时间分数阶 Boussinesq 方程的李对称分析*

于兴江† 刘希强

(聊城大学数学科学学院, 聊城 252059)

(2013 年 6 月 27 日收到; 2013 年 9 月 1 日收到修改稿)

本文利用李群分析方法研究了时间分数阶 Boussinesq 方程, 得到了该方程的李点对称, 并把该方程约化为 Erdelyi-Kobe 分数阶常微分方程. 本文的行文过程也说明了李群分析方法对于约化分数阶非线性发展方程是有效的.

关键词: 李对称分析方法, 时间分数阶 Boussinesq 方程, 广义 Riemann-Liouville 导数, Erdelyi-Kober 微分算子

PACS: 02.30.Jr, 02.20.sv, 02.20.Hj **DOI:** 10.7498/aps.62.230201

1 引言

对称在自然科学的各领域中都起着非常重要的作用. 李对称分析方法 [1−6] 就是利用非线性发展方程的对称, 约化和求解方程. 分数阶非线性发展方程在物理、生物、化学、工程等科学领域中起着非常重要的作用. 为了得到分数阶非线性发展方程的解, 很多有效的方法被提出, 如变分迭代方法, 微分变换方法, Adomian 分解方法, 分数差分方法, 同论摄动分析方法 [7−16] 等. 特别是在文献 [8] 中作者利用同论分析的方法研究了非线性时空分数阶 Klein-Gordon 方程, 并取得了一定的成果. 在文献 [12] 中作者利用 Adomian 分解方法研究了耦合时空分数阶 Burgers 方程组, 并得到了该方程组的一些数值解. 近期, 一些学者提出了利用李群分析方法 [17−22] 研究分数阶非线性发展方程, 并取得了一些成果. 以下利用李群分析方法考虑时间分数阶 Boussinesq 方程

$$D_t^{\alpha} = u_{xx} - (u^2)_{xx} - \left[u(u)_{xx}\right]_{xx}, \tag{1}$$

其中 $1 < \alpha \leqslant 2$, $D_t^{\alpha} = \partial^{\alpha} u/\partial t^{\alpha}$. 当 $\alpha = 2$, 该方程简化为一般 Boussinesq 方程. 方程 (1) 是描述浅水波表面波振幅的传播物理模型. 在文献 [23] 中作者利用同论摄动方法得到了方程 (1) 的广义解. 本文利用李群分析方法研究时间分数阶 Boussinesq 方程, 得到该方程的李点对称和相似约化, 同时把该方程约化为分数阶常微分方程.

2 基本的定义和公式

本部分给出几个基本定义和公式 [22,24−27].

定义1 广义 Riemann-Liouville 导数 [24] 定义为

$$D_t^{\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \displaystyle\int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} (f(\xi) - f(0))\,\mathrm{d}\xi, & 0 < \alpha < 1, \\ [f^{(n)}(t)]^{(\alpha-n)}, & n \leqslant \alpha \leqslant n-1. \end{cases} \tag{2}$$

以下给出几个有用的公式 [24]:

$$D_t^{\alpha} t^{\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+1-\alpha)} t^{\gamma-\alpha}, \quad \gamma > 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} D_t^{\alpha}\left[u(t)v(t)\right] &= u(t) D_t^{\alpha} v(t) + v(t) D_t^{\alpha} u(t), \\ D_t^{\alpha}\left[f(u(t))\right] &= f'_u\left[u(t)\right] D_t^{\alpha} u(t) \end{aligned} \tag{4}$$

* 国家自然科学基金委员会-中国工程物理研究院联合基金 (批准号: 11076015) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yuxj10086@163.com

$$=D_u^\alpha f\left[u(t)\right](u_t')^\alpha. \tag{5}$$

定义 2 广义 Leibnitz 法则 [25,26] 定义为

$$D_t^\alpha\left[u(t)v(t)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}D_t^{\alpha-n}u(t)D_t^n v(t),\quad \alpha>0, \tag{6}$$

其中

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}=\frac{(-1)^{n-1}\alpha\Gamma(n-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(n+1)}. \tag{7}$$

