

一阶 Lagrange 系统的梯度表示*

梅凤翔¹⁾ 吴惠彬^{2)†}

1) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2) (北京理工大学数学学院, 北京 100081)

(2013年5月18日收到; 2013年6月21日收到修改稿)

研究一阶 Lagrange 系统的梯度表示. 给出一阶 Lagrange 系统可成为梯度系统的条件. 利用梯度系统的性质研究系统的稳定性. 给出例子说明结果的应用.

关键词: 一阶 Lagrange 系统, 梯度系统, 稳定性

PACS: 45.20.Jj, 11.30.-j

DOI: 10.7498/aps.62.214501

1 引言

一阶 Lagrange 系统是指问题的 Lagrange 函数 L 对速度是线性的. 一阶 Lagrange 系统的问题有: 由一阶微分方程组构造一阶 Lagrange 函数, 即变分学逆问题^[1-3]; 研究系统的对称性与守恒量^[4-11]等. 文献^[12]研究了两类重要系统, 一类是梯度系统, 另一类是 Hamilton 系统. 梯度系统是微分方程和动力系统中的重要问题, 特别适合用 Lyapunov 函数来研究. 如果一个力学系统能够成为梯度系统, 那么就可利用梯度系统的特性来研究力学系统的性质, 特别是稳定性. 本文研究一阶 Lagrange 系统成为梯度系统的条件, 并利用梯度系统的性质来研究一阶 Lagrange 系统的稳定性.

2 梯度系统

梯度系统的微分方程有形式^[12]

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (1)$$

其中 $V = V(x_1, x_2, \dots, x_m)$ 称为势函数. 方程 (1) 可表示为矢量形式, 即

$$\dot{\mathbf{X}} = -\text{grad}V(\mathbf{X}), \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$$\text{grad}V = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \frac{\partial V}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial V}{\partial x_m} \right).$$

梯度系统有如下重要性质^[12]:

1) 函数 V 是系统 (2) 的一个 Lyapunov 函数, 并且 $\dot{V} = 0$, 当且仅当 \mathbf{X} 是一个平衡点;

2) 对于梯度系统 (2), 任一平衡点处的线性化系统都只有实特征值.

这两条性质, 可用来研究可化成梯度系统的力学系统的平衡位置及其稳定性. 与第 1 条性质相关, 只要势函数 V 成为 Lyapunov 函数, 那么就有可能由 \dot{V} 的形式, 按 Lyapunov 定理来研究系统的稳定性, 或按 Rumyantsev 定理来研究部分变量稳定性. 与第 2 条性质相关, 按 Lyapunov 一次近似理论, 若线性化系统的特征根全为负实根, 则系统是渐近稳定的; 若有正实根, 则是不稳定的.

3 系统的梯度表示

在物理学、力学、综合国力分析、市场经济分析、战争、人口与动物世界、疾病的传染与诊断等问题中都存在一些一阶微分方程组. 某些微分方程组在一定条件下可化为一阶 Lagrange 系统.

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002, 11272050) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn

一阶 Lagrange 系统的 Lagrange 函数 L 对速度是线性的, 可表示为

$$L(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = M_s(t, \mathbf{q})\dot{q}_s - N(t, \mathbf{q}), \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

这儿及以后, 同一项中相同的活动指标表示对其求和. (3) 式中

$$\det \left(\frac{\partial M_s}{\partial q_k} - \frac{\partial M_k}{\partial q_s} \right) \neq 0, \quad (s, k = 1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = 0, \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

将 (3) 式代入方程 (5), 得到

$$\left(\frac{\partial M_k}{\partial q_s} - \frac{\partial M_s}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial N}{\partial q_s} - \frac{\partial M_s}{\partial t} = 0, \quad (s, k = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

对自治情形, 有

$$M_k = M_k(\mathbf{q}), \quad N = N(\mathbf{q}). \quad (7)$$

此时方程 (6) 给出

$$\left(\frac{\partial M_k}{\partial q_s} - \frac{\partial M_s}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k - \frac{\partial N}{\partial q_s} = 0. \quad (8)$$

由此解出 \dot{q}_s , 有

$$\dot{q}_s = \Omega^{sk} \frac{\partial N}{\partial q_k}, \quad (9)$$

其中

$$\Omega_{sk} = \left(\frac{\partial M_k}{\partial q_s} - \frac{\partial M_s}{\partial q_k} \right), \quad \Omega_{sk} \Omega^{kl} = \delta_s^l. \quad (10)$$

方程 (9) 一般不是一个梯度系统, 但在一定条件下能够成为梯度系统. 对方程 (9), 如果满足条件

$$\frac{\partial}{\partial q_r} \left(\Omega^{sk} \frac{\partial N}{\partial q_k} \right) - \frac{\partial}{\partial q_s} \left(\Omega^{rk} \frac{\partial N}{\partial q_k} \right) = 0, \quad (s, k, r = 1, 2, \dots, n), \quad (11)$$

则它是一个梯度系统. 此时, 可求得势函数 V , 使得

$$\Omega^{sk} \frac{\partial N}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_s}. \quad (12)$$

4 算例

例1 一阶 Lagrange 系统的 Lagrange 函数为

$$L = \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_2 q_1 + 2q_1 q_2 + q_1^2 - q_2^2,$$

试将其化为梯度系统, 并研究其零解的稳定性.

