

热惯性对热弹性行为影响的渐近分析*

王颖泽[†] 宋新南 刘栋

(能源与动力工程学院, 江苏大学, 镇江 212013)

(2013年6月19日收到; 2013年7月26日收到修改稿)

当热作用时间或受热器件结构尺寸呈现微尺度特征时, 热流运动的惯性效应将对热量的传递过程产生显著地影响. 基于热质的概念, 依据牛顿力学原理引入用于描述热质运动的热波方程, 结合各向同性材料的本构关系, 构建了计及热流运动惯性效应的广义热弹性动力学模型. 利用超常传热的微尺度特征, 采用解析的方法对半无限大体外表面受热冲击作用的一维问题进行了渐近求解. 通过对热波、热弹性波的传播和各物理场分布的分析以及与已有广义热弹性理论预测结果的对比, 揭示了热流运动的惯性效应对热弹性行为的影响. 结果表明: 热量的传递除了受到热流加速的时间惯性影响之外, 热流运动的空间惯性也对传热行为产生影响, 当计及空间惯性时, 热波、热弹性波的波速、波前位置, 各物理场的建立时间、阶跃峰值及阶跃间隔均受到不同程度的影响.

关键词: 热惯性, 热质运动, 广义热弹性动力学模型, 渐近分析

PACS: 46.25.Cc, 46.25.Hf, 44.05.+e

DOI: 10.7498/aps.62.214601

1 引言

作为描述热量传热过程的最基本定律, 傅里叶导热定律尽管已为大量的实验和工程实际所证实并获得了广泛的应用, 但其扩散型的导热方程所隐含的热扰动传播速度无限大的结论, 制约了其在预测不同条件下的导热现象时所得结果的有效性. 近年来, 随着激光脉冲、微波等加热技术的发展以及器件的小型化, 围绕具有时间极短、尺度微观特征的超常传热行为成为当前研究的热点问题^[1]. 由已有实验证实^[2,3], 当热作用时间极其短暂或受热器件结构尺寸微细化时, 热量将以有限速度传播, 此时, 基于傅里叶导热定律的经典热弹性理论显然无法给出准确的描述. 针对这一现象, 相关学者在充分考虑热流加速的惯性效应的基础上, 对傅里叶导热定律进行修正, 先后提出了可描述热以有限速度传播的广义热弹性理论^[4]. 其中, 应用较为广泛的主要包括基于单松弛时间的 L-S 理论^[5]、两松弛时间的 G-L 理论^[6]、基于能量非耗散效应的 G-N 理论^[7] 基于以及基于分数阶积分的热扩散理论^[8].

区别于经典理论, 原有的抛物型导热方程被双曲型方程所取代, 为此可以准确刻画热量传递过程中呈现的波动效应. 但值得注意的一点是, 这些广义热弹性理论均认为热流加速的惯性效应, 即热流运动的时间惯性, 是导致热量以有限速度传播的原因所在. 由于模型中并未包含热流矢对空间的偏导数, 对于稳态的导热问题, 上述理论均退化为经典理论, 即认为稳态条件下的导热均遵守傅里叶导热定律. 随着纳米技术和低维材料的发展, 在研究具有微细结构尺寸特征的稳态导热行为时发现, 依据经典理论将得到材料的导热系数随自身结构尺寸而变化的反常结果^[9]. 究其原因, 过增元等^[10]认为, 随着受热器件结构尺寸的微细化, 热流运动将受到空间变化的影响, 即使在稳态导热条件下, 依然会出现非傅里叶导热现象, 此时热流密度与温度梯度不再成线性关系. 鉴于此, 过增元等人依据热质的概念, 提出了计及热流运动的时间和空间效应的热波模型^[10-12], 利用该模型可以很好的解决导热系数依赖于结构尺寸的反常问题, 同时也指出对于微尺度传热问题, 热流运动的空间效应不可忽略.

本文依据描述热质运动的普适导热定律, 结合

* 国家自然科学基金(批准号: 11102073)、中国博士后基金(批准号: 2012M511207)、江苏大学高层次人才启动基金(批准号: 10JDG055)和江苏高校优势学科建设项目(PAPD)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn

各向同性材料的本构关系, 构建了计及热流运动惯性效应的广义热弹性动力学模型. 利用超常传热问题的尺度特征, 采用渐近求解的方法推导了半无限大体外表面受热冲击问题的广义热弹性解. 通过对热冲击下热波、热弹性波的传播, 温度场、位移场及应力场的分布的分析以及与已有广义热弹性理论预测结果的对比, 揭示热流运动的惯性效应对热弹性行为的影响.

