

## 耦合分数阶双稳态振子的同步、反同步与振幅死亡\*

王立明<sup>1)†</sup> 吴峰<sup>2)</sup>

1) (廊坊师范学院物理系, 廊坊 065000)

2) (天津理工大学理学院, 天津 300191)

(2013年6月12日收到; 2013年7月19日收到修改稿)

研究了耦合分数阶振子的同步、反同步和振幅死亡等问题. 基于 P-R 振子在特定参数下的双稳态特性, 利用最大条件 Lyapunov 指数、最大 Lyapunov 指数和分岔图等数值方法分析发现, 通过选取初始条件和耦合强度, 可以控制耦合振子呈现混沌同步、混沌反同步、全部振幅死亡同步、全部振幅死亡反同步和部分振幅死亡等丰富的动力学现象. 基于蒙特卡罗方法的原理, 在初始条件相空间中随机选取耦合振子的初始位置, 计算不同耦合强度下耦合振子的全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的比例, 从统计学角度表征了耦合分数阶双稳态振子的动力学特征. 几种有代表性的双稳态振子的吸引域进一步证明了统计方法的计算结果.

关键词: 振幅死亡, 吸引域, 双稳态

PACS: 05.45.a, 05.45.Xt, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.210504

## 1 引言

近年来, 耦合混沌振子间由于相互作用造成的同步、反同步以及振幅死亡的研究在数值和理论上都取得了很大的进展. 人们认为频率失配或者存在延时耦合是产生振幅死亡现象的两个必要条件. Matthews 等<sup>[1]</sup>研究了由有频率差别的极限环振子组成的全局耦合系统的集体行为, 发现随着耦合强度的增加, 系统会出现锁相态、不相干态、周期态、准周期态、混沌和振幅死亡等丰富的动力学行为, 同时他们在相空间中给出了不同的态之间的边界. Reddy 等<sup>[2]</sup>研究了延时耦合的两个振子系统, 指出即使振子的频率没有差别, 在延时耦合的情况下依然可以出现振幅死亡. 随后, Konishi 等<sup>[3,4]</sup>研究了两个完全相同的极限环系统耦合时的动力学性质, 发现了振幅死亡, 并从理论上推导出振幅死亡出现的必要条件. Prasad 等<sup>[5]</sup>描述了耦合混沌系统的一般形式, 并采用 Lorenz 系统和 Rossle 系统构造了三个有代表性的耦合系统, 发现这三个系统均能产生振幅死亡, 并从理论上证明了

振幅死亡的存在, 同时完成了相关的模拟电路的试验. 在上面的工作中, 不论是参数失配导致的振幅死亡还是延时耦合造成的振幅死亡, 振子的平衡态都是不稳定的, 并且都是极限环振子, 振幅死亡是由振子的不稳定平衡点变为稳定的平衡点引起的. 鉴于此, 最近 Zhu 等<sup>[6]</sup>讨论了拥有平衡点和振荡态双稳态的 Lorenz 耦合系统的动力学行为. 结果发现, 在耦合作用下, 平衡点的吸引域扩大, 混沌吸引子的吸引域缩小直至消失, 是拥有平衡点和振荡态双稳态的 Lorenz 耦合系统出现振幅死亡的原因.

分数阶微积分扩展了整数阶微积分的描述能力, 是整数阶微积分理论的推广. 人们已经在分数阶微分方程描述的非线性系统中发现了混沌现象. 尤其是大量的分数阶混沌系统 (如分数阶 Chua 系统<sup>[7]</sup>、分数阶 Lorenz 系统<sup>[8]</sup>、分数阶 Chen 系统<sup>[9]</sup>、分数阶 Lü 系统<sup>[10]</sup>和分数阶 Liu 系统<sup>[11]</sup>等) 陆续被发现之后, 分数阶混沌系统的相关研究逐渐成为非线性领域中的一个新的热点.

本文在文献 [6] 的启发下, 将拥有平衡点和振荡态的整数阶双稳态系统推广到分数阶双稳态系统, 构造了耦合分数阶双稳态 P-R 振子系统. 首先

\* 廊坊师范学院基金 (批准号: LSZY201204) 和国家自然科学基金青年基金 (批准号: 11204214) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wlm.shooker@163.com

利用最大条件 Lyapunov 指数、最大 Lyapunov 指数和分岔图等数值分析方法, 讨论了在正负两种不同反馈作用下, 初始条件对耦合系统的动力学行为的影响. 然后基于蒙特卡罗方法的原理, 在初始条件相空间中随机选取耦合振子的初始位置, 计算不同耦合强度下耦合振子的各种状态的比例, 从统计学角度表征耦合分数阶双稳态振子的动力学特征. 最后通过绘制双稳态振子的吸引域进一步证明了统计方法的计算结果.

## 2 耦合分数阶振子的同步和反同步的稳定性分析

考虑两个相互耦合的同结构的分数阶振子构成的系统

$$\begin{aligned} \frac{d^q X_1}{dt^q} &= f(X_1) + \varepsilon \Gamma (X_2 - 1), \\ \frac{d^q X_2}{dt^q} &= f(X_2) + \varepsilon \Gamma (X_1 - X_2), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\varepsilon$  为表示耦合强度矩阵,  $\Gamma$  为表示耦合方式的矩阵. 当同步流型存在时, 设同步流型为  $M = \{(X_1, X_2) : X_1 = X_2 = X^*\}$ , 则同步流型满足方程

$$\frac{d^q X^*}{dt^q} = f(X^*). \quad (2)$$

当反同步流型存在时, 设反同步流型为  $N = \{(X_1, X_2) : X_1 = -X_2 = S^*\}$ , 将  $X_1 = S^*$  代入 (1) 式的第一个方程得

$$\frac{d^q S^*}{dt^q} = f(S^*) - 2\varepsilon \Gamma S^*. \quad (3)$$

将  $X_2 = -S^*$  代入 (1) 式的第二个方程得

$$-\frac{d^q S^*}{dt^q} = f(-S^*) + 2\varepsilon \Gamma S^*. \quad (4)$$

考虑方程 (3) 和 (4) 的一致性, 应有

$$f(-S^*) = -f(S^*), \quad (5)$$

即反同步流型的存在要求  $f(\cdot)$  为奇函数.

### 2.1 耦合分数阶振子同步的稳定性分析

令  $X_i = X^* + \eta_i (i = 1, 2)$ , 将 (1) 式在  $X^*$  处线性化得

$$\begin{pmatrix} \frac{d^q \eta_1}{dt^q} \\ \frac{d^q \eta_2}{dt^q} \end{pmatrix} = [Df(S)I + \varepsilon \Gamma A] \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\text{其中 } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(6) 式可改写为

$$\frac{d^q \eta_i}{dt^q} = Df(S)\eta_i + \varepsilon \Gamma A \eta_i, \quad (i = 1, 2). \quad (7)$$

以矩阵  $A$  的本征矢  $\phi_k (k = 1, 2)$  为基展开  $\eta_i$ , 得

$$\eta_i = \sum_{k=1}^2 u_k \phi_k, \quad k = 1, 2. \quad (8)$$

利用  $\phi_k (k = 1, 2)$  将矩阵  $A$  对角化得

$$A \phi_k = \lambda_k \phi_k, \quad k = 0, 1, \quad (9)$$

其中  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ . 因此方程 (7) 可改写为

$$\frac{d^q u_k}{dt^q} = [Df(X^*)I + \varepsilon \Gamma \lambda_k] u_k, \quad (k = 1, 2), \quad (10)$$

式中  $u_k$  的演化只决定于  $Df(X^*)$  和本征值  $\lambda_k$ , 与其它模式无关.

