

时滞复 Lorenz 混沌系统特性及其自时滞同步*

张芳芳[†] 刘树堂 余卫勇

(山东大学控制科学与工程学院, 济南 250061)

(2013年5月13日收到; 2013年8月2日收到修改稿)

自时滞同步是指保持混沌系统结构和参数不变的情况下, 使时滞系统和原系统同步, 从而避免了现实中因为时滞而产生的各种问题. 本文以时滞复 Lorenz 系统为例, 研究其动态特性及时滞因数的影响, 并提出了一种非线性反馈控制器实现了复 Lorenz 系统的自时滞混沌同步. 数值仿真结果验证了该控制器的有效性. 该控制器只对部分状态进行控制, 实现了所有状态的同步, 原理简单, 易于工程实现.

关键词: 时滞系统, 复混沌系统, 自时滞同步, Lyapunov 指数

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.220505

1 引言

在自然科学和工程技术的研究中, 许多事物的变化不仅依赖于当时的状态, 还依赖于过去的状态, 系统的这种特性称为时滞, 具有时滞的系统称为时滞系统. 事实上, 除理想情形下, 由于机械、摩擦等实际因素的限制, 现实系统总存在时滞现象, 如生物、化学、经济、机械、物理和工程学等, 并且时滞是影响一个系统动态特性的重要因素. 因此关于时滞系统的研究得到了数学、物理、系统与控制等多个领域学者的广泛关注^[1-2].

如果对时滞系统进行控制从而与期望系统同步, 那么就避免了现实中因为时滞而产生的各种问题, 即在保持系统结构和参数不变的情况下, 使时滞系统和原系统同步, 称为自时滞同步. 它不同于延迟同步^[3-6], 延迟同步是指一个系统状态与另一个系统延迟一段时间的状态同步, 两个系统都不是时滞系统; 而自时滞同步是指时滞系统的状态与原系统的状态实时同步. 时滞系统具有无穷维状态空间, 它与原系统的动力学行为有很大差别. 如果引入的时滞为零, 自时滞同步退化为自同步, 因此自时滞同步包含了自同步, 它是自同步的扩展, 进一步拓宽了研究同步问题的视野, 所以研究时滞系统

的自时滞同步问题具有非常重要的现实意义和理论价值. 特别是在混沌保密通讯系统中, 由于多维超混沌系统结构复杂, 实现较难, 不适合实际工程应用. 时滞混沌系统的出现弥补了多维超混沌系统的不足. 时滞混沌系统具有多个正的 Lyapunov 指数, 结构简单却能产生具有极高随机性和不可预测性的时间系列, 从而在同步时克服高维非时滞超混沌系统在结构上庞大而复杂的缺点, 同时又能提高保密性能.

自从 Fowler 等^[7]提出了复 Lorenz 方程, 复系统在物理学的众多分支领域发挥了重要作用, 尤其是混沌通讯系统, 复变量增加了所传输信息的内容和安全性^[8]. 因此, 近年来复混沌系统的特性及其同步研究引起人们的极大关注, 如分数阶复 Lorenz 系统^[9]、分数阶复 Chen 系统的特性^[10]、相位同步和反相位同步^[11]、模-相位同步^[12](module-phase synchronization)、完全同步(CS)^[13]、反同步^[14,15]、延迟同步(LS)^[5,6]、投影同步(PS)和修正投影同步(MPS)^[16]、全状态组合投影同步(FSHPS)^[17]、修正函数投影同步^[18,19]、组合修正函数投影同步(HMFPS)^[20]、修正比例相位同步(MPPS)^[21]、复比例因子修正投影同步(CMPS)^[22]等等, 但上述复系统的研究中均未涉及到时滞. 时滞是实际复混沌系统不可避免地存在的一个因素, 因此, 研究复混

* 国家自然科学基金(批准号: 61273088, 10971120, 61001099)和山东省自然科学基金(批准号: ZR2010FM010)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zhff4u@163.com

沌系统时,考虑时滞更符合实际的需要,并能更好地在实际中得到应用.事实上,时滞复混沌系统具有多个正的 Lyapunov 指数,产生的混沌复信号比高维超混沌系统产生的混沌信号更加复杂且难以预测,而且复状态变量本身也提高了通讯的安全水平 [7,21],因此时滞复混沌系统应用在混沌保密通信中可以更好地提高保密性能.

在物理学中最常见的是复 Lorenz 系统,它已经被用来描述失谐的激光、液体的热对流现象 [23-25] 和磁盘发电机 [26] 等.本文即以复 Lorenz 系统为例,研究其时滞系统动态特性及时滞因数的影响,并设计了一种非线性反馈控制器实现了其自时滞混沌同步.

2 复 Lorenz 混沌系统和时滞复 Lorenz 混沌系统

2.1 复 Lorenz 混沌系统特性

复 Lorenz 系统方程为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a_1(y_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = a_2y_1 - y_1y_3 - y_2 \\ \dot{y}_3 = -a_3y_3 + (1/2)(\bar{y}_1y_2 + y_1\bar{y}_2) \end{cases}, \quad (1)$$

其中 $y_1 = u_1 + ju_2$, $y_2 = u_3 + ju_4$ 是复变量, $y_3 = u_5$ 是实变量; 上划线 $\bar{y}_1(\bar{y}_2)$ 表示 $y_1(y_2)$ 的共轭, $(a_1, a_2, a_3)^T$ 是实参数向量.