2 基于热质运动的广义热弹性动力学模型

2.1 基于热质运动的热波方程

随着热作用时间的急剧缩短或受热器件结构尺寸的微细化, 热流传递过程中的惯性效应逐渐凸显出来, 为了准确刻画这种惯性效应及其对传热行为的影响, 过增元等人认为热量运动具有质量属性, 并提出了“热质”的概念, 其具体可通过引入爱因斯坦质能关系式来定义^[10]:

$$\rho_h = \frac{\rho c_v T}{c^2}, \quad (1)$$

式中, ρ_h 为热质的密度, ρ 为物体的密度, T 为物体的温度, c_v 为常应变比热, c 为真空中的光速.

由上式可知, 在引入热质概念后, 热量可视作具有有限质量的可压缩流体, 可采用牛顿力学原理建立热质流动的控制方程来描述热量的传递过程

$$\dot{\rho}_h + (\rho_h u_h)_{,i} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_h (\dot{u}_h + u_h \cdot u_{h,i}) + p_{h,i} + f_h = 0, \quad (3)$$

式中, $u_h = q/\rho c_v T$, 为热质流速, q 为热流密度. p_h 和 f_h 分别为热质的压力梯度及阻力. 变量上标“ \cdot ”和下标“ $,i$ ”分别表示对时间和坐标的偏导数.

根据声子气的状态方程及阻力的关系式^[13,14]可得

$$p_h = \gamma_h \rho_h c_v T, \quad (4)$$

$$f_h = \beta_h u_h, \quad (5)$$

式中, γ_h 为 Grüneisen 常数, $\beta_h = 2\gamma_h c_v (\rho c_v T)^2 / (kc)^2$, 为阻力系数, k 为热导率.

将 (4) 和 (5) 式代入 (3) 式中进行整理可得

$$\tau \dot{q} - l \rho c_v \dot{T} + l q_{,i} - b k T_{,i} + k T_{,i} + q = 0, \quad (6)$$

式中, $\tau = k/2\gamma_h \rho c_v^2 T$, 为特征时间, $l = qk/2\gamma_h c_v (\rho c_v T)^2$, 为特征长度, $b = q^2/2\gamma_h \rho^2 c_v^3 T^3$, 为无量纲参数.

由于在引入热质概念后, 热量的传递过程可通过热质的运动来表征, 即 (6) 式为表征热量传递过程的导热方程. 为了便于分析, 可将 (6) 式改写为

$$\tau \dot{q} - l \rho c_v \dot{T} + l q_{,i} - b k T_{,i} + q = -k T_{,i}. \quad (7)$$

由上式可知, 相比于傅里叶导热定律, 方程的左侧增加了热流密度和温度对时间和坐标的偏导数, 其分别表征的是热流密度和温度对时间和空间的惯性效应, 即基于热质运动的导热方程为计及热质惯性效应的双曲型波动方程. 此外, 当忽略热流密度和温度对空间的惯性效应及温度对时间的惯性效应, 方程 (6) 可退化为 CV 模型^[15,16], 由此可知 CV 模型仅考虑了热流密度对时间的惯性效应.

2.2 基于热质运动的广义热弹性模型

根据热力学第二定律, 能量的平衡关系可写成如下的形式:

$$q_{,i} = \rho r - T_0 \rho \dot{S}, \quad (8)$$

式中, S 为熵密度, r 为内热源, T_0 为参考温度.

结合 Clausius 不等式及自由能展开式, 熵密度变化率可表示为

$$\rho \dot{S} = -\beta_{ij} \dot{\gamma}_{ij} + \rho c_v \dot{T}/T_0, \quad (9)$$

式中, $\beta_{ij} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \gamma_{ij} \partial T} = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial T \partial \gamma_{ij}}$, 为热力系数, Ψ 为自由能, γ_{ij} 为应变张量. 对于各向同性材料, $\beta_{ij} = \beta \delta_{ij}$, δ_{ij} 为 Kronecker δ 符号.

联立 (8) 和 (9) 式进行消元处理, 并将所得结果代入 (6) 式中进行整理, 即可得到基于热质运动的温度控制方程

$$(1-b)kT_{,ii} = \rho c_v (\tau \dot{T} + 2l\dot{T}_{,i} + \dot{T}) + T_0 \beta (\tau \dot{\gamma}_{ii} + l\dot{\gamma}_{ii,i} + \dot{\gamma}_{ii}) - \rho (\tau \dot{r} + l r_{,i} + r). \quad (10)$$

对于各向同性材料, 本构方程可表示为

$$\sigma_{ij} = \lambda \gamma_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \gamma_{ij} - \beta \theta \delta_{ij}, \quad (11)$$

式中, σ_{ij} 为应力张量, $\theta = T - T_0$, 为温度变化, λ 和 μ 为 Lamé 常数.