定义3 复合函数求导法则 (链式法则)[22,27] 如下:

$$\frac{\mathrm{d}^m f\big(g(t)\big)}{\mathrm{d}t^m}=\sum_{k=0}^{m}\sum_{r=0}^{k}\begin{pmatrix}k\\ r\end{pmatrix}\frac{1}{k!}\left[-g(t)\right]^r\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\times\left[g(t)^{k-r}\right]\frac{\mathrm{d}^k f(g)}{\mathrm{d}t^k}. \tag{8}$$

3 分数阶非线性发展方程的李对称分析

以下考虑时间分数阶非线性发展方程如下:

$$D_t^\alpha=G(x,t,u,u_x,u_{xx},\ldots), \tag{9}$$

其中 $u=u(x,t)$, $u_x=\partial u/\partial x$. $D_t^\alpha u=\partial^\alpha u/\partial t^\alpha$ 是函数 u 关于时间 t 的导数.

由李群理论, 如果 (9) 式是单参数李群变换下的一个不变量需满足

$$\begin{aligned}t^* &=t+\varepsilon\tau(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ x^* &=x+\varepsilon\varsigma(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ u^* &=u+\varepsilon\eta(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ \frac{\partial u^*}{\partial t^*} &=\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}+\varepsilon\eta_\alpha^0(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &=\frac{\partial u}{\partial x}+\varepsilon\eta^x(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\varepsilon\eta^{xx}(x,t,u)+O(\varepsilon^2),\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\varepsilon\ll 1$ 是一个无穷小参数, 而且

$$\begin{aligned}\eta^x &=D_x(\eta)-u_xD_x(\varsigma)-u_tD_x(\tau),\\ \eta^{xx} &=D_x(\eta^x)-u_{xt}D_x(\tau)\\ &\quad -u_{xx}D_x(\varsigma),\\ \eta^{xxx} &=D_x(\eta^{xx})-u_{xxt}D_x(\tau)\\ &\quad -u_{xxx}D_x(\varsigma),\\ \eta^{xxxx} &=D_x(\eta^{xxx})-u_{xxxt}D_x(\tau)\\ &\quad -u_{xxxx}D_x(\varsigma),\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{11}$$

这里的 D_x 表示全微分

$$D_x=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+\ldots \tag{12}$$

以上变换群的生成元可以表示为

$$\begin{aligned}V &=\varsigma(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}\\ &\quad+\eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned} \tag{13}$$

由李群理论, V 必须满足李对称条件

$$\mathrm{Pr}^{(n)}V\Delta\big|_{\Delta=0}=0, \tag{14}$$

其中 $\Delta=D_t^\alpha-G(x,t,u,u_x,u_{xx},\ldots)=0$.

为了得到群变换 (10), 需要在 (14) 的条件下求解以下李方程:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(\bar{x}(\varepsilon))}{\mathrm{d}\varepsilon} &=\varsigma(\bar{x}(\varepsilon),\bar{t}(\varepsilon),\bar{u}(\varepsilon)),\\ \bar{x}(0) &=x,\\ \frac{\mathrm{d}(\bar{u}(\varepsilon))}{\mathrm{d}\varepsilon} &=\eta(\bar{x}(\varepsilon),\bar{t}(\varepsilon),\bar{u}(\varepsilon)),\\ \bar{u}(0) &=x.\end{aligned} \tag{15}$$

不难得到, (10) 式包含分数阶无穷小算子 (2). 由于积分下限是确定的, 所以我们得到以下不变条件:

$$\tau(x,t,u)\big|_{t=0}=0. \tag{16}$$

由 Riemann-Liouville 时间分数阶导数 [17−22] 运算法则, (16) 式被转化为

$$\begin{aligned}\eta_\alpha^0 &=D_t^\alpha(\eta)+\varsigma D_t^\alpha(u_x)\\ &\quad -D_t^\alpha(\varsigma u_x)+D_t^\alpha(D_t(\tau)u)\\ &\quad -D_t^{\alpha+1}(\tau u)+\tau D_t^{\alpha+1}(u).\end{aligned} \tag{17}$$

由广义 Leibnitz 公式 (6), (17) 式可以转化为

$$\begin{aligned}\eta_\alpha^0 &=D_t^\alpha(\eta)-\alpha D_t(\tau)\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}\\ &\quad -\sum_{n=1}^{k}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}D_t^n(\varsigma)D_t^{\alpha-n}(u_x)\\ &\quad -\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}D_t^{n+1}(\tau)D_t^{\alpha-n}(u).\end{aligned} \tag{18}$$

