中的变形时间, 可称之为分段光滑系统. 由于非光滑因素的存在, 碰撞系统可以呈现出错综复杂的动力学现象, 因此系统全局特性的研究显得尤为重要.

在非线性动力系统中, 混沌集的不连续分岔是最常见的一种全局现象, 又称为激变, 通常包括边界激变、内部激变和合并激变三种^[10-12]. 边界激变是混沌吸引子和吸引域边界上的不稳定周期轨道发生碰撞, 导致混沌吸引子的突然消失, 又分为常规边界激变和混沌边界激变. 内部激变是指混沌吸引子与其所在吸引域内的不稳定周期轨道碰撞, 吸引子形状突然发生改变. 合并激变指的是两个或多个吸引子同时与吸引域边界上的不稳定周期轨道发生碰撞. 近年来, 关于非光滑系统的激变研究取得了一些成果^[13,14].

胞映射方法作为一种有效的全局分析方法, 最早由 Hsu^[15] 在 1980 年提出, 随后经过一系列的改进^[16], 先后出现了广义胞映射图方法^[17,18]、胞参照点映射方法^[19]、迭代图胞映射方法^[20-22]、复

* 国家自然科学基金 (批准号: 11172233, 10932009, 11202160, 11302170) 和西北工业大学基础研究基金 (批准号: JC201266) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: liuli_nwpu@163.com

合胞坐标系方法^[23]等. 复合胞坐标系方法的基本思想是将动力系统的状态空间离散化为许多小的几何体(胞), 建立复合胞坐标系, 基于点映射思想研究不同的几何体(胞)所对应的动力学特性, 从而确定动力系统的吸引子、吸引域和鞍等全局信息. 由于该方法基于点映射思想, 因此在处理具有分形结构的吸引域边界时有较大的优势.

本文选取一类含非黏滞阻尼的 Duffing 碰撞振动系统, 利用复合胞坐标系方法研究其全局动力学特性. 首先根据 Leibnitz 微积分理论对系统模型进行变型; 分别选取阻尼系数及松弛参数作为系统参数, 通过观察给定的吸引域截面及吸引子在该截面上的投影, 研究系统的激变过程, 包括内部激变、常规边界激变及混沌边界激变等.

2 含指数型非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统模型

本文所研究的非黏滞阻尼模型与经典阻尼模型的形式相近, 其数学表达式体现为物体运动速度与某一核函数的卷积, 该模型最早由 Biot 提出^[24]:

$$f_d(t) = \int_0^t G(t-\tau)\dot{x}(\tau)d\tau, \quad (1)$$

其中 $x(t)$ 表示物体运动的位移, $G(t-\tau)$ 表示阻尼核函数, 在不同领域中有不同的描述, 如: 延迟函数、后影响函数和松弛函数等^[25]. 与经典阻尼相比, 非黏滞性阻尼更具有普遍性. 不同的核函数可以描述不同机理的阻尼, 本文选用的核函数为指数函数, 其表示式如下^[24]:

$$G(t-\tau) = \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta}, \quad (2)$$

其中, β 表示松弛参数. 当 $\beta \rightarrow 0$ 时, (1) 式中的积分项趋近于 Dirac δ 函数. 此时, 阻尼为黏滞阻尼.

目前, 有关 Duffing 单边碰撞系统的动力学分析已经有诸多研究^[12,13], 但其阻尼通常被认为是黏滞的. 我们用上述指数型非黏滞阻尼代替经典阻尼, 得到了含指数型非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统的表达式:

$$\begin{cases} \ddot{x} + \alpha \int_{t_0}^t \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta} \dot{x}(\tau) d\tau + \kappa x + \mu x^3 \\ = f \cos(wt) & x < \Delta, \\ \dot{x}_+ = -r\dot{x}_- & x = \Delta, \end{cases} \quad (3)$$

式中, 上标“ $\cdot$ ”表示对时间 t 求导, α 为阻尼系数, κ 和 μ 为常量, f 和 w 分别表示系统谐和激励的

强度和频率; r 表示碰撞恢复系数, 通常与碰撞面的材料有关, 满足 $0 < r \leq 1$; $x = \Delta$ 表示位移间隙, 即系统状态的碰撞位置, $\dot{x}_+$ 和 $\dot{x}_-$ 分别表示碰撞前后时刻的瞬时速度. 我们令碰撞时刻为 t^* , 则有 $\dot{x}_{\pm} = \dot{x}(t^* = \pm 0)$.

记方程 (3) 中的积分项为

$$z = \int_{t_0}^t \frac{e^{-(t-\tau)/\beta}}{\beta} \dot{x}(\tau) d\tau, \quad (4)$$

根据 Leibnitz 微积分理论, 可写出如下形式:

$$\dot{z} = \frac{1}{\beta} \dot{x} - \frac{1}{\beta} z, \quad (5)$$

令 $y = \dot{x}$, 则系统 (3) 可转化为如下方程:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\alpha z - \kappa x - \mu x^3 + f \cos(wt) & (x < \Delta), \\ \dot{z} = \frac{1}{\beta} (y - z), \\ y_+ = -ry_- & (x = \Delta), \end{cases} \quad (6)$$

当 $\beta \rightarrow 0$ 时, 该系统为含经典阻尼项的 Duffing 单边碰撞系统. 接下来我们分别研究阻尼系数、松弛参数及恢复系数对系统的影响.