由 (2) 和 (10) 式可知, 同步流型是特征值  $\lambda = 0$  对应的特征向量所张开的子空间, 而  $\lambda = -2$  对应的模式为同步流型的横截方向的模式. 横截模式的 Lyapunov 指数 (也称条件 Lyapunov 指数) 可以表示为:  $\Lambda_{\perp}^{(-2)} = \Lambda_{\perp 1}^{(-2)} \geq \Lambda_{\perp 2}^{(-2)} \geq \dots \geq \Lambda_{\perp n}^{(-2)}$ . 因此, 同步流型稳定的条件是当且仅当  $\Lambda_{\perp}^{(-2)} < 0$ , 而同步态是周期态还是混沌态, 则由耦合系统的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  确定. 因此, 我们可以计算  $\lambda = -2$  对应的模式的最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  并通过  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  的正负确定同步的稳定区间, 同时可以计算  $\Lambda_{\max}$  并通过  $\Lambda_{\max}$  的正负确定是周期态同步还是混沌态同步.

### 2.2 耦合分数阶振子反同步的稳定性分析

令  $X_1 = S^* + \xi_1$  和  $X_2 = -S^* + \xi_2$ , 在  $S^*$  处线性化 (1) 式的第一个方程, 在  $-S^*$  处线性化 (1) 式的第二个方程, 应用与 2.1 节类似的方法可得

$$\frac{d^q u_k}{dt^q} = [Df(S^*)I + \varepsilon \Gamma \lambda_k] u_k, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

其中  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -2$ . (11) 式中  $u_k$  的演化只决定于  $Df(S^*)$  和本征值  $\lambda_k$ , 与其它模式无关.

由 (3), (4) 和 (11) 式可知, 反同步流型是特征值  $\lambda = -2$  对应的特征向量所张开的子空间, 而  $\lambda = 0$  对应的模式为反同步流型的横截方向的模式. 这些模式的 Lyapunov 指数 (也称条件 Lyapunov 指数) 可以表示为  $\Lambda_{\perp}^{(0)} = \Lambda_{\perp 1}^{(0)} \geq \Lambda_{\perp 2}^{(0)} \geq \dots \geq \Lambda_{\perp n}^{(0)}$ . 因此, 反同步流型稳定的条件是当且仅当  $\Lambda_{\perp}^{(0)} < 0$ , 而反

同步态是周期态还是混沌态, 则是由耦合系统的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  来确定. 因此, 我们可以计算  $\lambda = 0$  对应的模式的最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$ , 通过  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  的正负确定反同步的稳定区间, 同时可以计算耦合系统的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$ , 并由  $\Lambda_{\max}$  的正负确定是周期态反同步还是混沌态反同步.

### 3 耦合分数阶双稳态振子的同步、反同步和振幅死亡

#### 3.1 分数阶 P-R 振子的双稳态性质的分析

分数阶导数的概念有多种定义, 这里采用 Caputo 微分 [12], 定义如下:

$$D^{\alpha}x(t) = J^{m-\alpha}x^{(m)}(t), \quad \alpha > 0,$$

其中,  $m = [\alpha]$ , 为第一个不小于  $\alpha$  的整数,  $x^{(m)}(t)$  是  $x(t)$  的  $m$  阶导数,  $J^{\beta}$  是  $\beta$  阶 Riemann-Liouville 积分算子, 即

$$J^{\beta}y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-x)^{\beta-1}y(x)dx, \quad \beta > 0,$$

其中,  $\Gamma(\cdot)$  是 Gamma 函数.

单个分数阶 P-R 振子方程为

$$\begin{aligned} \frac{d^{q_1}x}{dt^{q_1}} &= y - \beta z, \\ \frac{d^{q_2}y}{dt^{q_2}} &= -x + 2\gamma y - \alpha z, \\ \frac{d^{q_3}z}{dt^{q_3}} &= (x - z^3 + z)/\mu. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式的三个平衡点: 原点  $o(0,0,0)$  和一对焦点  $P_{\pm}(\pm(2\gamma\beta - \alpha)A^*, \pm\beta A^*, \pm A^*)$ , 其中  $A^* = \sqrt{1 + 2\gamma\beta - \alpha}$ . 下面我们固定  $\alpha = 0.165$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ , 分析  $\gamma$  的取值对平衡点的稳定性的影响.

(12) 式的 Jacobi 矩阵为

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\beta \\ -1 & 2\gamma & \alpha \\ 1/\mu & 0 & (1 - 3z^2)/\mu \end{pmatrix}. \quad (13)$$

将原点  $o(0,0,0)$  代入 (13) 式, 令  $\gamma \in [0, 0.35]$ , 计算矩阵  $H$  的本征值  $\lambda_i$  并求出  $\lambda_i$  对应的幅角  $\phi_i$ , 由文献 [13, 14] 可知当  $\phi_{\min} > \frac{\pi q_{\max}}{2}$  时, 原点  $o(0, 0, 0)$  是稳定的, 这里  $\phi_i = \arg(\lambda_i) (i = 1, 2, 3)$ ,  $\phi_{\min} = \min(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ,  $q_{\max} = \max(q_1, q_2, q_3)$ . 结果表明: 不等式  $\phi_{\min} > \frac{\pi q_{\max}}{2}$  不成立, 即原点  $o(0,0,0)$  在区间  $\gamma \in [0, 0.35]$  是不稳定的.

考虑一对焦点  $P_{\pm}(\pm(2\gamma\beta - \alpha)A^*, \pm\beta A^*, \pm A^*)$  的稳定性, 由于 P-R 振子方程关于原点对称, 它们有着共同的稳定性. 故只分析其中之一即可, 下面只分析  $P_+$ . 将  $P_+((2\gamma\beta - \alpha)A^*, \beta A^*, A^*)$  代入 (13) 式, 得

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\beta \\ -1 & 2\gamma & \alpha \\ 1/\mu & 0 & [1 - 3(1 + 2\gamma\beta - \alpha)]/\mu \end{pmatrix}.$$

固定  $\alpha, q_1, q_2$  和  $q_3$ , 改变  $\gamma$  的值计算矩阵  $H$  的本征值  $\lambda_i$  并求出  $\lambda_i$  对应的幅角  $\phi_i$ . 图 1(a) 给出了  $\alpha = 0.165, \beta = 1, \mu = 0.4, q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$  时, 幅角  $\phi_{\min}$  与参数  $\gamma$  的关系曲线. 由图 1(a) 可知, 当  $\gamma \in [0, 0.3]$  时,  $\phi_{\min} > \frac{\pi q_{\max}}{2}$  成立, 焦点  $P_+$  是稳定的.

在与图 1(a) 相同的参数条件下, 初始条件取为  $(x(0), y(0), z(0)) = (0.6, 1.35, -1)$ , 我们利用文献 [15] 中计算 Lyapunov 指数的方法计算了  $\gamma$  取不同值时方程 (12) 的最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$ , 如图 1(b) 所示. 图 1(b) 显示, 当  $\gamma \in [0, 0.12]$  时, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  大于 0, 即分数阶 P-R 振子做混沌运动.