令 $f(t)=1$, 由链式法则 (8) 并利用 (18) 式, 可以得到

$$\eta_t^\alpha=\frac{\partial^\alpha\eta}{\partial t^\alpha}+\eta_u\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-u\frac{\partial^\alpha\eta_u}{\partial t^\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\frac{\partial^n\eta_u}{\partial t^n}D_t^{\alpha-n}(u)+\mu,\tag{19}$$

其中

$$\mu=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\begin{pmatrix}a\\ n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\ m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ r\end{pmatrix}\frac{1}{k!}\times\frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}(-u)^r\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left(u^{k-r}\right)\times\frac{\partial^{n-m+k}\eta}{\partial t^{n-m}\partial u^k}.\tag{20}$$

由 (4) 和 (5) 式, 方程 (18) 转化为 [20]

$$\begin{aligned}\eta_\alpha^0=&\frac{\partial^\alpha\eta}{\partial t^\alpha}+\left(\eta_u-\alpha D_t(\tau)\right)\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}-u\frac{\partial^\alpha\eta_u}{\partial t^\alpha}+\mu\\&+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\frac{\partial^\alpha\eta_u}{\partial t^\alpha}-\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}D_t^{n+1}(\tau)\right]D_t^{\alpha-n}(u)\\&-\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}D_t^n(\zeta)D_t^{\alpha-n}(u_x).\end{aligned}\tag{21}$$

由李群理论, 我们有以下定理:

定理1 如果 $u=\varphi(x,t)$ 是 (9) 式的一个不变解当且仅当

1) $V\varphi=0\Leftrightarrow\left(\varsigma(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi=0,$

2) $u=\varphi(x,t)$ 是非线性发展方程 (9) 的解.

4 分数阶 Boussinesq 方程的李对称分析

由李群理论, 对方程 (1) 作用四阶延拓 $\mathrm{Pr}^{(4)}V$, 可以得到以下相应的李对称方程:

$$\begin{aligned}&\eta_\alpha^0-\eta^{xx}+4u_x\eta^x+2u_{xx}\eta\\&+2u\eta^{xx}+2u_{xx}\eta^{xx}+2u_{xxx}\eta^x\\&+2u_x\eta^{xxx}+u_{xxxx}\eta+u\eta^{xxxx}=0.\end{aligned}\tag{22}$$

利用方程 (3.3) 求解方程 (3.1), 可以得到

$$\begin{aligned}&\varsigma_u=\tau_u=\varsigma_t=\tau_x=\varsigma_{xxxx}=\eta_{uu}=0,\\&\frac{\partial^\alpha\eta}{\partial t^\alpha}-u\frac{\partial^\alpha\eta_u}{\partial t^\alpha}-\eta_{xxxx}+2u\eta_{xx}=0,\\&4\varsigma_x-\alpha\tau_t=0,\quad \eta_{xu}-2\varsigma_{xx}=0,\\&3\eta_{xxxu}-2\varsigma_{xxxx}=0,\quad \eta_{xxu}-\varsigma_{xxx}=0,\\&\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}\partial_t^n(\eta_u)-\begin{pmatrix}\alpha\\ n+1\end{pmatrix}D_t^{n+1}(\tau)=0,\\&n=1,2,\ldots\end{aligned}\tag{23}$$

解以上超定方程组 (23), 可得

$$\begin{aligned}\varsigma=&c_1x+c_2,\\\tau=&\frac{4c_1}{\alpha}t,\\\eta=&-\frac{3c_1}{2}u,\end{aligned}\tag{24}$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数. 由 (24) 式可得, (1) 式的生成元为

$$V=(c_1x+c_2)\frac{\partial}{\partial x}+\frac{4c_1t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{3c_1u}{2}\frac{\partial}{\partial u}.\tag{25}$$

类似地, 由上述生成元可以得到 (1) 式对称的李代数为

$$\begin{aligned}V_1=&\frac{\partial}{\partial x},\\V_2=&x\frac{\partial}{\partial x}+\frac{4t}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{3u}{2}\frac{\partial}{\partial u}.\end{aligned}\tag{26}$$