3 阻尼系数 α 对系统的影响

本节讨论阻尼系数 α 对系统稳态响应的影响. 选取阻尼系数 α 为系统参数, 令其他参数取值为: $\kappa = -0.5$, $\mu = 1.0$, $f = 0.4$, $w = 1.4$, $\beta = 0.8$, $r = 0.8$, $\Delta = 1.0$. 当系统参数 α 从 0.6 变化到 0.9 的过程时, 分岔图如图 1 所示.

通过观察分岔图可以发现: 不同初值所对应的分岔图不同, 即系统在整个参数变化过程中存在多吸引子共存现象. 此外, 从图中还能发现混沌吸引子形状的不连续变化, 以及新吸引子出现等, 这些都属于激变现象. 接下来, 我们利用复合胞坐标系方法研究这些激变现象发生的机理.

选取感兴趣的区域为 $\Omega = \{-1.3 \leq x \leq 0.8, -0.5 \leq y \leq 1.0, -0.6 \leq z \leq 0.6\}$, 将该区域均匀地划分为 $700 \times 700 \times 200$ 个胞, 运用步长 $\Delta t = 0.001$ 的四阶 Runge-Kutta 算法求解系统在一个周期内的积分轨线, 在 $z = 0$ 平面上对系统进行全局分析, 此时的吸引子表示在该平面上的投影.

3.1 多吸引子共存及内部激变

当 $\alpha = 0.859$ 时, 系统的全局特性由图 2(a) 给出, A_1 , A_2 分别表示周期为 2 的吸引子, S_1 , S_2 分

别表示吸引域 B_1 , B_2 内部的混沌鞍, $S_{(1,2)}$ 表示吸引域 B_1 和 B_2 边界上的周期鞍. 随着参数 α 的减小, 常规吸引子 A_2 与其内部的混沌鞍 S_2 不断靠近, 但未接触. 当 α 减小到某一临界值时, 系统发生一次内部激变, 在激变的过程中, 常规吸引子 A_2 与其

内部的混沌鞍 S_2 发生碰撞, 合并成一个混沌吸引子, 记为 A_2 , 吸引域 B_2 内部的混沌鞍 S_2 消失. 如图 2(b) 所示, 当 $\alpha = 0.858$ 时, 系统中一个混沌吸引子和一个周期为 2 的吸引子共存.

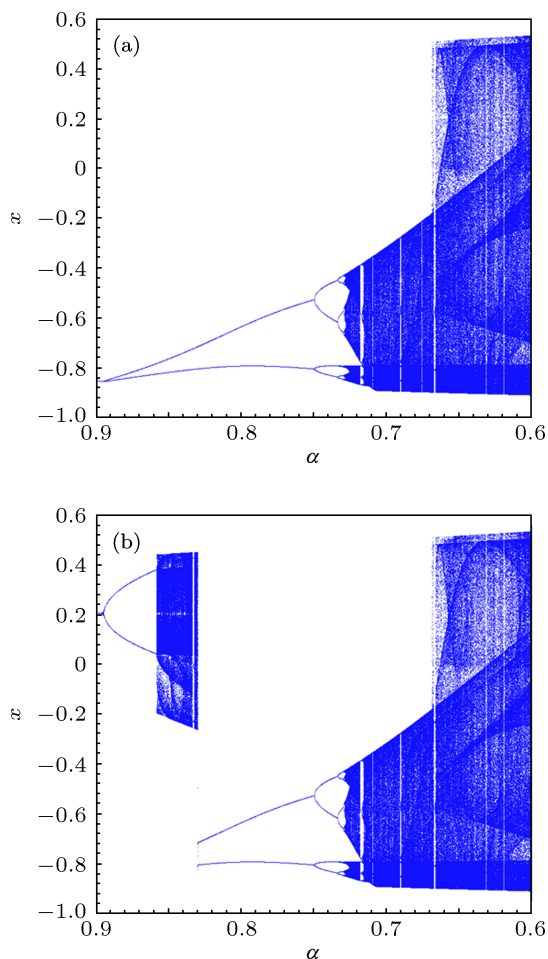


图 1 系统 (6) 取不同初值时的分岔图 (a) 初值 $(x_0, y_0, z_0) = (-0.8, 0.2, 0)$; (b) 初值 $(x_0, y_0, z_0) = (0.35, 1.36, 0)$

3.2 常规边界激变

随着参数 α 的变化, 混沌吸引子 A_2 逐渐向吸引域边界上的周期鞍 $S_{(1,2)}$ 靠近, 如图 3(a) 所示. 在 α 从 0.830 变化到 0.829 的过程中, 混沌吸引子 A_2 与边界上的周期鞍 $S_{(1,2)}$ 发生碰撞, 系统发生常规边界激变. 从图 3(b) 可以看出, 激变的发生导致混沌吸引子 A_2 及其吸引域 B_2 消失, 吸引子 A_1 的吸引域 B_1 变大, 同时, 边界上的周期鞍变成 B_1 内部的混沌鞍, 成为 S_1 的一部分. 随着参数 α 的进一步