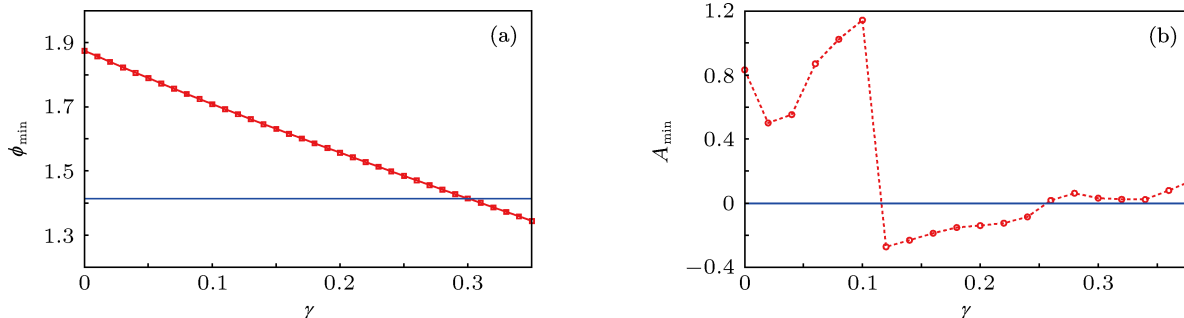


图1 幅角  $\phi_{\min}$  和最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  与  $\gamma$  的关系 (a) 幅角  $\phi_{\min}$ ; (b) 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$

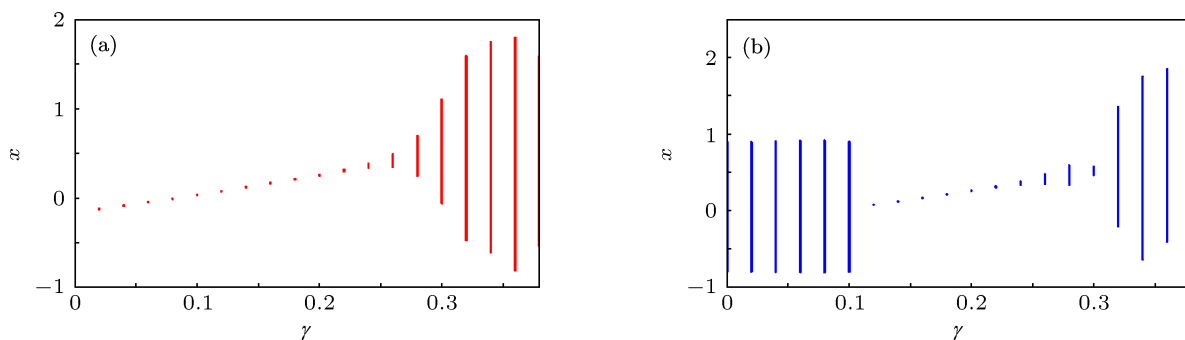


图2 不同初始条件时, 系统变量  $x$  的分岔图  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (1, 2, 3)$ ; (b)  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.6, 1.35, -1)$

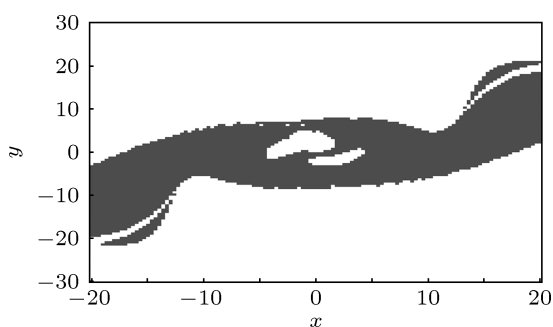


图3 在  $z = \sqrt{1 + 2\gamma\beta - \alpha}$  平面中, 黑色区域为静态吸引子的吸引域, 白色区域为混沌吸引子的吸引域

综合图 1(a) 和 (b) 的分析结果可知: 当  $\gamma \in [0, 0.12]$  时, 分数阶 P-R 振子处在混沌吸引子和静态吸引子的双稳态. 图 2 分别给出了初始条件为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (1, 2, 3)$  和  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.6, 1.35, -1)$  的系统变量

$x$  的分岔图. 由图 2 可知, 当初始条件为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (1, 2, 3)$  时, 系统最终走向静态吸引子  $P_+$ ; 当初始条件为  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (0.6, 1.35, -1)$  时, 系统最终走向混沌运动, 这与图 1 的分析结果一致.

为了说明相空间中的哪些初始条件导致系统最终走向静态吸引子和混沌态, 我们固定  $\gamma = 0.04$ , 在  $z = \sqrt{1 + 2\gamma\beta - \alpha}$  平面上绘制系统的静态吸引子和混沌吸引子的吸引域, 如图 3 所示, 系统吸引子在其余平面的吸引域可用类似的方法得到. 图 3 表明, 若系统初始条件位于黑色区域内, 系统最终都会走向静态吸引子, 右边的趋于  $P_+$ , 左边的区域  $P_-$ . 若系统的初始条件位于白色区域内, 系统最终走向混沌吸引子. 表 1 列出了其中的部分结果.

表 1 系统的初始位置及与初始位置对应的最终运动状态

初始位置 $(x(0), y(0), z(0))$	$(0.6, 1.35, -1)$	$(0.9, -3.35, 0.2)$	$(1, 2, 3)$	$(-3, 1.8, 1)$	$(-1.1, -1.9, -2.7)$	$(3.2, -1.9, -0.8)$
最终运动状态	混沌	混沌	$P_+$	$P_+$	$P_-$	$P_-$

### 3.2 耦合分数阶 P-R 振子的同步、反同步及振幅死亡

下面通过对处于双稳态的两个 P-R 振子进行双向耦合, 研究耦合强度和初始条件对耦合系统的动力学行为的影响. 不失一般性, 令  $\alpha = 0.165$ ,  $\beta = 1$ ,  $\mu = 0.4$ ,  $q_1 = q_2 = q_3 = 0.9$ ,  $\gamma = 0.04$ , 耦合强度矩阵

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

耦合方式矩阵

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以下如无特别说明, 本文中系统参数均按此设置. 在整个计算过程中, 耦合系统的初始条件均从表 1 中选取, 为了消除暂态的影响, 令系统迭代 10000 次舍去最初的 7000 次暂态解, 依据 (10) 和 (11) 式采用文献 [15] 提出的计算 Lyapunov 指数的方法计算最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  以及最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$ .

从图 4(a), (b) 和 (c) 可知, 无耦合的两个振子

开始都处于混沌态, 正反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (0, 0.04)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  以及最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  均大于 0, 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 表明两个混沌振子在弱的正反馈耦合强度下未能形成同步; 增强正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in [0.04, 0.96]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_2$  为不稳定值, 表明两个混沌振子在较强的正反馈耦合作用下形成混沌同步态; 增强正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (0.96, 1.6]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_2$  为稳定值, 进一步观察图 4(d) 和 (e) 发现, 耦合振子处于静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点. 我们把两个振子都停止振荡的现象称为全部振幅死亡, 而把只有一个振子停止振荡的现象称为部

分振幅死亡. 因此, 此时两个振子在强耦合作用下处于全部振幅死亡同步态.