解 方程 (9) 给出

$$\dot{q}_1 = q_2 - q_1, \quad \dot{q}_2 = q_2 + q_1,$$

容易验证 (11) 式成立, 这是一个梯度系统. 由 (12) 式可求得势函数

$$V = \frac{1}{2} q_1^2 - q_1 q_2 - \frac{1}{2} q_2^2,$$

因线性方程的特征根有正实根, 故零解 $q_1 = q_2 = 0$ 是不稳定的.

例2 一阶 Lagrange 系统的 Lagrange 函数为

$$L = q_1 q_2 - \frac{1}{2} q_2 \dot{q}_1 + \frac{1}{2} q_1 \dot{q}_2,$$

试将其化为梯度系统, 并研究其零解的稳定性.

解 方程 (9) 给出

$$\dot{q}_1 = q_1, \quad \dot{q}_2 = -q_2,$$

这是一个梯度系统, 其势函数为

$$V = \frac{1}{2} q_2^2 - \frac{1}{2} q_1^2.$$

按方程求 \dot{V} , 得

$$\dot{V} = -q_1^2 - q_2^2.$$

这样, V 对变量 q_1 是负定的, 对变量 q_2 是正定的, 而 \dot{V} 对 q_1 是负定的, 对 q_2 也是负定的. 由 Rumyantsev 部分变量稳定性定理知, 零解 $q_1 = q_2 = 0$ 对变量 q_1 是不稳定的, 而相对变量 q_2 是稳定的, 并且是渐近稳定的.

例3 一阶 Lagrange 系统为

$$L = \frac{1}{2} q_2 \dot{q}_1 - \frac{1}{2} q_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} q_1^2 - \frac{1}{2} q_2^2 + t q_1 + 2t q_2,$$

试将其化为梯度系统, 并研究解的稳定性.

解 方程 (9) 给出

$$\dot{q}_1 = q_2 - 2t, \quad \dot{q}_2 = q_1 + t,$$

它有解

$$q_1^1 = 2 - t, \quad q_2^1 = 2t - 1.$$

为研究这个解的稳定性, 作变换

$$q_1 = q_1^0 + \xi_1, \quad q_2 = q_2^0 + \xi_2,$$

则方程可表示为

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad \dot{\xi}_2 = \xi_1.$$

这是一个梯度系统, 其势函数为

$$V = -\xi_1 \xi_2.$$

方程的特征根有一正实根, 故解 $\xi_1 = \xi_2 = 0$ 是不稳定的.

5 结论

一阶 Lagrange 系统的研究不仅具有物理和力学意义, 而且有更广泛的意义. 本文给出一阶 La-

grange 系统可化成梯度系统的条件, 化成梯度系统后, 就可利用梯度系统的特性来研究一阶 Lagrange 系统的动力学行为, 特别是系统稳定性研究.

- [1] Santilli R M 1978 *Foundations of Theoretical Mechanics I* (New York: Springer-Verlag)
- [2] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1896
- [3] Ding G T, Tao S T 2008 *Chin. Sci. Bull.* **53** 872 (in Chinese) [丁光涛, 陶松涛 2008 科学通报 **53** 872]
- [4] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing University of Technology Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质 (北京: 北京工业大学出版社)]
- [5] Mei F X, Zhu H P 2000 *J. of Beijing Institute of Technology* **9** 11
- [6] Ge W K, Mei F X 2001 *J. of China Ordnance* **22** 241 (in Chinese) [葛伟宽, 梅凤翔 2001 兵工学报 **22** 241]
- [7] Mei F X, Shang M 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1901 (in Chinese) [梅凤翔, 尚玫 2000 物理学报 **49** 1901]
- [8] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]
- [9] Chen X W, Shang M, Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 997
- [10] Chen X W, Liu C, Mei F X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 3180
- [11] Liu C, Zhu N, Mei F X, Guo Y X 2008 *Communications in Theoretical Physics* **50** 1065
- [12] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L 2008 *Differential Equation, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* (Singapore: Elsevier)

A gradient representation of first-order Lagrange system*

Mei Feng-Xiang¹⁾ Wu Hui-Bin^{2)†}

1) (School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

2) (School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

(Received 18 May 2013; revised manuscript received 21 June 2013)

Abstract

A gradient representation of the first-order Lagrange system is studied. A condition under which the first-order Lagrange system can be considered as a gradient system is obtained. The stability of the system is discussed by using the property of the gradient system. Some examples are given to illustrate the application of the result.

Keywords: first-order Lagrange system, gradient system, stability

PACS: 45.20.Jj, 11.30.-j

DOI: 10.7498/aps.62.214501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11272050).

† Corresponding author. E-mail: huibinwu@bit.edu.cn