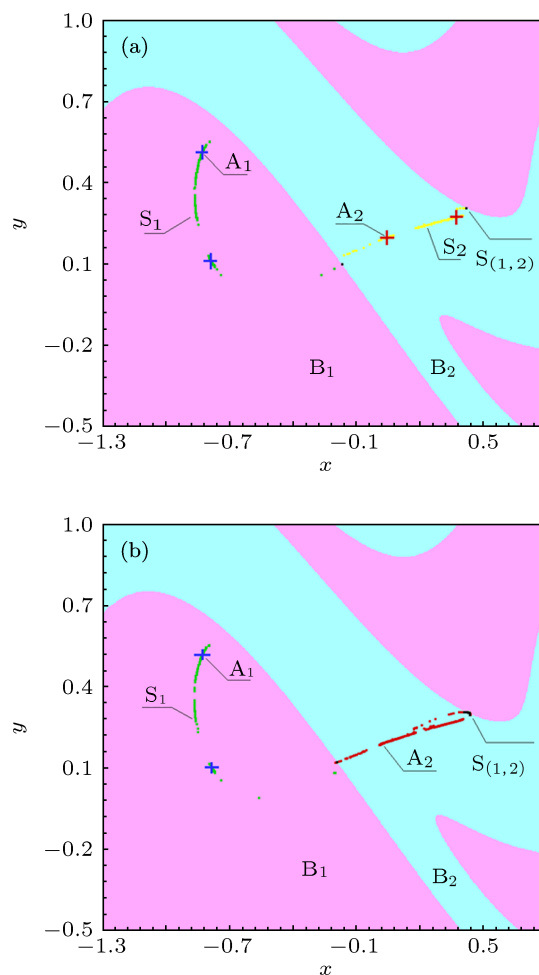
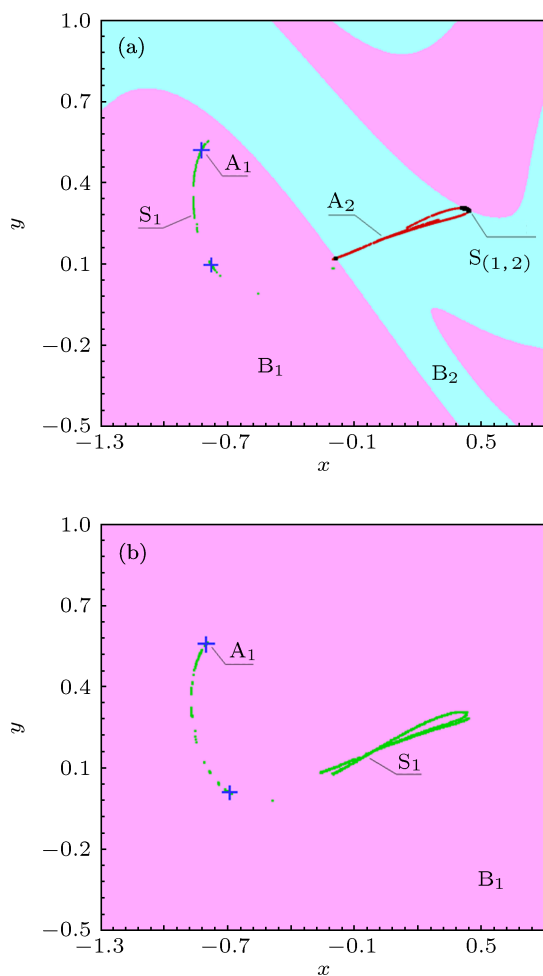
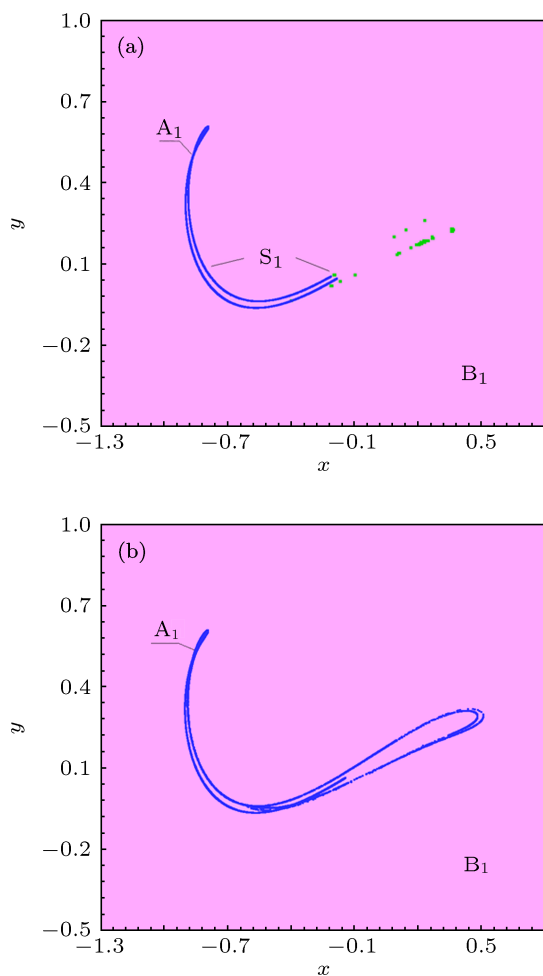


图 2 系统 (6) 的全局图 (a) $\alpha = 0.859$; (b) $\alpha = 0.858$

减小, 吸引子 A_1 发生倍周期分岔, 并最终形成混沌.