从图 4(a), (b) 和 (c) 也可知, 无耦合的两个振子开始都处于混沌态, 负反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (-0.03, 0)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  以及最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  均大于 0, 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 表明两个混沌振子在弱的负反馈耦合强度下未能形成反同步; 增强负反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (-0.26, -0.03]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 4(d) 和 (e) 发现, 两个振子均处于静止状态, 表明两个混沌振子在较强的负反馈耦合作用下形成全部振幅死亡反同步态; 继续增强  $\varepsilon_2 \in (-0.4, -0.26]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$

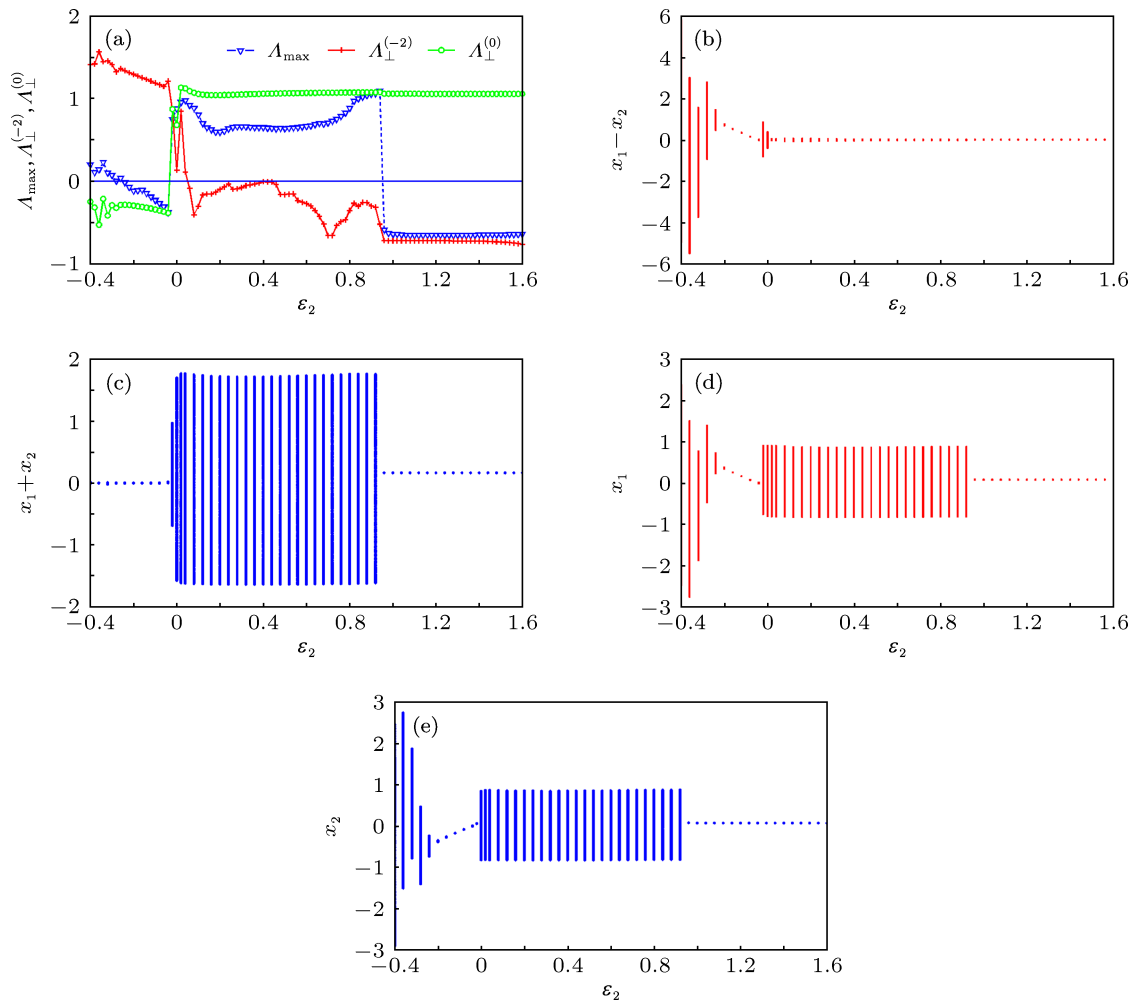


图 4 相互耦合的两个振子的初始位置分别为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0.6, 1.35, -1)$  和  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (-0.9, -3.35, 0.2)$  (a) 最大 Lyapunov 指数和最大条件 Lyapunov 指数与正负反馈耦合强度的关系; (b), (c) 同步误差和反同步误差与正负反馈耦合强度的关系; (d), (e) 正负反馈耦合强度变化时系统变量  $x_1$  和  $x_2$  的分岔图

为不稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 表明两个混沌振子在强的负反馈耦合作用下处于混沌反同步态.

图 5(a), (b) 和 (c) 显示, 无耦合的两个振子开始一个处于混沌态, 另一个处于静态, 正反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (0, 0.04)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  以及最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  均大于 0, 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 进一步观察图 5(d) 和 (e) 发现, 处于静态的振子基本不动, 处于混沌态的振子保持混沌运动, 表明弱的正反馈耦合强度未能改变两个振子原来的运动性质, 两个振子保持无耦合时的运动状态, 耦合系统处于部分振幅死亡态; 增强正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in [0.04, 1.6]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_2$  为稳定值, 进一步观察图 5(d) 和 (e) 发现, 耦合振子处于静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 表明耦合

振子在强的正反馈耦合作用下形成全部振幅死亡同步态.

图 5(a), (b) 和 (c) 也显示, 无耦合的两个振子开始一个处于混沌态, 另一个处于静态, 负反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (-0.05, 0)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  均为正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 进一步观察图 5(d) 和 (e) 发现, 处于静态的振子基本不动, 处于混沌态的振子保持混沌运动, 表明弱的负反馈耦合强度未能改变两个振子原来的运动性质, 两个振子基本保持无耦合时的运动状态, 耦合系统处于部分振幅死亡态; 增强负反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (-0.22, -0.05]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 5(d) 和 (e) 发现, 耦合振子处于静止状态, 但静止位置已不再是单个振