分离系统 (1) 各个变量的实部和虚部,则有

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = a_1(u_3 - u_1) \\ \dot{u}_2 = a_1(u_4 - u_2) \\ \dot{u}_3 = a_2u_1 - u_1u_5 - u_3 \\ \dot{u}_4 = a_2u_2 - u_2u_5 - u_4 \\ \dot{u}_5 = -a_3u_5 + (u_1u_3 + u_2u_4) \end{cases}. \quad (2)$$

系统 (2) 具有下面的基本性质.

2.1.1 耗散性

系统 (2) 的散度表示为 $\nabla F = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial u_i} = -(2a_1 + 2 + a_3)$. 当 $2a_1 + 2 + a_3 > 0$ 时,系统 (2) 是耗散的,并以指数形式 $\frac{dF}{dt} = e^{-(2a_1+2+a_3)t}$ 收敛.事实上,初始体积 $V(0)$ 的体积元在时刻 t 时体积元变为 $V(t) = V(0)e^{-(2a_1+2+a_3)t}$. 即当 $t \rightarrow \infty$ 时,包含系统 (2) 轨线的每个小体积元都以指数速率 $e^{-(2a_1+2+a_3)t}$ 收敛到零,系统 (2) 的所有轨线最终

会被限制在一个体积为零的极限子集上,其运动将被固定在一个吸引子上,这说明了系统 (2) 存在吸引子.

2.1.2 混沌特性

Lyapunov 指数,即两个相近轨道的平均指数发散率,用来度量系统运动对初始条件敏感程度的量化指标.当 $a_1 = 35, a_2 = 55, a_3 = 8/3$, 初始值为 $u(0) = (-1, -2, -3, -4, 1)^T$ 时,根据 Lyapunov 指数的定义 [27]:

$$LE_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta u_i(u_0, t)\|}{\|\delta u_i(u_0, 0)\|}, \quad (3)$$

(实际计算时,取正交矢量集来描述各方向收缩或扩张程度的不同) 可得系统 Lyapunov 指数为 $LE_1 = 1.1041, LE_2 = 0.06815 \approx 0, LE_3 = -0.0720 \approx 0, LE_4 = -0.6473, LE_5 = -1.9854$. 系统 (2) 存在正的 Lyapunov 指数,故系统 (2) 是混沌的,其不同投影面和投影空间的混沌吸引子如图 1 所示.

2.1.3 平衡点及其稳定性

系统 (2) 的线性化方程为

$$\begin{pmatrix} d\dot{u}_1 \\ d\dot{u}_2 \\ d\dot{u}_3 \\ d\dot{u}_4 \\ d\dot{u}_5 \end{pmatrix} = J_{5 \times 5}(u_i; a_1, a_2, a_3) \begin{pmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \\ du_4 \\ du_5 \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, \quad (4)$$

其中 $J_{5 \times 5}(u_i; a_1, a_2, a_3)$ 是系统 (2) 的 Jacobian 矩阵,

$$J_{5 \times 5} = \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & 0 & a_1 & 0 \\ a_2 - u_5 & 0 & -1 & 0 & -u_1 \\ 0 & a_2 - u_5 & 0 & -1 & -u_2 \\ u_3 & u_4 & u_1 & u_2 & -a_3 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

取 $\dot{u}_i = 0, i = 1, 2, \dots, 5$, 则可得到系统 (2) 的不动点. 特别地取 $u_1 = u_2$, 则有

$$\begin{aligned} E_1 &= (0, 0, 0, 0, 0), \\ E_{2,3} &= \left(\pm \sqrt{\frac{a_3(a_2 - 1)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a_3(a_2 - 1)}{2}}, \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\frac{a_3(a_2 - 1)}{2}}, \pm \sqrt{\frac{a_3(a_2 - 1)}{2}}, a_2 - 1 \right). \end{aligned}$$