3.3 内部激变

当 $\alpha = 0.669$ 时, 混沌吸引子 A_1 及其吸引域 B_1 内部的混沌鞍 S_1 共存, 如图 4(a) 所示. 在 α 从 0.669 变到 0.668 时, 系统发生内部激变, 混沌吸引子 A_1 与其吸引域 B_1 内部的混沌鞍 S_1 发生碰撞, 合并为一个较大的吸引子, 混沌鞍 S_1 完全消失, 系统中仅存在一个大的混沌吸引子 A_1 及其吸引域 B_1 (见图 4(b)).


 图3 系统(6)的全局图 (a) $\alpha = 0.830$; (b) $\alpha = 0.829$

 图4 系统(6)的全局图 (a) $\alpha = 0.669$; (b) $\alpha = 0.668$

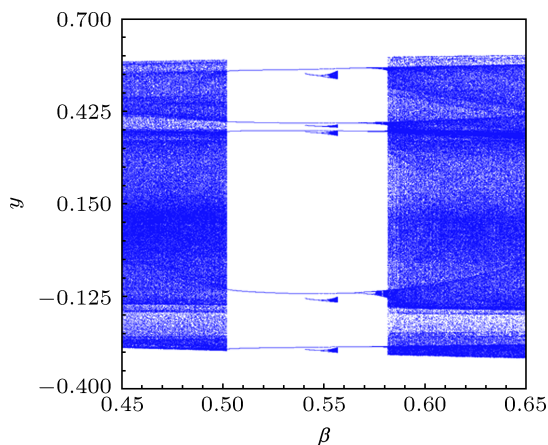
4 松弛参数 β 对系统的影响

下面采取同样的方法研究非黏滞阻尼项中的松弛参数 β 对系统全局特性的影响. 以 β 为分岔参数, 其余参数值取为: $\kappa = -0.5$, $\mu = 1.0$, $f = 0.4$, $w = 1.4$, $\alpha = 0.3$, $r = 0.8$, $\Delta = 1.0$. 对于 $\beta \in [0.450, 0.650]$ 的每个参数值, 在状态空间 $\Gamma = \{(x, y, z) : -2 \leq x \leq 1, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2\}$ 中随机选取服从均匀分布的 500 个初值点做 Poincaré 映射, 去掉 1000 个瞬态周期点后, 保留 300 个稳态周期点得到稳态多值分岔图, 如图 5 所示.

由上述多值分岔图可知: 在 $\beta \in [0.540, 0.558]$, 系统呈现出多吸引子共存的现象; 当 β 在 0.45 至 0.65 的范围内变化时, 系统发生多次激变.

为了进一步分析其激变发生的机理, 下面利用复合胞坐标系方法分析激变前后系统的全局动力学行为. 将感兴趣的区域 $\Omega =$

$\{-1.2 \leq x \leq 1.0, -0.5 \leq y \leq 1.0, -1.0 \leq z \leq 1.0\}$ 均匀划分为 $600 \times 600 \times 200$ 个胞, 运用步长 $\Delta t = 0.001$ 的四阶 Runge-Kutta 算法求解系统在一个周期内的积分轨线, 在 $z = 0$ 平面上分析系统的全局特性, 此时吸引子表示在该平面上的投影.


 图5 系统(6)的稳态多值分岔图: 速度 y 随 β 的变化

4.1 内部激变

当 $\beta = 0.503$ 时, 系统仅存在一个周期 5 的吸引子 A_1 及其吸引域 B_1 内的混沌鞍 S_1 , 如图 6(b) 所示. 随着系统参数 β 的减小, 周期吸引子 A_1 与混沌鞍 S_1 不断靠近. 当参数 β 减小到一临界值时, 系统发生一次内部激变, 周期吸引子 A_1 与其吸引域内部的混沌鞍 S_1 发生碰撞, 合并为一个混沌吸引子, 吸引域内部的混沌鞍瞬间消失. 从图 6(a) 可知, 当 $\beta = 0.502$ 时, 系统仅存在一个混沌吸引子 A_1 .