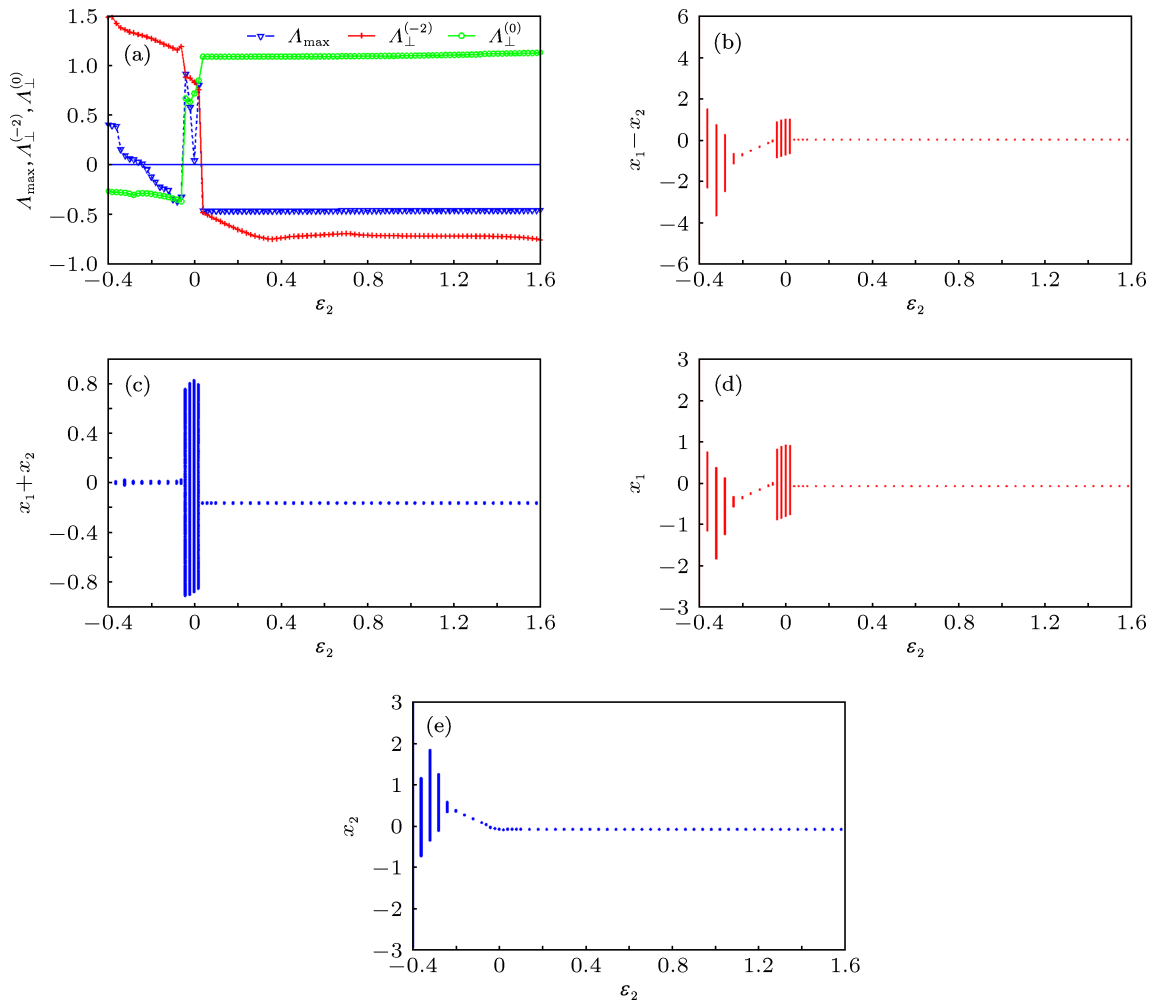


图 5 相互耦合的两个振子的初始位置分别为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (0.6, 1.35, -1)$  和  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (1, 2, 3)$  (a) 最大 Lyapunov 指数和最大条件 Lyapunov 指数与正负反馈耦合强度的关系; (b), (c) 同步误差和反同步误差与正负反馈耦合强度的关系; (d), (e) 正负反馈耦合强度变化时系统变量  $x_1, x_2$  的分岔图

子的平衡点, 表明耦合振子在较强的负反馈耦合作用下形成了全部振幅死亡反同步态; 继续增强  $\varepsilon_2 \in [-0.4, -0.22]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为不稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 5(d) 和 (e) 发现, 耦合振子开始由静止状态变为振动状态, 表明耦合振子在强的负反馈耦合作用下形成混沌反同步态.

当两个振子开始处于静态时. 这里有两种情况. 第一种是当振子的静态处于同一侧时, 即振子都在  $P_+$  或都在  $P_-$ . 第二种是振子处于异侧的静态, 即一个振子处于  $P_+$ , 另一个振子处于  $P_-$ . 下面将分别就这两种情况进行分析.

从图 6(a), (b) 和 (c) 可知, 无耦合的两个振子开始均处于静态  $P_+$ , 正反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (0, 1.6)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_2$  为稳定

值, 进一步观察图 6(d) 和 (e) 发现, 两个振子始终保持静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 表明两个振子在正反馈耦合作用下始终保持全部振幅死亡同步态.

从图 6(a), (b) 和 (c) 也可知, 无耦合的两个振子开始均处于静态  $P_+$ , 负反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (-0.01, 0)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0$ ,  $x_1 + x_2$  为稳定值, 进一步观察图 6(d) 和 (e) 发现, 耦合振子保持静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 表明弱的负反馈耦合作用未能改变耦合振子原来的运动性质, 两个振子保持无耦合时的运动状态, 即全部振幅死亡同步态; 增强负反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in [-0.08, -0.01]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  以及最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max}$  均为正值, 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 进一