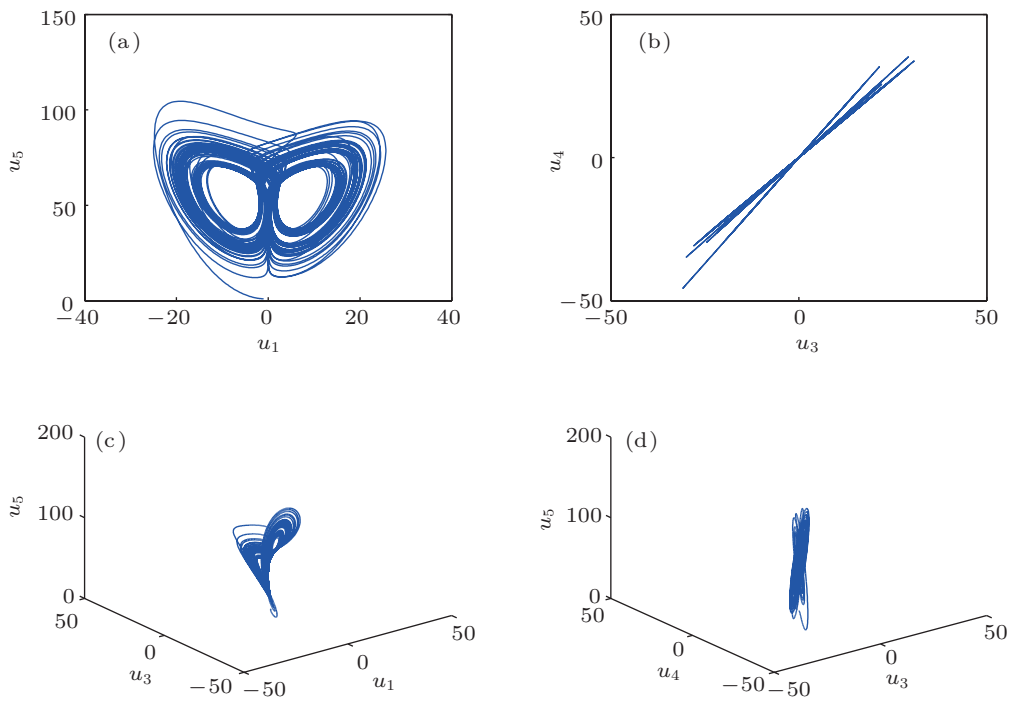


图1 原系统不同投影面和投影空间示意图 (a) $u_1 - u_5$; (b) $u_3 - u_4$; (c) $u_1 - u_3 - u_5$; (d) $u_3 - u_4 - u_5$

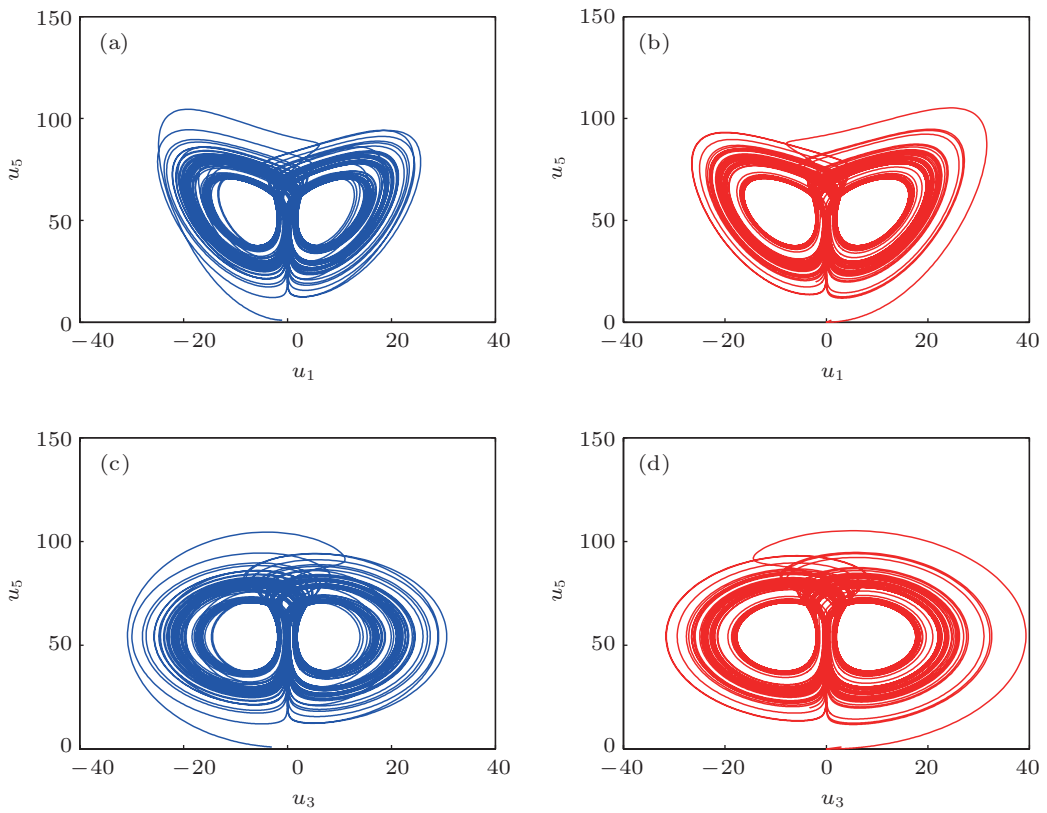


图2 原系统 u_5 轴对称性示意图 (a) 和 (c) 初始点为 $(-1, -2, -3, -4, 1)^T$, (b) 和 (d) 的初始点为 $(1, 2, 3, 4, 1)^T$

线性化系统 (4) 在 E_1 处的特征值为

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{-(a_1 + 1) + \sqrt{(a_1 - 1)^2 + 4a_1a_2}}{2},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{-(a_1 + 1) - \sqrt{(a_1 - 1)^2 + 4a_1a_2}}{2}$$

和 $\lambda_5 = -a_3$. 由线性系统理论知, 当且仅当系统在不动点处的特征值都具有负实部时, 不动点是稳定的. 因此当 $a_1 > -1, a_3 > 0$ 时, 不动点 E_1 是稳定的, 否则它是不稳定的. 不动点 $E_{2,3}$ 也可以类似地讨论, 这里不再赘述.