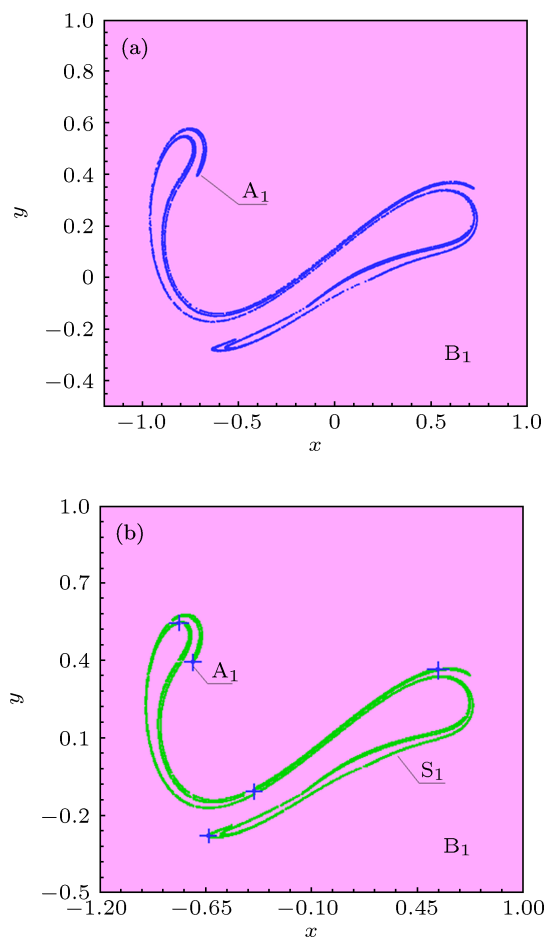


图 6 系统 (6) 的全局图 (a) $\beta = 0.502$; (b) $\beta = 0.503$

4.2 混沌边界激变

当 $\beta = 0.541$ 时, 系统的全局特性由图 7(b) 给出, A_1 , A_2 分别表示周期为 5 的吸引子, $S_{(1,2)}$ 为吸引域 B_1 和 B_2 边界上的混沌鞍, 此时的吸引域边界具有分形结构 (见图 7(b)). 当 β 从 0.541 变小到 0.540 的过程中, 系统发生了一次混沌边界激变. 激变的过程中, 周期吸引子 A_2 与混沌鞍 $S_{(1,2)}$ 发生碰撞, 并一同变为 A_1 吸引域 B_1 内部的混沌鞍 S_1 , A_2

的吸引域 B_2 随之消失, 如图 7(b) 所示.

当 β 从 0.541 增大到 0.556 的过程中, 周期吸引子 A_2 由倍周期分岔形成混沌, 其吸引域 B_2 也随之变大, 如图 8(a) 所示. 在 $\beta \in [0.556, 0.557]$ 的某一临界值时, 混沌边界激变发生, 混沌吸引子 A_2 与吸引域边界上的混沌鞍 $S_{(1,2)}$ 发生碰撞, 一同合并为 A_1 吸引域 B_1 内的混沌鞍 S_1 , A_2 的吸引域 B_2 随之消失 (见图 8(b)).