不计体力的运动方程为

$$\rho \ddot{u}_i = \sigma_{ij,j}. \quad (12)$$

将本构方程 (11) 代入上式, 结合应力 - 应变关系进行整理, 可得到热弹性运动方程为

$$\rho \ddot{u}_i = (\lambda + \mu) u_{k,ki} + \mu u_{i,kk} - \beta \theta_{,i}. \quad (13)$$

方程 (10), (11) 和 (13) 就构成了基于热质运动的用于描述广义热弹性行为的动力学模型. 相比于已有的用于描述广义热弹性问题的 L-S, G-L 以及 G-N 模型而言, 由于温度控制方程包含了热质运动的空间效应, 对于尺度微观的传热行为能够给出更为准确的描述 [17].

3 热惯性对热弹性行为影响的渐近分析

3.1 模型的渐近求解

考虑无内热源的一维热弹性问题, 由 (10), (11) 和 (13) 式可得各向同性材料广义热弹性动力学控制方程为

$$(1-b)k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_v \left(\tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2l \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} \right) + T_0 \beta \left(\tau \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + l \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \quad (14)$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\sigma_{xx} = (\lambda + \mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \beta \theta. \quad (16)$$

为了便于分析, 引入如下无量纲变量:

$$\begin{aligned} x^* &= aC_L x, & l^* &= aC_L l, \\ t^* &= aC_L^2 t, & \tau^* &= aC_L^2 \tau, & T^* &= \frac{\theta}{T_0}, \\ u^* &= \frac{\rho a C_L^3}{\beta T_0} u, & \sigma_{xx}^* &= \frac{\sigma_{xx}}{\beta T_0}. \end{aligned}$$

将其代入控制方程 (14)—(16) 中进行整理 (为了便于表达去掉无量纲变量右上角的星号)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + 2l \frac{\partial^2 T}{\partial t \partial x} + \frac{\partial T}{\partial t} + \vartheta \left(\tau \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + l \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right), \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (18)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - T, \quad (19)$$

式中, $C_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$, 为弹性波波速, $a = \frac{\rho c_v}{(1-b)k}$, $\vartheta = \frac{\beta^2 T_0}{\rho(\lambda + 2\mu)c_v}$, 为耦合系数, 表征应变率与温度分布间的耦合效应.

对无量纲化控制方程 (17)—(19) 进行 Laplace 变换, 结合齐次初始条件可得

$$\frac{d^2 \bar{T}}{dx^2} = (\tau s^2 + s) \bar{T} + 2ls \frac{d\bar{T}}{dx} + \vartheta \left[(\tau s^2 + s) \frac{d\bar{u}}{dx} + ls \frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} \right], \quad (20)$$

$$\frac{d^2 \bar{u}}{dx^2} = s^2 \bar{u} + \frac{d\bar{T}}{dx}, \quad (21)$$

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{d\bar{u}}{dx} - \bar{T}, \quad (22)$$

式中, 符号 s 为 Laplace 变换因子, 变量上标 “-” 表示对该变量进行 Laplace 变换.

联立方程 (20) 和 (21) 进行消元处理可得

$$\bar{\varphi}_i^{(4)} - (2 + \vartheta)ls \bar{\varphi}_i^{(3)} - [s^2 + (1 + \theta)(\tau s^2 + s)] \bar{\varphi}_i'' + 2ls^3 \bar{\varphi}_i' + (\tau s^2 + s)s^2 \bar{\varphi}_i = 0, \quad (23)$$

式中, $\bar{\varphi}_i (i=1, 2)$ 分别表示 \bar{T} 和 \bar{u} .

引入变量

$$\bar{\varphi}_i^* = \bar{\varphi}_i - \frac{(2 + \vartheta)}{4} ls,$$

将其代入上式进行整理可得

$$\bar{\varphi}_i^{*(4)} + p \bar{\varphi}_i^{*(2)} + q \bar{\varphi}_i^* + r = 0, \quad (24)$$

式中

$$\begin{aligned} p &= -\frac{3}{8}(2 + \vartheta)^2 l^2 s^2 - [s^2 + (1 + \theta)(\tau s^2 + s)], \\ q &= \frac{1}{8}(2 + \vartheta)^3 l^3 s^3 - \frac{1}{2}(2 + \vartheta) \\ &\quad \times ls[s^2 + (1 + \theta)(\tau s^2 + s)] + 2ls^3, \\ r &= -\frac{3}{256}(2 + \vartheta)^4 l^4 s^4 \\ &\quad - \frac{1}{16}(2 + \vartheta)^2 l^2 s^2 [s^2 + (1 + \theta)(\tau s^2 + s)] \\ &\quad + \frac{1}{2}(2 + \vartheta)l^2 s^4 + s^2(\tau s^2 + s). \end{aligned}$$