2.1.4 对称性

对系统 (2) 引入下列变换: $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \rightarrow (-u_1, -u_2, -u_3, -u_4, u_5)$, 而系统 (2) 保持不变, 则系统 (2) 关于 u_5 轴呈现对称性, 而且这种对称性对所有的参数 a_1, a_2 和 a_3 均成立, 如图 2 所示.

2.2 时滞复 Lorenz 混沌系统特性

根据时滞实 Lorenz 系统 (第三个实变量存在时滞)^[3], 考虑如下时滞复 Lorenz 系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = a_2x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = -a_3x_3(t - r) + (1/2)(\bar{x}_1x_2 + x_1\bar{x}_2) \end{cases}, \quad (6)$$

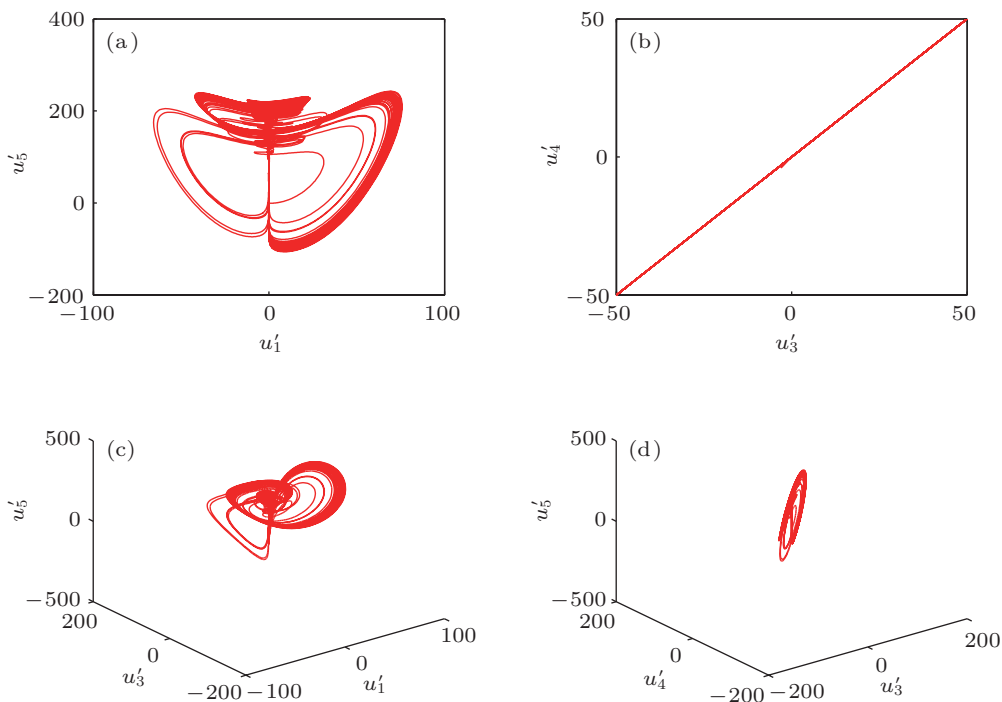


图 3 时滞 Lorenz 复系统不同投影面和不同投影空间示意图 ($r = 1s$) (a) $u_1 - u_5$; (b) $u_3 - u_4$; (c) $u_1 - u_3 - u_5$; (d) $u_3 - u_4 - u_5$

其中 $r = r(t) (0 \leq r(t) \leq r_{1m})$ 为时滞因数, 它是有界的时变函数, $x_1 = u'_1 + ju'_2$ 和 $x_2 = u'_3 + ju'_4$ 是系统复状态变量, $x_3 = u'_5$ 是实状态变量. 此时系统 (6) 为一个单时滞复 Lorenz 系统.

2.2.1 混沌特性

分离系统 (6) 各个变量的实部和虚部, 则有

$$\begin{cases} \dot{u}'_1 = a_1(u'_3 - u'_1) \\ \dot{u}'_2 = a_1(u'_4 - u'_2) \\ \dot{u}'_3 = a_2u'_1 - u'_1u'_5 - u'_3 \\ \dot{u}'_4 = a_2u'_2 - u'_2u'_5 - u'_4 \\ \dot{u}'_5 = -a_3u'_5(t - r) + (u'_1u'_3 + u'_2u'_4) \end{cases}, \quad (7)$$

因此, 原系统 (2) 的耗散性和对称性对于系统 (7) 仍然成立, 但是时滞系统的混沌特性与原系统有了较大差异. 它们结构相同, 但是时滞系统产生了具有极高随机性和不可预测性的时间系列, 其不同时滞因数的各投影面和投影空间的混沌吸引子如图 3 和图 4 所示.

2.2.2 初值敏感性

令 $r = 0.1s$, 选取两个非常相近的初始值, 如 $(-1, -2, -3, -4, 1)^T$ 和 $(-1.001, -2.001, -3, -4, 1)$, 其状态演化如图 5 所示, 可看出该时滞系统对状态初值有很大的敏感性.