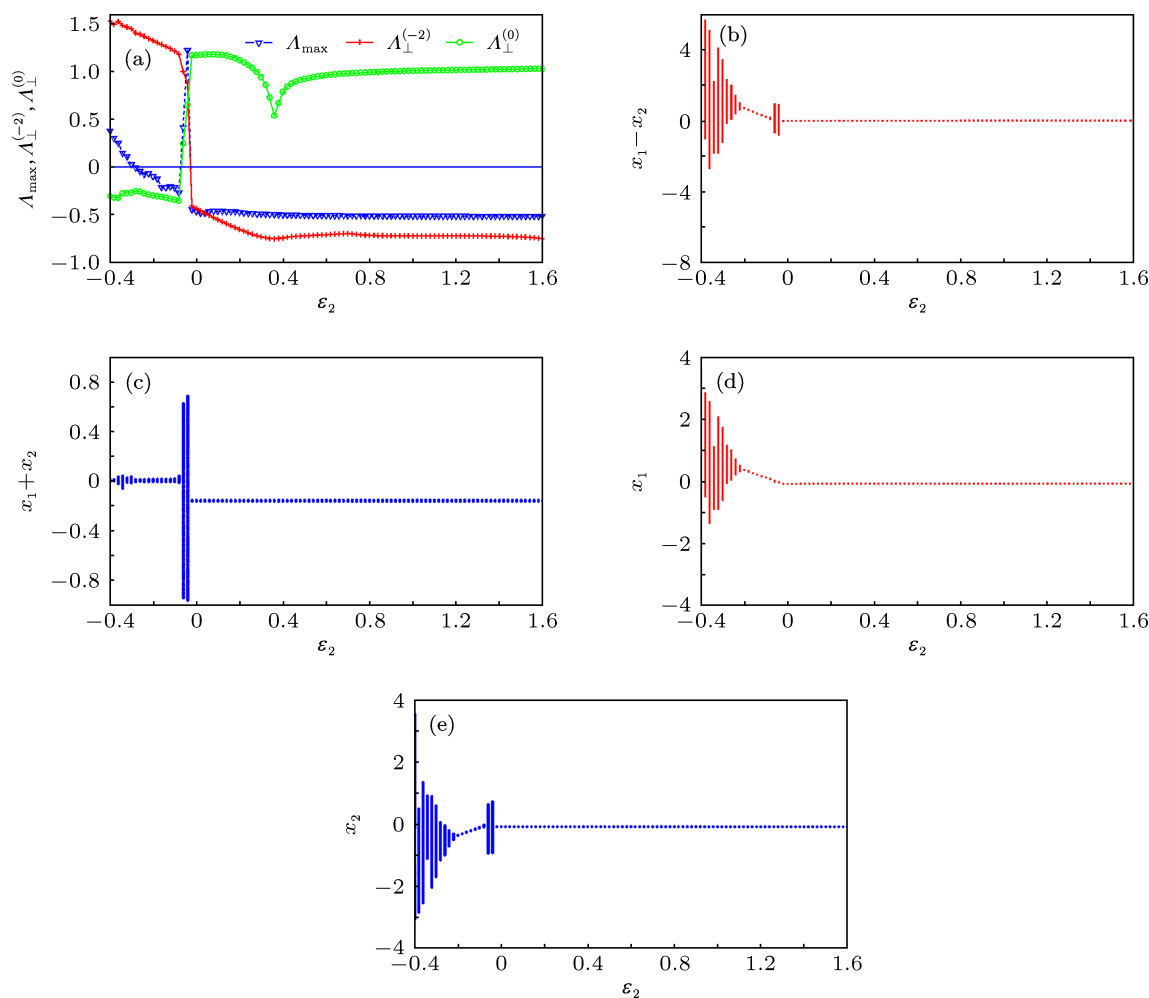


图 6 相互耦合的两个振子初始位置分别为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (-3, 1.8, 1)$  和  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (1, 2, 3)$  (a) 最大 Lyapunov 指数和最大条件 Lyapunov 指数与正负反馈耦合强度的关系; (b), (c) 同步误差和反同步误差与正负反馈耦合强度的关系; (d), (e) 正负反馈耦合强度变化时系统变量  $x_1, x_2$  的分岔图

步观察图 6(d) 和 (e) 发现, 振子 1 仍保持静止状态, 而振子 2 处于振动状态, 表明较强的负反馈耦合作用首先改变了振子 2 的运动性质, 使其由静态跃变为混沌振动, 由于振子 1 保持静止, 因此, 此时耦合系统处于部分振幅死亡态; 增强负反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (-0.3, -0.08)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 6(d) 和 (e) 发现, 振子 1 和 2 均为静止状态, 静止位置不再是单个振子的平衡点, 表明两个振子在强的负反馈耦合作用下形成全部振幅死亡反同步态; 当负反馈耦合强度增强到  $\varepsilon_2 \in [-0.4, -0.3]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为不稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 表明在更强的负反馈耦合作用下耦合系统形成了混沌反同步态.

图 7(a), (b) 和 (c) 显示, 无耦合的两个振子开始处于异侧的静态, 振子 1 处于  $P_+$ , 振子 2 处于  $P_-$ , 正反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (0, 0.03]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 7(d) 和 (e) 发现, 两个振子始终保持静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 表明弱的正反馈耦合作用未能改变耦合振子原来的运动性质, 两个振子保持全部振幅死亡反同步态; 增强正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (0.03, 0.09)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  均为正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  和  $x_1 + x_2$  均为不稳定值, 进一步观察图 7(d) 和 (e) 发现, 振子 1 仍保持静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 而振子 2 处于振动状态, 表明较强的正反馈耦合作用首先改变了振子 2 的运动性质, 使其由静态跃变为混沌振动, 由于振子 1

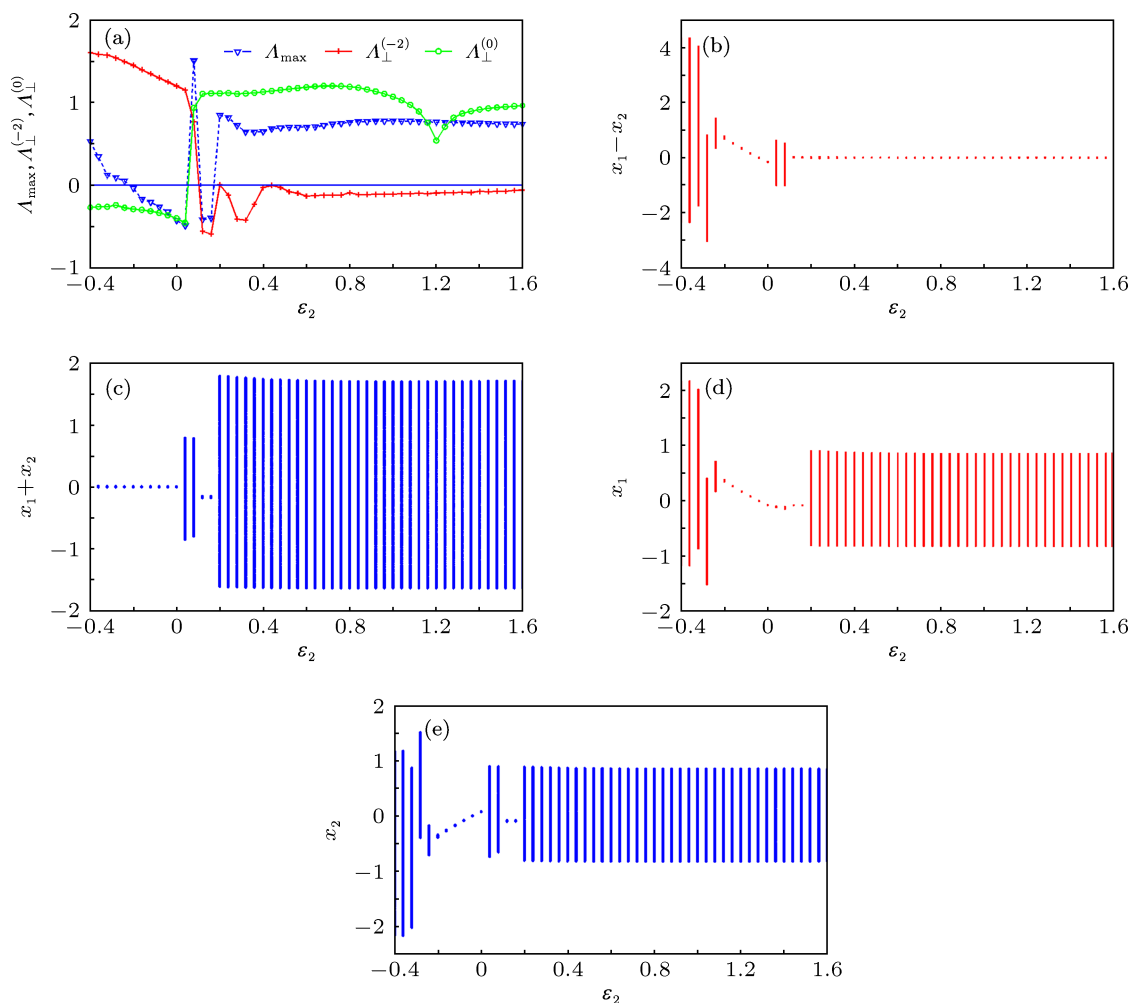


图 7 相互耦合的两个振子的初始位置分别为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (1, 2, 3)$  和  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (3.2, -1.9, -0.8)$  (a) 最大 Lyapunov 指数和最大条件 Lyapunov 指数与正负反馈耦合强度的关系; (b), (c) 同步误差和反同步误差与正负反馈耦合强度的关系; (d), (e) 正负反馈耦合强度变化时系统变量  $x_1, x_2$  的分岔图

保持静止, 因此, 此时耦合系统处于部分振幅死亡态; 增强正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in [0.09, 0.18]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2$  为稳定值, 进一步观察图 7(d) 和 (e) 发现, 振子 1 和 2 均为静止状态, 静止位置为单个振子的平衡点, 表明两个振子在强的正反馈耦合作用下形成全部振幅死亡同步态; 当正反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in (0.18, 1.6]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为负值和正值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2$  为不稳定值, 表明在更强的正反馈的耦合作用下系统处于混沌同步态.