根据特征长度 l 的表达式可知, 特征长度 l 与热质速度 u_h 存在如下的关系:

$$l = u_h \tau. \quad (25)$$

若热质速度 u_h 的取值使特征长度 l 满足如下的关系:

$$l^2 = 1 - (1 + \vartheta)\tau, \quad (26)$$

则有

$$q = 0. \quad (27)$$

此时方程 (24) 可改写为

$$\bar{\varphi}_i^{*(4)} + p \bar{\varphi}_i^{*(2)} + r = 0. \quad (28)$$

上式的通解可写成如下的形式:

$$\bar{\varphi}_i^* = A_{1i} \exp(-R_1 x) + B_{1i} \exp(-R_2 x) + C_{1i} \exp(-R_3 x) + D_{1i} \exp(-R_4 x), \quad (29)$$

式中, $R_{1,2}$ 和 $R_{3,4}$ 分别为特征方程 $R^4 + pR^2 + r = 0$ 的正负实数根, 系数 A_{1i} , B_{1i} , C_{1i} 和 D_{1i} 则由具体的边界条件确定.

这里考虑边界受热冲击作用的半无限大体, 取自由应力边界, 则边界条件可写成如下的形式:

$$T(0, t) = T_1 H(t), \quad \sigma_{xx} = 0, \quad (30)$$

式中, T_1 为一常数, $H(t)$ 为 Heaviside 函数. 且当时 $x \rightarrow \infty$, T 和 u 分别满足如下的关系:

$$\{u(x, t), T(x, t)\} \rightarrow 0, \quad t > 0. \quad (31)$$

对变量 $\bar{\varphi}_i^*$ 的表达式进行改写

$$\frac{1}{s} \bar{\varphi}_i - \frac{1}{s} \bar{\varphi}_i^* = \frac{2 + \vartheta}{4} l. \quad (32)$$

对上式进行 Laplace 逆变换并结合卷积定理, 可得

$$\int_0^t H(t) (\varphi_i - \varphi_i^*) = \delta(t), \quad (33)$$

式中, $\delta(t)$ 为广义函数.

根据广义函数 $\delta(t)$ 和 Heaviside 函数 $H(t)$ 的性质可有

$$\varphi_i = \varphi_i^*, \quad t > 0. \quad (34)$$

将上式代入通解 (29) 中可得

$$\bar{\varphi}_i = A_{1i} \exp(-R_1 x) + B_{1i} \exp(-R_2 x) + C_{1i} \exp(-R_3 x) + D_{1i} \exp(-R_4 x). \quad (35)$$

结合边界条件 (31) 可知, 若满足 $x \rightarrow \infty$ 时 T 和 u 均有界, 则通解 (35) 的系数应满足如下的关系:

$$C_{1i} \equiv 0, \quad D_{1i} \equiv 0. \quad (36)$$

将上式代入通解 (35) 中可得

$$\bar{T} = A_{11} \exp(-R_1 x) + B_{11} \exp(-R_2 x), \quad (37)$$

$$\bar{u} = A_{12} \exp(-R_1 x) + B_{12} \exp(-R_2 x). \quad (38)$$

将 (37) 和 (38) 式代入控制方程 (17) 或 (18) 中进行整理, 可得

$$A_{12} = -\frac{R_1}{R_1^2 - s^2} A_{11}, \quad B_{12} = -\frac{R_2}{R_2^2 - s^2} B_{11}. \quad (39)$$

对边界条件 (30) 进行 Laplace 变换, 并结合通解 (37) 和 (38) 以及关系式 (39) 进行整理可得

$$A_{11} = \frac{R_1^2 - s^2}{(R_1^2 - R_2^2)s},$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= -\frac{R_2^2 - s^2}{(R_1^2 - R_2^2)s}, \\ A_{12} &= -\frac{R_1}{(R_1^2 - R_2^2)s}, \\ B_{12} &= \frac{R_2}{(R_1^2 - R_2^2)s}. \end{aligned} \quad (40)$$

将上述关系式代入到通解 (37) 和 (38) 以及应力关系式 (16) 中进行整理, 可分别得到变换域内各物理场的表达式为

$$\begin{aligned} \bar{T} &= \frac{R_1^2 - s^2}{(R_1^2 - R_2^2)s} \exp(-R_1 x) \\ &\quad - \frac{R_2^2 - s^2}{(R_1^2 - R_2^2)s} \exp(-R_2 x), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -\frac{R_1}{(R_1^2 - R_2^2)s} \exp(-R_1 x) \\ &\quad + \frac{R_2}{(R_1^2 - R_2^2)s} \exp(-R_2 x), \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{s}{R_1^2 - R_2^2} \exp(-R_1 x) \\ &\quad - \frac{s}{R_1^2 - R_2^2} \exp(-R_2 x). \end{aligned} \quad (43)$$