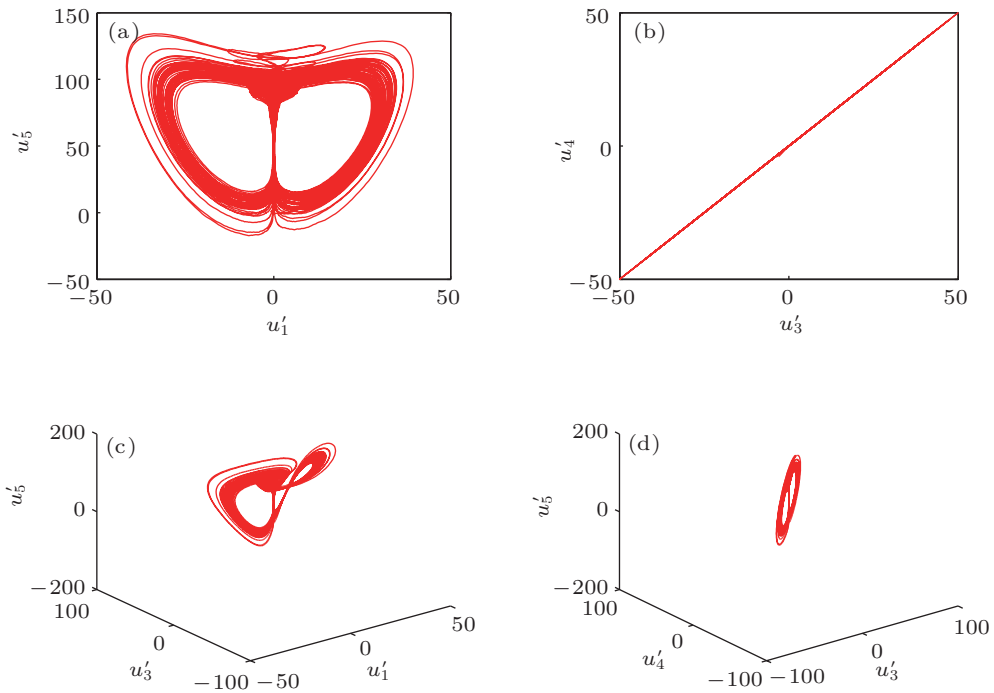


图4 时滞 Lorenz 复系统不同投影面和不同投影空间示意图 ($r = 2(\cos t + \text{rand}(t))s$) (a) $u'_1 - u'_5$; (b) $u'_3 - u'_4$; (c) $u'_1 - u'_3 - u'_5$; (d) $u'_3 - u'_4 - u'_5$

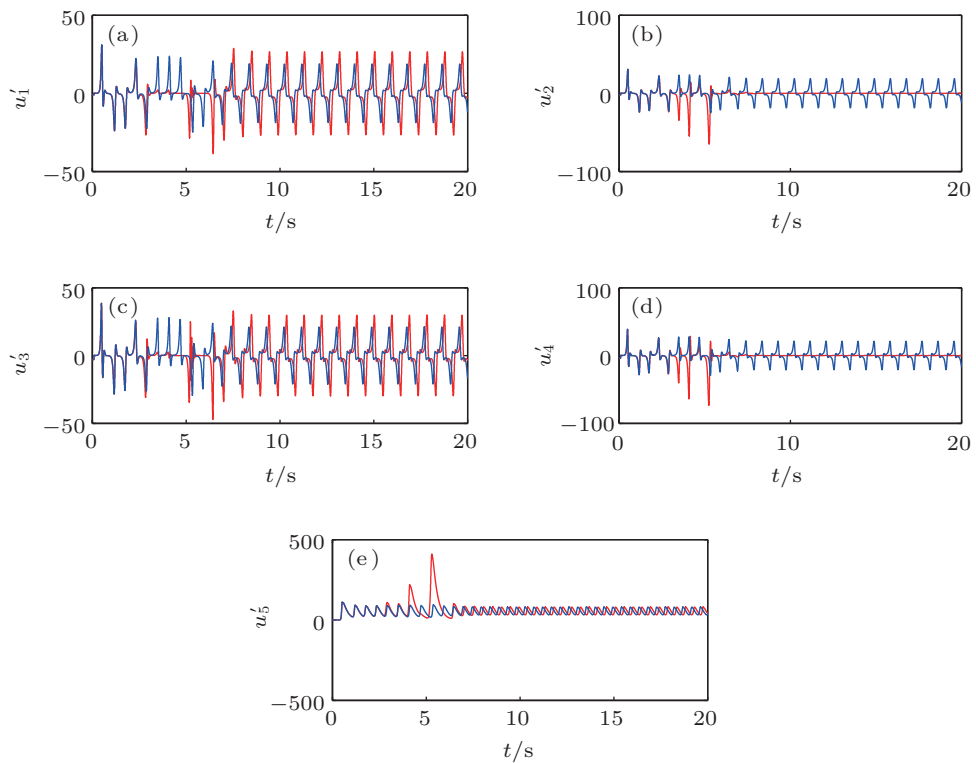


图5 时滞复 Lorenz 系统的初值敏感性 ($r = 0.1 \text{ s}$)

2.2.3 Lyapunov 指数计算

根据 Lyapunov 指数计算方法 [27], 得到单时滞复 Lorenz 系统的 Lyapunov 指数随时滞因数 r 变化

的示意图如图 6 所示. 由于计算的复杂性和计算机的性能限制, 只绘制了 $r \in [0, 1.5]$ 区间的变化图. 表 1 给出了 Lyapunov 指数的部分数值. 显然, 单时滞

复 Lorenz 系统的特性及正 Lyapunov 指数的个数与时滞因数 r 有关, 也展现了时滞系统因为时滞因数

而产生的随机性和不可预测性.