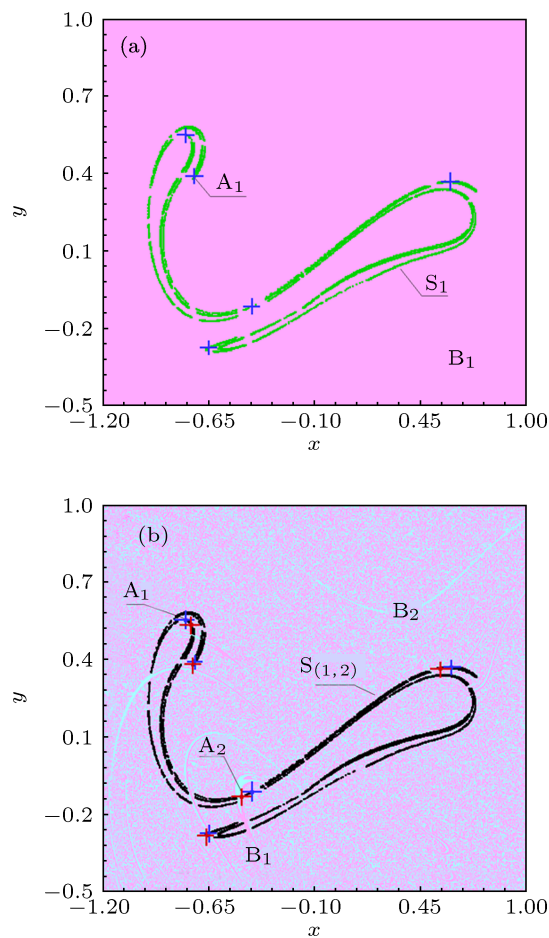
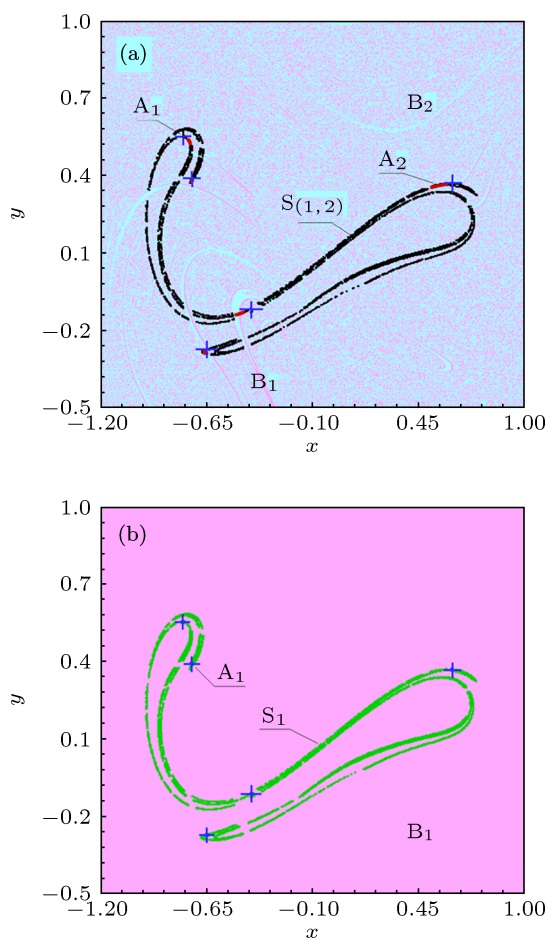
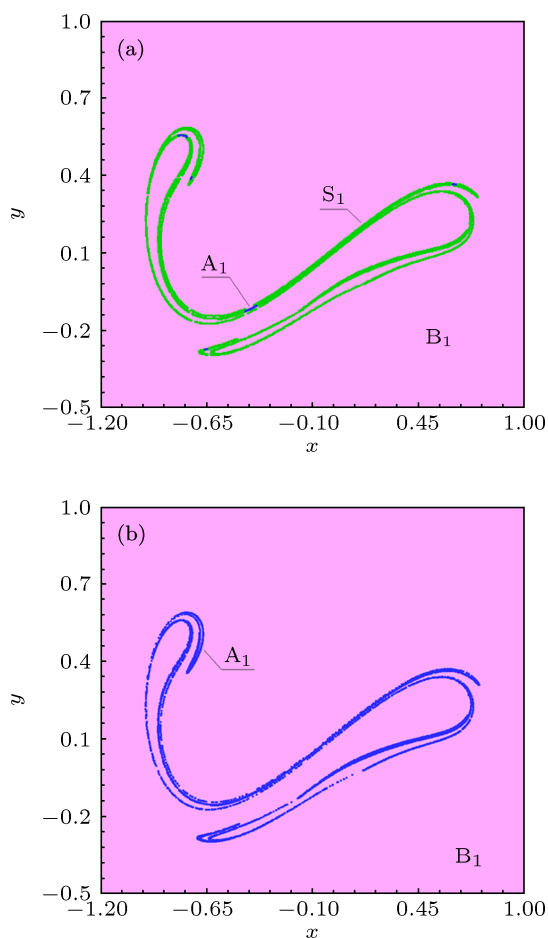


图 7 系统 (6) 的全局图 (a) $\beta = 0.540$; (b) $\beta = 0.541$

4.3 内部激变

随着松弛参数 β 的变大, 周期吸引子 A_1 由倍周期分岔变为混沌吸引子, 如图 9(a) 所示. 当松弛参数 β 进一步变大时, 混沌吸引子 A_1 与其内部的混沌鞍 S_1 逐渐接近, 在 $\beta \in [0.582, 0.583]$ 的某一临界值发生碰撞, 合并为一个较大的混沌吸引子 A_1 , 其内部的混沌鞍 S_1 随之消失. 从图 9(b) 可以看出, 内部激变发生后, 系统仅存在一个较大的混沌吸引子 A_1 .

图8 系统(6)的全局图 (a) $\beta = 0.556$; (b) $\beta = 0.557$ 图9 系统(6)的全局图 (a) $\beta = 0.582$; (b) $\beta = 0.583$

5 恢复系数 r 对系统的影响

下面讨论恢复系数 r 对全局动力学行为的影响. 选取阻尼系数 r 为系统参数, 令其他参数取值为: $\alpha = 0.3$, $\beta = 0.21$, $\kappa = -0.5$, $\mu = 1.0$, $f = 0.4$, $w = 1.4$, $\Delta = 1.0$. 当系统参数 r 从 0.55 变化到 0.7 的过程时, 分岔图如图 10 所示.

由图 10 可以看出: 在 $r \in [0.60, 0.61]$, 混沌吸引子发生不连续的改变, 即有激变现象发生.

接下来, 利用复合胞坐标系方法研究激变现象发生的机理. 将该感兴趣的区域 $\Omega = \{-1.5 \leq x \leq 1.0, -1.0 \leq y \leq 1.2, -1.0 \leq z \leq 1.2\}$ 均匀地划分为 $700 \times 700 \times 200$ 个胞, 运用步长 $\Delta t = 0.001$ 的四阶 Runge-Kutta 算法求解系统在一个周期内的积分轨线, 在 $z = 0$ 平面上对系统进行全局分析, 此时的吸引子表示在该平面上的投影.