分别对上述表示式进行 Laplace 逆变换, 即可得到时间域内各物理场的解. 但考虑到这些表达式中所含有的特征方程的根 $R_{1,2}$ 的形式较为复杂, 无法通过直接进行 Laplace 逆变换来获取时间域内的解析解. 为此, 这里依据广义热弹性问题的尺度特性, 借助 Laplace 的极限性质, 可将特征方程的根 $R_{1,2}$ 进行渐近处理^[18]:

$$R_{1,2} = k_{1,2}s + m_{1,2}, \quad (44)$$

式中

$$\begin{aligned} k_{1,2} &= \left(\frac{a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \right)^{1/2}, \\ m_{1,2} &= \frac{b_1 \pm (a_1 b_1 - 2b_2) / \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{4k_{1,2}}, \\ a_1 &= 1 + \tau + \vartheta \tau + \frac{3}{2} l^2, \\ a_2 &= -\frac{3}{16} l^4 + \frac{1}{4} (1 + \tau + \vartheta \tau) l^2 + l^2 + \tau, \\ b_1 &= 1 + \vartheta, \quad b_2 = 1 - \frac{1}{4} (1 + \vartheta) l^2. \end{aligned}$$

将其代入 (41)—(43) 式中进行整理, 即可得到便于 Laplace 逆变换的形式, 通过逆变换可分别得到时间域内各物理场的解析解为

$$T = \exp(-m_1x) \left[\frac{a_1 - 2}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} + \frac{1}{2} + \frac{b_1 - (a_1b_1 - 2b_2)(a_1 - 2)/(a_1^2 - 4a_2)}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_1x) \right] H(t - k_1x) - \exp(-m_2x) \left[\frac{a_1 - 2}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} - \frac{1}{2} + \frac{b_1 - (a_1b_1 - 2b_2)(a_1 - 2)/(a_1^2 - 4a_2)}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_2x) \right] H(t - k_2x), \quad (45)$$

$$u = -\exp(-m_1x) \frac{k_1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_1x)H(t - k_1x) + \exp(-m_2x) \frac{k_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_2x)H(t - k_2x), \quad (46)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{\exp(-m_1x)}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} \left[1 - \frac{a_1b_1 - 2b_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_1x) \right] H(t - k_1x) - \frac{\exp(-m_2x)}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} \left[1 - \frac{a_1b_1 - 2b_2}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}}(t - k_2x) \right] H(t - k_2x). \quad (47)$$

3.2 热惯性对弹性波的影响分析

由上述推导得到的各物理场的解析解 (45)—(47) 可清楚地看到, 当计及热质运动的惯性效应后, 半无限大体在外表面热冲击的作用下, 将产生速度不同的两组波向前传播, 其分别表征的热量传递的热波以及受热膨胀的热弹性波. 根据 Heaviside 函数的性质, 可分别得到这两组波的波速及波前所在的位置

$$v_{1,2} = 1/k_{1,2}, \quad \xi_{1,2} = 1 + t/k_{1,2}. \quad (48)$$

结合 $k_{1,2}$ 的表达式可知, 两组波的波速及波前位置均依赖于特征参数 τ 、 l 和 ϑ , 即热质运动的时间和空间惯性以及耦合效应均对热波及热弹性波的传播产生影响. 其中由 (48) 式可知, 当特征时间 τ 和特征长度 l 均趋于零时可得

$$v_1 \rightarrow 1, \quad v_2 \rightarrow \infty. \quad (49)$$

由 (6) 式可知, 当忽略热质的惯性效应时, 导热方程 (6) 将退化为傅里叶导热方程, 此时热量的传播速度为无限大. 结合上式可知, v_1 表征的是热弹性波的波速, 而 v_2 则表征的是热波的波速. 此外, 值得注意的一点是, 仅当特征时间 τ 趋于零时,

$$v_1 \rightarrow 1 / \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}l^2 + \frac{\sqrt{1+3l^2}}{2} \right), \quad v_2 \rightarrow 1 / \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}l^2 - \frac{\sqrt{1+3l^2}}{2} \right). \quad (50)$$

这表明, 仅当忽略热流加速的惯性效应时, 热量仍以有限速度传播, 这一点与其他广义热弹性理论有着本质的区别 (当忽略热流加速的惯性效应, 即热质运动的时间惯性时, L-S, G-L 以及 G-N 等广

义热弹性理论均退化为经典模型, 此时热量的传播速度为无限大), 并且对于揭示微细尺度的超常传热行为具有重要的意义. 正是由于热质运动的空间效应的存在, 使得对于微细尺度的稳态传热问题中, 基于经典理论 (热量传播速度无限大) 所预测出的导热系数依赖于受热器件结构尺寸的非物理结果得到修正, 并能够更加清楚地揭示热量传热过程中呈现的非傅里叶现象 [10,17].