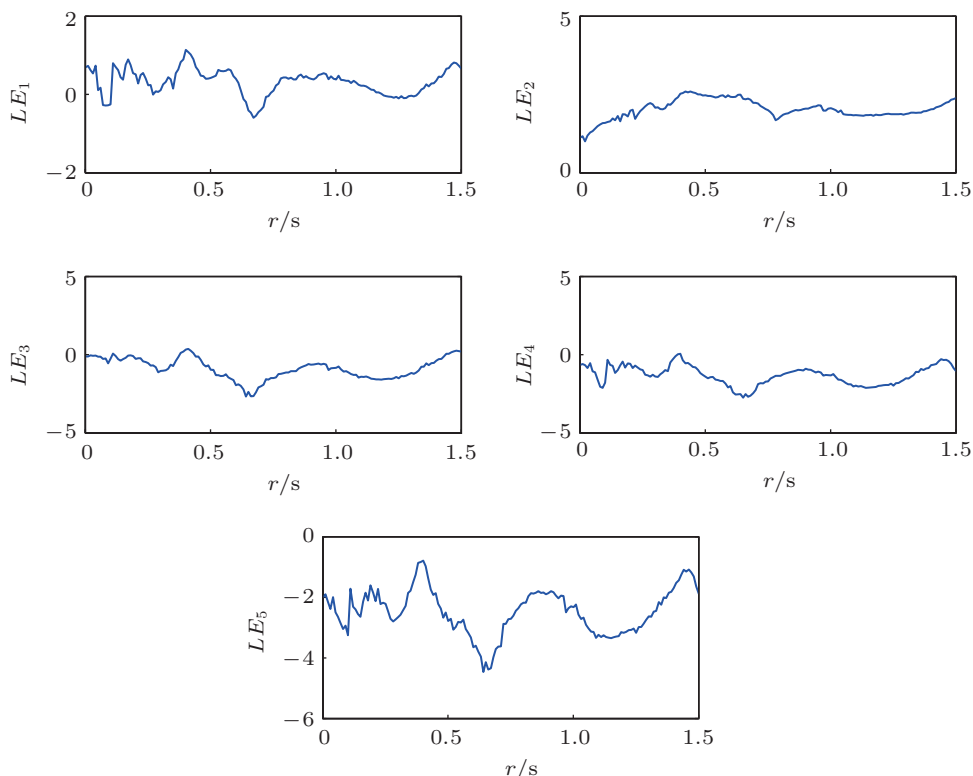


图 6 时滞复 Lorenz 系统 Lyapunov 指数示意图

表 1 时滞复 Lorenz 系统五个 Lyapunov 指数的部分数值

变量	LE_1	LE_2	LE_3	LE_4	LE_5
$r = 0.01 \text{ s}$	1.1642	0.7284	-0.1076	-0.5910	-1.8997
$r = 0.07 \text{ s}$	1.4800	-0.2727	-0.2720	-1.5843	-2.8450
$r = 0.11 \text{ s}$	1.6150	0.7961	0.0748	-0.3318	-1.7161
$r = 0.6 \text{ s}$	2.4219	0.4002	-1.9489	-2.0073	-3.6471
$r = 1 \text{ s}$	2.0584	0.3801	-0.8438	-1.3242	-2.3287
$r = 1.2 \text{ s}$	1.8407	-0.0438	-1.5486	-1.9777	-3.1741
$r = 1.5 \text{ s}$	2.3849	0.6509	0.1997	-1.0626	-1.8957

3 自时滞同步控制器

本节首先给出复混沌系统自时滞同步的定义和相关引理, 再针对复 Lorenz 混沌系统设计自时滞同步控制器.

定义1 考虑如下的 n 维复混沌系统,

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = f(\mathbf{y}(t)) \leftarrow \text{original system,}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t-r))$$

$$+ v(\mathbf{x}(t-r), \mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \leftarrow \text{time-delay system}$$

其中

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}^T,$$

$$\mathbf{y}(t) = \{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}^T$$

是复状态向量, $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}^T$ ($r_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$) 是时滞因数向量. 当存在控制器 v 使得

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)\|^2 \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} (\|\mathbf{x}(t)^r - \mathbf{y}(t)^r\|^2 + \|\mathbf{x}(t)^i - \mathbf{y}(t)^i\|^2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

成立, 我们称 $\mathbf{x}(t)$ 和 $\mathbf{y}(t)$ 为自时滞同步 (self time-delay synchronization, 简称 STDS).

注1 若 $\mathbf{r} = 0$, 则 STDS 等价于 CS. 因此, STDS 包含 CS 并扩展了 CS.

引理1^[28] 对于线性连续时滞系统,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{z}(t-r) (r \geq 0), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{z}(t) \in R^n$, \mathbf{A}, \mathbf{B} 为 $n \times n$ 常值矩阵. 如果存在

正定矩阵 P, M 使得

$$\begin{pmatrix} A^T P + P A + M & \frac{P B + B^T P}{2} \\ \frac{P B + B^T P}{2} & -M \end{pmatrix} \quad (9)$$

为负定矩阵, 则 $z(t) = 0$ 是系统 (8) 的全局指数渐近稳定平衡点.