图 7(a), (b) 和 (c) 也显示, 无耦合的两个振子开始处于异侧的静态, 振子 1 处于  $P_+$ , 振子 2 处于  $P_-$ , 负反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  从 0 开始增强. 当  $\varepsilon_2 \in (-0.28, 0)$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} < 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 7(d) 和 (e) 发现, 两个振子均为静止状态, 静止位置不再是单个振子的平衡点, 表明两个振子在弱的负的反馈耦合作用下处于全部振幅死亡反同步态; 增强负反馈耦合强度  $\varepsilon_2 \in [-0.4, -0.28]$  时, 最大条件 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\perp}^{(-2)}$  和  $\Lambda_{\perp}^{(0)}$  分别为正值和负值, 最大 Lyapunov 指数  $\Lambda_{\max} > 0$ , 与此相应,  $x_1 - x_2$  为不稳定值,  $x_1 + x_2 = 0$ , 进一步观察图 7(d) 和 (e) 发现, 两个振子开始由静止状态变为混沌状态, 表明在较强的负反馈耦合作用下耦合系统处于混沌反同步态.

综合上述实验结果可以发现, 无耦合时, 由于振子 1 和 2 都处在双稳态, 所以最终走向哪种状态只分别与各自的初始条件有关; 当耦合存在时, 系统的最终状态不但与各自的初始条件有关, 而且与耦合强度有关. 初始条件和耦合强度的共同作用决定着耦合振子的最终运动状态, 并且在某些耦合强度区间, 这种共同作用表现得尤为明显, 如在区间  $\varepsilon_2 \in [-0.2, 0.2]$ , 耦合振子可呈现出全部振幅死亡同步态, 全部振幅死亡反同步态, 部分振幅死亡态, 混沌同步态, 混沌反同步态等运动状态. 在某些耦合强度下, 耦合系统甚至可呈现出因初始条件差异而导致的多态共存的现象, 如  $\varepsilon_2 = 0.05$  时, 耦合系统可呈现出全部振幅死亡同步态, 部分振幅死亡态, 混沌同步态的三态共存现象.

为了进一步描述耦合振子的振幅死亡特征, 我们引入变量  $P_i = \frac{N_i}{N}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别表示在选

定的耦合强度下, 相空间中能走向全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的初始条件的数量占整个相空间中初始条件的数量的比例. 其中  $N = N_1 + N_2 + N_3$ ,  $N$  表示在相空间中随机选取的初始条件的个数,  $N_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 分别表示  $N$  个初始条件中能最终演化为全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的初始条件的个数. 这样, 我们就可以从统计学上给出耦合振子振幅死亡的特征. 实际计算时, 选取了相空间的区域:  $-20 \leq x_i, y_i \leq 20, -\sqrt{1+2\gamma\beta-\alpha}-1 \leq z_i \leq \sqrt{1+2\gamma\beta-\alpha}+1, i = 1, 2$ . 依据统计学原理可知, 当  $N$  足够大时, 实验结果可逼近真实结果. 因此, 实验中我们令  $N = 5000$ . 图 8 给出了  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 与耦合强度  $\varepsilon_2$  的关系曲线.

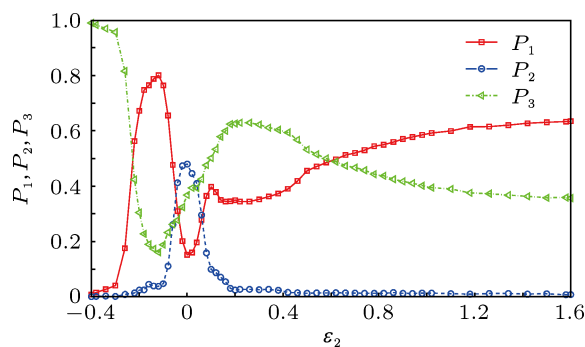


图 8  $P_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 与正负反馈耦合强度  $\varepsilon_2$  的关系

从图 8 可知, 在耦合强度很弱 ( $|\varepsilon_2| \leq 0.05$ ) 的情况下,  $P_i$  的值基本与  $\varepsilon_2 = 0$  的值是一样的. 表明在弱耦合强度下, 到达静态的初始条件依然会回到静态, 而能演化到混沌态的初始条件最后仍然到达混沌态, 耦合作用未能改变耦合振子原来的运动性质. 但是随着耦合强度  $|\varepsilon_2|$  增强,  $P_2$  迅速减小,  $|\varepsilon_2| > 0.2$  时,  $P_2 \approx 0$ , 表明在初始条件的相空间中, 耦合越强, 能最终演化到部分振幅死亡态的初始条件的个数越少, 即部分振幅死亡态只能在较弱的耦合下存在. 而有趣的是,  $P_1$  和  $P_3$  都非单调的依赖于耦合强度  $|\varepsilon_2|$ . 这一结果表明适当的选择耦合强度可以大幅度提高初始条件相空间中走向全部振幅死亡态或非振幅死亡态的初始条件的比例.

为了更详尽的描述初始条件的相空间中, 走向全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的初始条件都有哪些, 我们讨论特定耦合强度下, 耦合振子的多态吸引子共存的吸引域. 由于耦合振子的方程为 6 维系统, 我们固定  $z_1 = z_2 = \sqrt{1+2\gamma\beta-\alpha}$ ,  $y_1 = y_2 = \beta\sqrt{1+2\gamma\beta-\alpha}$ , 只考虑在  $x_1 - x_2$  的子空间中, 耦合振子的多态吸引子共存的吸引域, 如图 9 所示.