3.3 热惯性对各物理场分布的影响分析

为便于数值求解分析, 计算所需的无量纲特征参量视为常量, 具体取值如下:

$$\tau = 0.5, \quad \vartheta = 0.02, \quad l = 0.7.$$

图 1 至图 3 分别给出了不同时刻, 半无限大体内部温度场、位移场以及应力场的分布规律. 受到热质流动的惯性作用, 热波、热弹性波均以有限速度向半无限大体内部传播. 在两组波的共同作用下, 各物理场分别建立, 其中在波前尚未到达的区域内, 温度、位移和应力保持初始值不变, 即各物理场呈现阶段性分布. 考虑到热波、热弹性波传播速度不同, 随着两组波波前的先后到达, 温度场和应力场分别呈现出两次阶跃, 而位移场则由于连续性条件的制约始终保持连续. 这一点也可通过 (45)—(47) 式推导得到, 在波前位置 $t_i = k_ix (i = 1, 2)$ 处, 各物理场的阶跃值分别为

$$[u(x, t)]_i = 0, \quad (51)$$

$$[T(x, t)]_i = (-1)^{i+1} \frac{a_1 - 2}{2\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} \exp(-m_ix), \quad (52)$$

$$[\sigma_{xx}(x,t)]_i = (-1)^{i+1} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 - 4a_2}} \exp(-m_i x). \quad (53)$$

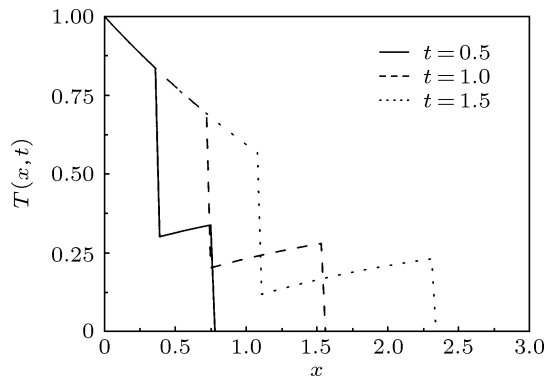


图1 无量纲温度分布

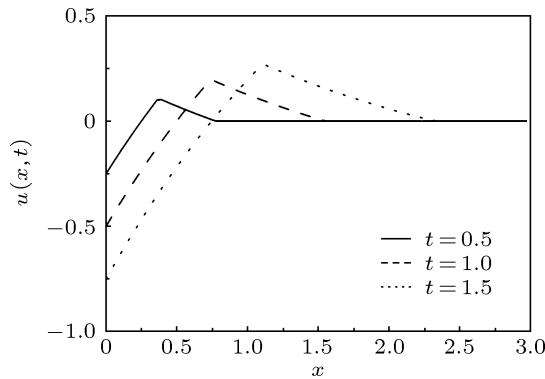


图2 无量纲位移分布

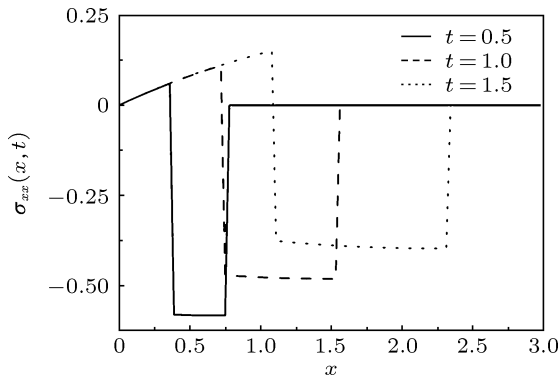


图3 无量纲应力分布

由上述表达式可知, 温度场和应力场的阶跃值依赖于波前所在位置, 且均受到热惯性及耦合效应的影响. 考虑到现有广义热弹性模型均考虑了热流加速的惯性效应, 即热质运动的时间惯性对各物理场的影响已被充分的讨论过, 为了揭示热质运动的空间效应对各物理场的影响, 这里将本文预测结果同其他广义热弹性模型预测结果进行比较. 结合文献 [18, 19] 的分析可知, 对于当前应用较为广泛的 L-S, G-L 以及 G-N 模型而言, 在描述热弹性问题时,