定理1 考虑原系统 (2) 和单时滞复 Lorenz 系统 (7), 对系统 (7) 施加如下控制器

$$\begin{cases} v_1 = k_1 e_1 \\ v_2 = k_2 e_2 \\ v_3 = u'_1 u'_5 - u_1 u_5 + k_3 e_3 \\ v_4 = u'_2 u'_5 - u_2 u_5 + k_4 e_4 \\ v_5 = -(u'_1 u'_3 + u'_2 u'_4 - u_1 u_3 - u_2 u_4) + k_5 e_5 \end{cases}, \quad (10)$$

其中 $k_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, 2, \dots, 5$, 且 $k_1 = k_2 = 0$, 那么存在 k_3, k_4 和 k_5 使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^5 (u'_i - u_i)^2 = 0, \quad (11)$$

即复 Lorenz 系统 (2) 和单时滞复 Lorenz 系统 (7) 实现自时滞同步.

证明 令 $e_i(t) = u'_i(t) - u_i(t), e_i(t-r) = u'_i(t-r) - u_i(t), i = 1, 2, \dots, 5$, 可得系统 (2) 和系统 (7) 的时滞误差系统

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a_1(e_3 - e_1) \\ \dot{e}_2 = a_1(e_4 - e_2) \\ \dot{e}_3 = a_2 e_1 + (k_3 - 1)e_3 \\ \dot{e}_4 = a_2 e_2 + (k_4 - 1)e_4 \end{cases}, \quad (12)$$

$$\dot{e}_5 = -a_3 e_5(t-r) + k_5 e_5. \quad (13)$$

误差系统 (12) 是线性定常系统, 选取合适的 k_3 和 k_4 使其所有特征值具有负实部, 则误差系统 (12) 指数渐近稳定. 误差系统 (13) 是线性连续时滞系统 (8) 中 $A = k_5, B = -a_3$ 的一种特殊情况. 根据引理 1, 存在正数 p, m 使得

$$\begin{pmatrix} 2k_5 p + m & -p a_3 \\ -p a_3 & -m \end{pmatrix} \quad (14)$$

为负定矩阵. 故 $e_5 = 0$ 是系统 (13) 的全局指数渐近稳定平衡点. 综上分析, 误差系统 (12) 和 (13) 在零点是全局指数渐近稳定的, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^5 e_i(t)^2 = 0, \quad (15)$$

则定理 1 得证.

4 仿真实验

以原 Lorenz 系统 (2) 作为驱动系统, 单时滞复 Lorenz 系统 (7) 为响应系统, 系统初值分别为 $u(0) = (1, 2, 3, 4, 1)$ 和 $u'(0) = (-1, -2, -3, -4, 1)^T, r = 0.1$ s. 采用 (10) 式所示的控制器, 其中 $k_3 = k_4 = k_5 = -100$, 则可得误差系统 (12) 的特征值分别为 $\lambda_1 = \lambda_2 = -13.1$ 和 $\lambda_3 = \lambda_4 = -122.9$; 对于误差系统 (13), 存在正数 p, m 使得

$$-200p + m > 0, \quad 200pm - m^2 - \frac{64}{9}p^2 < 0, \quad (16)$$

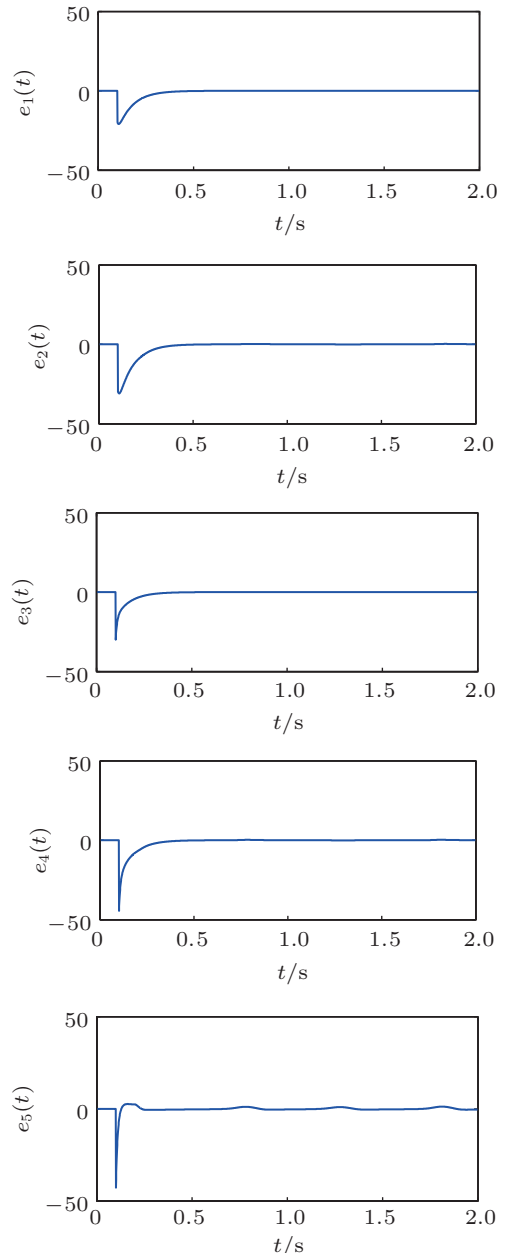


图 7 自时滞同步系统状态误差图

定理 1 成立. 自时滞同步系统状态误差图如图 7 所示, t 表示时间, 系统仿真结果与理论分析一致, 验证了该控制器的有效性. 该控制器收敛快, 仅涉及当前的系统状态, 不受时滞因数的影响. 比起其他类型的同步控制器^[3-6,11-22], 它只对部分状态分量进行控制, 就实现了所有状态的同步, 更易于工程实现.