由图 11(a) 可知, 当 $r = 0.604$ 时, 系统有一个混沌吸引子 A_1 与一个周期为 3 的吸引子 A_2 共存, B_1, B_2 分别表示的 A_1, A_2 的吸引域, $S_{(1,2)}$ 表示吸

引域边界上的鞍. 当 r 增大到 $[0.604, 0.605]$ 的某一临界值时, 系统发生边界激变, 吸引子 A_2 与边界上的混沌鞍 $S_{(1,2)}$ 发生碰撞, 合并成吸引域 B_1 内部的混沌鞍 S_1 , 吸引域 B_2 随之消失. 当 $r = 0.605$ 时, 系统仅存在混沌吸引子 A_1 及其吸引域内部的混沌鞍 S_1 , 见图 11(b) 所示.

通过对系统全局分岔特性的研究, 发现不稳定周期轨道(鞍)的存在可以引发激变的产生, 激变前后吸引子的形状和大小会发生不连续的变化.

6 结论

考虑到非黏滞阻尼能更真实地反映出结构材料的能量耗散现象, 本文选取一类含指数型非黏滞阻尼的 Duffing 单边碰撞系统, 采用复合胞坐标系方法对其进行全局分岔特性的研究, 探讨了阻尼系数 α 、松弛参数 β 及恢复系数 r 的变化对该系统的影响, 阐述了由不稳定周期轨道引发的激变过程.

研究表明, 系统在参数的某一范围内, 存在多

吸引子共存现象; 随着系统参数的不断变化, 系统稳态吸引子呈现出丰富的分岔和激变现象, 包括周期吸引子或混沌吸引子与其吸引域内的混沌鞍发生的内部激变; 混沌吸引子与其吸引域边界上的周期鞍发生的常规边界激变; 周期吸引子或混沌吸引子与边界上的混沌鞍发生的混沌边界激变. 激变的

产生, 使吸引子的形状和大小突然发生不连续的变化. 由本文的研究可以看出, 非黏滞阻尼与碰撞的恢复系数对系统稳态响应具有一定的影响, 其数值结果对探讨含非黏滞阻尼的碰撞系统的理论分析提供了帮助.

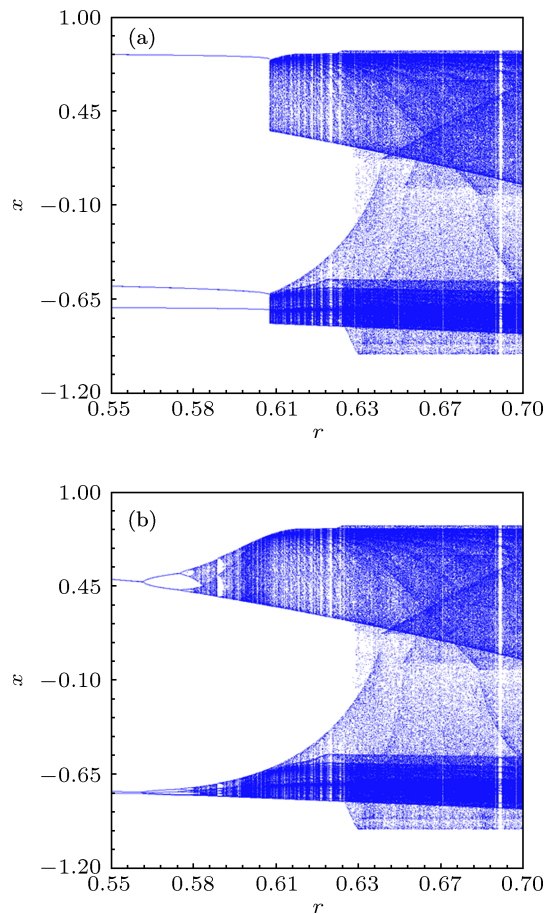


图 10 系统 (6) 取不同初值时的分岔图 (a) 初值 $(x_0, y_0, z_0) = (-0.55, -0.2, 0)$; (b) 初值 $(x_0, y_0, z_0) = (-0.7, -0.2, 0)$