L-S 和 G-N 理论能够给出相近的预测结果, 而 G-L 理论由于本构方程中 $\tau_1 \dot{T}$ 项的存在导致在预测位移及应力分布时得到了反常的结果. 鉴于此, 这里选取与 L-S 理论的预测结果进行对比. 图 4 至图 6 分别给出了相同计算条件下, 温度场、位移场以及应力场在给定时刻的分布规律. 通过对比可以清楚地发现, 由于空间效应的存在, 各物理场的建立时间, 阶跃峰值、阶跃间隔均发生了改变, 特别是对于应力场的影响尤其显著. 这一点也可以通过对比热波及热弹性波传播规律的变化可以得出, 由 (48) 式可知, 当特征长度 l 取值为零时即可得到 L-S 理论下两组波的波速和波前位置, 通过对比可有如下关系:

$$v_1 < v_1^*, \quad v_2 > v_2^*, \quad \xi_1 > \xi_1^*, \quad \xi_2 < \xi_2^*, \quad (54)$$

式中, 上标 “*” 表示 L-S 理论下的相关参量.

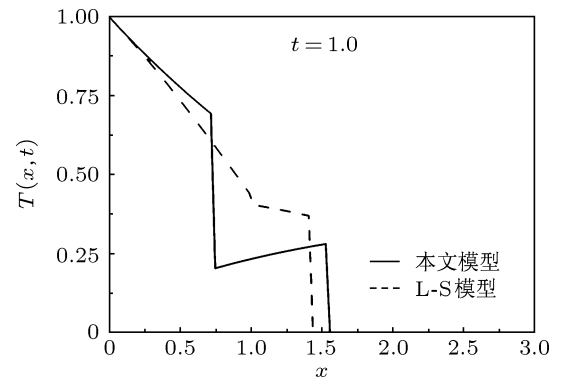


图4 热惯性对温度分布的影响

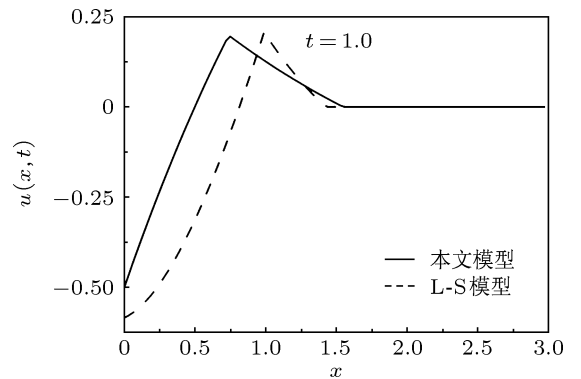


图5 热惯性对位移分布的影响

由上述关系可知, 相比于 L-S 理论, 当计及热质运动的空间惯性时, 热弹性波的波速变小, 而热波的波速则增大, 这使得热弹性波及热波的波前位置分别提前和推后, 进而导致各物理场的建立时间和阶跃间隔发生了变化. 此外, 通过对比温度场分布可知, 由于热波速度增大, 相同时间间隔内热量在弹性体内部的传递区域增大, 受其影响, 临近表

面区域处温度梯度减小,进而导致受周围挤压作用产生的应力幅值减小,形成如图6所示的分布规律.

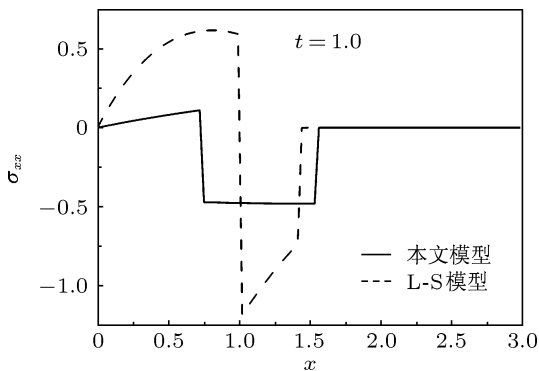


图6 热惯性对应力分布的影响

4 结论

本文基于热质运动的概念,构建了计及热流运动惯性效应的广义热弹性动力学模型,并通过对半无限大体外表面受热冲击作用的一维热弹性问题的渐近求解,揭示了热流运动的惯性效应对热弹性

行为的影响:

1. 受到热流运动的惯性效应,热量将以有限速度传播,受其影响,各物理场均呈现阶段性分布,在热波、热弹性波波前到达的区域内,各物理场建立,而在波前尚未到达的区域内,各物理场均保持初始值不变.此外,由于热波、热弹性波波速不同,导致温度场和应力场分别呈现两次阶跃现象.

2. 当忽略热流加速的时间惯性时,由于空间效应的存在,热量仍以有限速度传播,对于尺度微观的稳态导热问题,可以很好的解决基于经典理论得到的传热系数依赖于结构尺寸的反常问题,并能够准确地预测出热量传递过程中呈现的非傅里叶现象.