5 结论

本文以复 Lorenz 系统为例, 研究其动态特性及其时滞系统的混沌特性, 并提出了一种非线性反馈控制器实现了复 Lorenz 系统的自时滞混沌同步.

该控制器只包含当前的系统状态, 不涉及时滞因数, 且只对部分状态进行控制, 原理简单, 易于工程实现.

自时滞同步使时滞系统和原系统同步, 能够避免现实中因为时滞而产生的各种问题, 它是自同步的扩展, 进一步拓宽了研究同步问题的视野, 具有重要的现实意义和理论价值. 同时, 时滞复混沌系统应用在混沌保密通信中也可以更好地提高保密性能.

感谢埃及 Sohag 大学科学系数学学院 Emad E. Mahmoud 博士给予的启发和支持.

-
- [1] Liang Y, Wang X Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 018901 (in Chinese) [梁义, 王兴元 2013 物理学报 **62** 018901]
- [2] Ouyang C, Lin W T, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 060201 (in Chinese) [欧阳成, 林万涛, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 060201]
- [3] Li C D, Liao X F 2004 *Phys. Lett. A* **329** 301
- [4] Jia F L, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3101 (in Chinese) [贾飞蕾, 徐伟 2007 物理学报 **56** 3101]
- [5] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2012 *Nonlinear Dyn.* **67** 1613
- [6] Wang X Y, Zhang H 2013 *Chin. Phys. B* **22** 048902
- [7] Fowler A C, Gibbon J D 1982 *Physica D* **4** 139
- [8] Mahmoud G M, Bountis T, Mahmoud E E 2007 *Internat. J. Bifur. Chaos* **17** 4295
- [9] Luo C, Wang X Y 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 241
- [10] Luo C, Wang X Y 2013 *Int. J. Mod. Phys. C* **24** 1350025
- [11] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2010 *Nonlinear Dyn.* **61** 141
- [12] Nian F Z, Wang X Y, Niu Y J, Lin D 2010 *Appl. Math. Comput.* **217** 2481
- [13] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2010 *Nonlinear Dyn.* **62** 875
- [14] Liu S T, Liu P 2011 *Nonlinear Anal. Real* **12** 3046
- [15] Liu P, Liu S T 2011 *Phys. Scr.* **83** 065006
- [16] Mahmoud G M, Mahmoud E E 2010 *Math. Comput. Simulat.* **80** 2286
- [17] Liu P, Liu S 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 585
- [18] Zhu H 2011 *ICCRD: 3rd Int. Conf. on Computer Research Development Shanghai, China, March 11-13, 2011* p451
- [19] Liu P, Liu S T, Li X 2012 *Phys. Scr.* **85** 035005
- [20] Luo C, Wang X Y 2013 *J. Franklin Inst.* <http://dx.doi.org/10.1016/j.jfranklin.2013.06.011>
- [21] Mahmoud E E 2013 *Math. Comput. Simulat.* **89** 69
- [22] Zhang F F, Liu S T, Yu W Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 120505
- [23] Gibbon J D, McGuinness M J 1982 *Physica D* **5** 108
- [24] Ning C Z, Haken H 1990 *Phys. Rev. A* **41** 3826
- [25] Rauh A, Hannibal L, Abraham N 1996 *Physica D* **99** 45
- [26] Richter H 2001 *Chaos Soliton. Fract.* **12** 2375
- [27] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [28] Hale J 1977 *Theory of Functional Differential Equations* (Vol. 3) (Berlin: Springer-Verlag) pp1-244

Characteristics of time-delay complex Lorenz chaotic system and its self-synchronization of time delay*

Zhang Fang-Fang[†] Liu Shu-Tang Yu Wei-Yong

(College of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

(Received 13 May 2013; revised manuscript received 2 August 2013)

Abstract

Self-synchronization of time delay implies that the synchronization between the time-delay system and the original system keeps the structure and parameters of systems unchanged, thus these various problems produced by time-delay in practice are avoided. Taking a time-delay complex Lorenz system for example, we investigate its dynamic characteristics and the influence of time lag factor. A nonlinear feedback controller is designed to realize the self-synchronization of time delay of the complex Lorenz system. Numerical simulations verify the effectiveness of the presented controller. The controller adopts some states to realize the synchronization of all states. It is simple in principle and easy to implement in engineering.

Keywords: time-delay system, complex chaotic systems, self-synchronization of time delay, Lyapunov exponent

PACS: 05.45.Gg, 05.45.Pq, 05.45.Xt

DOI: 10.7498/aps.62.220505

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61273088, 10971120, 61001099) and the Nature Science Foundation of Shandong Province, China (Grant No. ZR2010FM010).

[†] Corresponding author. E-mail: zhff4u@163.com