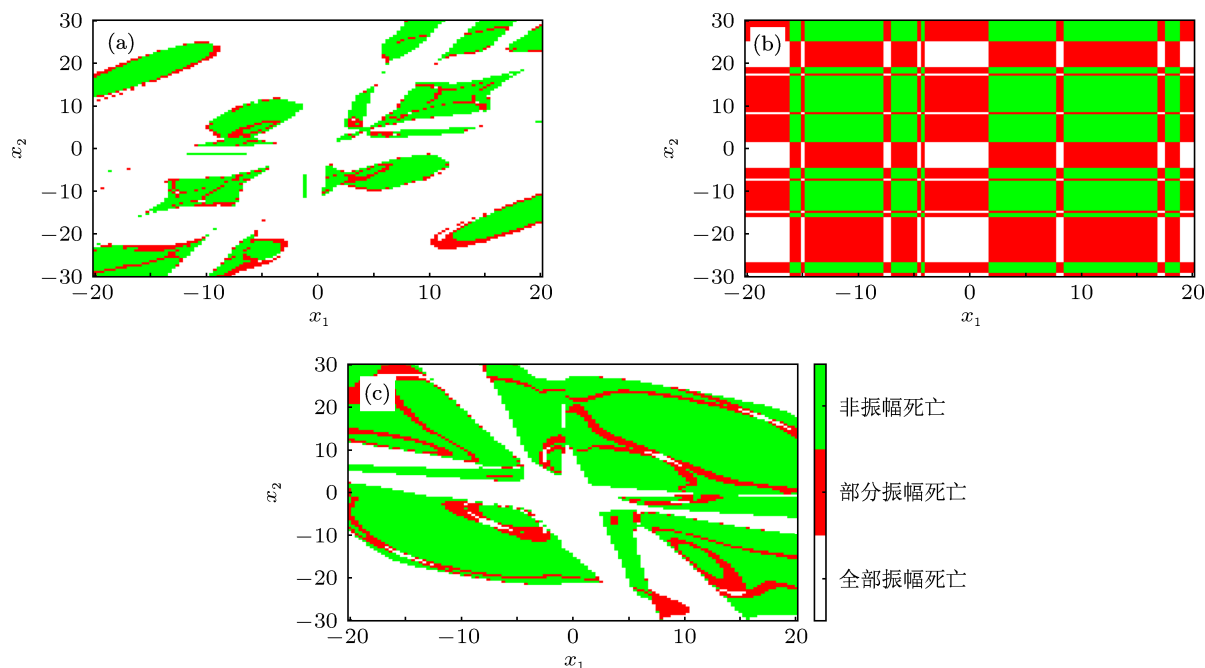


图9  $z_1 = z_2 = \sqrt{1+2\gamma\beta - \alpha}$ ,  $y_1 = y_2 = \beta\sqrt{1+2\gamma\beta - \alpha}$ , 在  $x_1 - x_2$  的二维空间中振幅死亡态的吸引域 (a)  $\varepsilon_2 = -0.1$ ; (b)  $\varepsilon_2 = 0$ ; (c)  $\varepsilon_2 = 0.1$

当  $\varepsilon_2 = 0$ , 无耦合存在时, 全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的吸引子的吸引域彼此规则间隔排列. 比较可知, 部分振幅死亡态 (红色) 面积最大, 非振幅死亡态 (绿色) 次之, 全部振幅死亡态 (白色) 最小, 如图 9(b) 所示. 当  $\varepsilon_2 = -0.1$ , 负反馈耦合改变了无耦合时全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的吸引域分布, 在三态的边界部分可看到明显的分形结构. 比较可知, 全部振幅死亡态 (白色) 的面积最大, 非振幅死亡态 (绿色) 的面积次之, 部分振幅死亡态 (红色) 的面积最小, 如图 9(a). 当  $\varepsilon_2 = 0.1$ , 正反馈耦合也改变了无耦合时的全部振幅死亡态、部分振幅死亡态和非振幅死亡态的吸引域分布, 在三态的边界部分可看到明显的分形结构. 比较可知, 非振幅死亡态 (绿色) 的面积最大, 振幅完全死亡态 (白色) 的面积次之, 部分振幅死亡态 (红色) 的面积最小, 如图 9(c). 由此可见, 吸引域的分析结果与蒙特卡罗方法的计算结果基本一致.

## 4 结论

在同一参数区间, 依据不同的初始条件分数

阶双稳态 P-R 振子可拥有平衡点和振荡态两种不同的运动状态. 以此为基础, 我们构造了双向耦合的分数阶双稳态 P-R 振子系统, 证明了通过选取不同的初始条件和耦合强度, 可以控制耦合振子实现混沌同步、混沌反同步、全部振幅死亡同步、全部振幅死亡反同步和部分振幅死亡等众多非线性现象. 应用蒙特卡罗方法计算了初始条件的相空间中耦合振子呈现的各种运动状态的比例, 从统计学的角度定量地表征了多态吸引子的共存特征. 通过绘制耦合振子的多态吸引子共存的吸引域, 定性的描述了多态吸引子的共存特征并进一步证明了蒙特卡罗方法的计算结果.

基于本征模式理论推导耦合分数阶双稳态振子同步和反同步满足的本征模式方程的方法, 不但适用于两个分数阶双稳态振子的情形, 对于两个以上的分数阶双稳态振子的情形也同样适用. 本文仅研究了两个同结构分数阶双稳态振子的情形, 对于异结构分数阶双稳态振子、分数阶双稳态振子网络以及噪声与分数阶双稳态振子网络同步之间的关系还有待进一步研究.

- [1] Matthews P C, Strogatz S H 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1701
- [2] Ramana Reddy D V, Sen A, Johnston G L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5109
- [3] Konishi K 2004 *Phys. Rev. E* **70** 066201
- [4] Konishi K, Senda K, Kokame H 2008 *Phys. Rev. E* **78** 056216
- [5] Prasad A, Dhamala M, Adhikari B M, Ramaswamy R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 027201
- [6] Zhu Y, Qian X L, Yang J Z 2008 *Europhys. Lett.* **82** 40001
- [7] Shao S Y, Min F H, Ma M L, Wang E R 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 130504 (in Chinese) [邵书义, 闵富红, 马美玲, 王恩荣 2013 物理学报 **62** 130504]
- [8] Jia H Y, Chen Z Q, Xue W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140503 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 薛薇 2013 物理学报 **62** 140503]
- [9] Shao S Q, Gao X, Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6815 (in Chinese) [邵仕泉, 高心, 刘兴文 2007 物理学报 **56** 6815]
- [10] Deng W H, Li C P 2005 *Physica A* **353** 61
- [11] Chen X R, Liu C X, Wang F Q, Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣, 刘崇新, 王发强, 李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [12] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* **198** (San Diego: Academic Press) p78
- [13] Deng W H, Li C P, Lü J H 2007 *Nonlinear Dyn.* **48** 409
- [14] Zhang R X, Yang S P 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110506
- [15] Li C P, Peng G J 2004 *Chaos, Solitons and Fractals* **22** 443

# Synchronization, antisynchronization and amplitude death in coupled fractional order bistable oscillators\*

Wang Li-Ming<sup>1)†</sup> Wu Feng<sup>2)</sup>

1) (Department of physics, Langfang Teachers College, Langfang 065000, China)

2) (Department of Physics, Tianjin University of Technology, Tianjin 300191, China)

(Received 12 June 2013; revised manuscript received 19 July 2013)

## Abstract

The dynamic behaviors of coupled fractional order bistable oscillators are investigated extensively and various phenomena such as synchronization, anti-synchronization, and amplitude death, etc. are explored. Based on the bistable characteristics of P-R oscillator with specific parameters, effects of initial conditions and coupling strength on the dynamic behaviors of the coupled fractional order bistable oscillators are first investigated by analyzing the maximum condition of Lyapunov exponent, the maximum Lyapunov exponent and the bifurcation diagram, etc. Further investigation reveals that the coupled fractional order bistable oscillators can be controlled to form chaotic synchronization, chaotic anti-synchronization, synchronous amplitude death, anti-synchronous amplitude death, partial amplitude death, and so on by changing the initial conditions and the coupling strength. Then, based on the principle of Monte Carlo method, by randomly choosing the initial conditions from the phase space, we calculate the percentage of various states when changing the coupling strength, so the dynamic characteristics of coupled fractional-order bistable oscillators can be represented by using the perspective of statistics. Some representative attractive basins are plotted, which are well coincident with numerical simulations.

**Keywords:** amplitude death, attractive basin, bistable state

**PACS:** 05.45.a, 05.45.Xt, 05.45.Pq

**DOI:** 10.7498/aps.62.210504

\* Project supported by the Langfang Teachers College Foundation, China (Grant No. LSZY201204), and the National Science Fund for Distinguished Young Scholars of China (Grant No. 11204214).

† Corresponding author. E-mail: wlm\_shooker@163.com