3. 热流运动的空间惯性对于热波、热弹性的传播以及各物理的分布均产生影响.热流运动的空间惯性在改变热波、热弹性波的波速、波前位置,各物理场的建立时间、阶跃峰值以及阶跃间隔的同时,对热冲击的作用效果也起到了进一步的抑制作用.

- [1] Guo Z Y 2000 *Advances in Mechanics* **30** 1(in Chinese) [过增元 2000 力学进展 **30** 1]
- [2] Wang H D, Ma W G, Guo Z Y, Zhang Y, Wang W 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040701
- [3] Wang H D, Liu J H, Guo Z Y, Takahashi K 2012 *Chin. Sci. Bull.* **57** 1794 (in Chinese) [王海东, 刘锦辉, 过增元, 高桥厚史 2012 科学通报 **57** 1794]
- [4] Tian X G, Shen Y P 2012 *Advances in Mechanics* **42** 1 (in Chinese) [田晓耕, 沈亚鹏 2012 力学进展 **42** 1]
- [5] Lord H W, Shulman Y A 1967 *J. Mech. Phys. Solids* **15** 299
- [6] Green A E, Lindsay K A 1972 *J. Elasticity* **2** 1
- [7] Green A E, Naghdi P M 1993 *J. Elasticity* **31** 189
- [8] Xu H Y, Qi H T, Jiang X Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 014401
- [9] Narayan O, Ramaswamy S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 200601
- [10] Guo Z Y, Cao B Y 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4273 (in Chinese) [过增元, 曹炳阳 2008 物理学报 **57** 4273]
- [11] Dong Y, Cao B Y, Guo Z Y *J. Appl. Phys.* **110** 063504
- [12] Guo Z Y, Hou Q W 2010 *J. Heat and Transfer* **132** 072403
- [13] Guo Z Y, Cao B Y, Zhu H Y, Zhang Q G 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3306 (in Chinese) [过增元, 曹炳阳, 朱宏晔, 张清光 2007 物理学报 **56** 3306]
- [14] Cao B Y, Guo Z Y 2007 *J. Appl. Phys.* **102** 053503
- [15] Cattaneo C 1958 *Comptes Rendus* **247** 431
- [16] Vermptte P 1958 *Comptes Rendus* **246** 3154
- [17] Wang Y Z, Song X N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 234601 (in Chinese) [王颖泽, 宋新南 2012 物理学报 **61** 234601]
- [18] Wang Y Z, Zhang X B, Song X N 2012 *Acta Mechanica* **223** 735
- [19] Bagri A, Eslami M R 2007 *Int. J. Mech. Sci.* **49** 1325

Asymptotic analysis for effect of thermal inertia on thermal behaviors*

Wang Ying-Ze[†] Song Xin-Nan Liu Dong

(Department of Energy and Power Engineering, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 19 June 2013; revised manuscript received 26 July 2013)

Abstract

The inertia effect induced by the motion of heat flow will have a significant impact on the heat transfer, when the heat pulse duration or the device structure has micro-scale characteristics. Based on the thermomass theory, the thermal wave equation is introduced to describe the motion of thermomass, and the generalized thermoelastic dynamic model involved in the thermal inertia is established by combining the constitutive relation of isotropic material. By taking into account the micro-scale characteristics for the transient heat transfer, the one-dimensional problem for the semi-infinite solid with the boundary subject to thermal impact is investigated by an analytic method, where the asymptotic solutions for thermoelastic response are obtained. With these solutions, the propagation of the thermal wave and thermal elastic wave and the distribution of the temperature, displacement and stresses are studied. By comparison with the same predictions of the L-S generalized thermoelasticity, the effect of thermal inertia on the thermal behaviors is revealed. The results show that the spatial thermal inertia induced by the motion of heat flux has an impact on the thermal behaviors, except for the temporal thermal inertia. All the velocities and wavefront locations of thermal wave and thermal elastic wave, and the time of each physical field begin to establish, the peak values of jumps and the intervals of two jumps are influenced by the spatial thermal inertia.

Keywords: thermal inertia, thermomass motion, generalized thermoelastic dynamic model, asymptotic analysis

PACS: 46.25.Cc, 46.25.Hf, 44.05.+e

DOI: 10.7498/aps.62.214601

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11102073), the National Science Foundation for Post-doctoral Scientists of China (Grant No. 2012M511207), the Research Foundation of Advanced Talents of Jiangsu University, China (Grant No. 10JDG055), and the Priority Academic Program Development of Jiangsu Higher Education Institutions, China

[†] Corresponding author. E-mail: wyz3701320@ujs.edu.cn