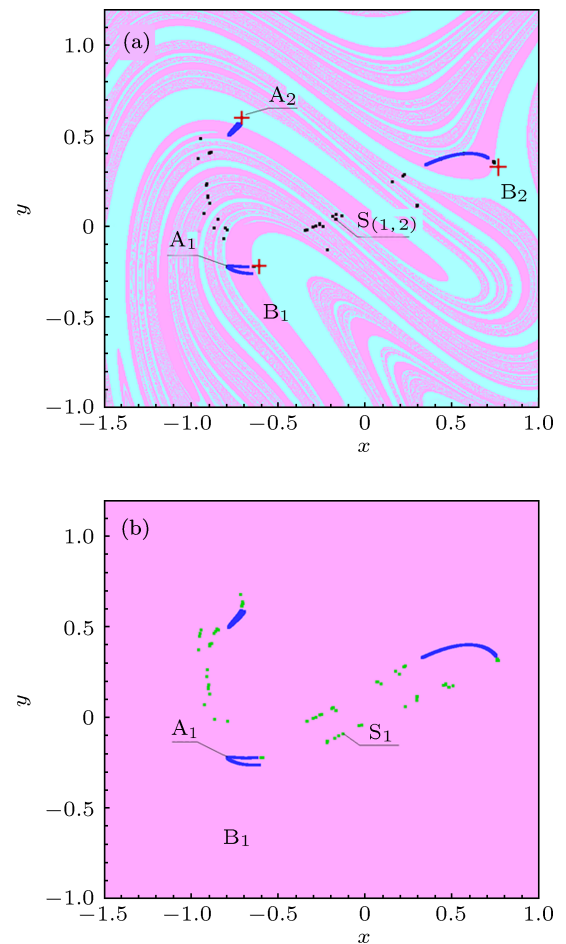


图 11 系统 (6) 的全局图 (a) $r = 0.604$; (b) $r = 0.605$

- [1] Rayleigh J W S 1877 *Theory of Sound* (Vol.2) (New York: Dover Publications) pp135–216
- [2] Ruzziconi L, Litak G, Lenci S 2011 *J. Vibroeng.* **13** 2238
- [3] Rossikhin Y A, Shitikova M V 2010 *Appl. Mech. Rev.* **63** 010801
- [4] Sieber J, Wagg D J, Adhikari S 2008 *J. Sound Vib.* **314** 1
- [5] Jin D P, Hu H Y 1999 *Adv. Mech.* **29** 155 (in Chinese) [金栋平, 胡海岩 1999 力学进展 **29** 155]
- [6] Ding W C, Xie J H 2005 *Adv. Mech.* **35** 513 (in Chinese) [丁旺才, 谢建华 2005 力学进展 **35** 513]
- [7] Lei H, Gan C B, Xie C Y 2010 *Eng. Mech.* **27** 105 (in Chinese) [雷华, 甘春标, 谢潮涌 2010 工程力学 **27** 105]
- [8] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6888 (in Chinese) [戎海武, 王向东, 徐伟, 方同 2008 物理学报 **57** 6888]
- [9] Su M B, Rong H W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 060501
- [10] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1983 *Physica D* **7** 181
- [11] Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1986 *Phys. Rev. Lett.* **57** 1284
- [12] Szemplińska-Stupnicka W, Zubrzycki A, Tyrkiel E 1999 *Nonlinear Dynam.* **19** 1936
- [13] Feng J X, Xu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080502 (in Chinese) [冯进铃, 徐伟 2011 物理学报 **60** 080502]
- [14] Yue X L, Xu W, Wang L 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **18** 3567

- [15] Hsu C S 1980 *J. Appl. Mech.* **147** 931
- [16] Xu W, Sun C Y, Sun J Q 2013 *Adv. Mech.* **43** 91 (in Chinese) [徐伟, 孙春艳, 孙建桥 2013 力学进展 **43** 91]
- [17] Hong L, Xu J X 1999 *Phys. Lett. A* **262** 361
- [18] Xu W, He Q, Rong H W, Fang T 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1365 (in Chinese) [徐伟, 贺群, 戎海武, 方同 2003 物理学报 **52** 1365]
- [19] Jiang J, Xu J X 1994 *Phys. Lett. A* **188** 137
- [20] He Q, Xu W, Li S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 743 (in Chinese) [贺群, 徐伟, 李爽 2008 物理学报 **57** 743]
- [21] He Q, Xu W, Li S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4021 (in Chinese) [贺群, 徐伟, 李爽 2008 物理学报 **57** 4021]
- [22] Li S, He Q 2011 *Chin. J. Theor. Appl. Mech.* **43** 579 (in Chinese) [李爽, 贺群 2011 力学学报 **43** 579]
- [23] Yue X L, Xu W, Zhang Y 2012 *Nonlinear Dynam.* **69** 437
- [24] Biot M A 1955 *Phys. Rev.* **97** 14
- [25] Wagner N, Adhikari S 2003 *AIAA J.* **41** 951

Global analysis of crises in a Duffing vibro-impact oscillator with non-viscously damping*

Liu Li[†] Xu Wei Yue Xiao-Le Han Qun

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China)

(Received 31 May 2013; revised manuscript received 8 July 2013)

Abstract

In this paper studied is the crises in the Duffing vibro-impact oscillator with non-viscously damping by the composite cell coordinate system method. It is assumed that the non-viscously damping depends on the past history of the velocities other than the instantaneous generalized velocities. The energy dissipation behaviors of real structural materials can be preferably represented in the non-viscously damping models. Numerical simulations show that as the damping coefficient or the relaxation parameter or the recovery coefficient is varied, there appear two kinds of crises: one is the interior crisis, which results from the collision between a chaotic attractor and a chaotic saddle on the basin boundary, and the other is the regular/chaotic boundary crisis, which is due to the collision of a chaotic attractor with a periodic/chaotic saddle on its basin boundary. All the crises result in a sudden change in size and shape of the attractor.

Keywords: non-viscously damping, Duffing vibro-impact oscillator, crisis, the composite cell coordinate system method

PACS: 05.10.-a, 05.45.-a, 05.45.Pq, 05.45.Ac

DOI: 10.7498/aps.62.200501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11172233, 10932009, 11202160, 11302170) and the Northwestern Polytechnical University Foundation for Fundamental Research, China (Grant No. JC201266).

[†] Corresponding author. E-mail: liuli_nwpu@163.com