很容易验证以上生成元在李括号运算下是封闭的:

$$\begin{aligned}\left[V_1,V_2\right]=&V_1,\\\left[V_2,V_1\right]=&-V_1.\end{aligned}\tag{27}$$

为了得到 V_2 的相似约化, 需要求解以下特征方程组:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\alpha\mathrm{d}t}{4t}=\frac{2\mathrm{d}u}{-3u}.\tag{28}$$

得到下面群不变量解和群不变量:

$$\theta=xt^{-\frac{\alpha}{4}},\quad u=t^{-\frac{3\alpha}{8}}g(\theta).\tag{29}$$

由上述过程可得, (1) 式被约化为一个分数阶常微分方程, 而且有以下定理:

定理 2 由变换 (29), 时间分数阶 Boussinesq 方程被约化为以下分数阶常微分方程:

$$\left(P_{\frac{4}{\alpha}}^{1-\frac{11\alpha}{8},\alpha}g\right)(\theta)=g_{\theta\theta}-2g_\theta^2-2gg_{\theta\theta}-2g_{\theta\theta}^2-2g_\theta g_{\theta\theta\theta}-gg_{\theta\theta\theta\theta},\tag{30}$$

其中分数阶微分算子 $P_{\beta}^{\tau,\alpha}$ 由 Erdelyi-Kober 在文献 [28] 中给出:

$$\begin{aligned}\left(P_{\beta}^{\tau,\alpha}g\right) :=& \prod_{j=0}^{n-1}\left(\tau+j-\frac{1}{\beta}\theta\frac{d}{d\theta}\right)\\ &\times\left(K_{\beta}^{\tau+\alpha,n-\alpha}g\right)(\theta),\end{aligned}$$

$$n=\begin{cases}[\alpha]+1, & \alpha\neq N,\\ \alpha, & \alpha\in N,\end{cases}\tag{31}$$

其中

$$\begin{aligned}&\left(K_{\beta}^{\tau,\alpha}g\right)(\theta)\\ =&\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_{1}^{\infty}(u-1)^{\alpha-1}u & \\ -(\tau+\alpha)g\left(\theta u^{\frac{1}{\beta}}\right)\mathrm{d}u, & \alpha>0,\\ g(\theta), & \alpha=0\end{cases}\end{aligned}\tag{32}$$

是 Erdelyi-Kober 分数阶积分算子.

定理 2 在文献 [17, 22] 中作者已经给出了证明, 这里省略.

5 结 论

利用李对称分析方法研究了分数阶 Boussinesq 方程, 得到该方程的李点对称, 相似约化和李代数, 同时该方程被约化为一个分数阶常微分方程. 本文的行文过程也说明了李对称分析方法对于约化分数阶非线性发展方程是有效的. 然而, 本文中得到的李点对称要比一般意义上的 Boussinesq 方程的李点对称要局限, 这是下一步需要探讨的问题. 分数阶非线性发展方程的守恒律也是值得探究的问题.

[1] Ruan H Y, Lou S Y 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 1213 (in Chinese) [阮航宇, 楼森岳 2005 物理学报 **41** 1213]

[2] Wang L Y 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 181 (in Chinese) [王烈衍 2000 物理学报 **49** 181]

[3] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *Math. Phys.* **30** 2201

[4] Xin X P, Liu X Q, Zhang L L 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 1

[5] Li N, Liu X Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 0203 (in Chinese) [李宁, 刘希强 2013 物理学报 **62** 0203]

[6] Yu F J 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 120201

[7] Ge H X, Liu Y Q, Cheng R J 2012 *Chin. Phys.* B **21** 010206

[8] Khaled A G, Mohamed S M, 2013 *Chin. Phys.* B **22** 010201

[9] Zhang R X, Yang S P 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3295

[10] Tao Y J, Huai X L, Li Z G 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 2487

[11] Wang D F, Zhang J Y, Wang X Y 2013 *Chin. Phys.* B **22** 04507

[12] Chen Y, An H L 2008 *Appl. Math. Comput.* **200** 87

[13] Zhang Q L, Lu L 2011 *Chin. Phys.* B **20** 010510

[14] Lu B 2012 *Phys. Lett.* A **376** 2045

[15] Wang S, Yu Y G 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 020505

[16] Si G Q, Sun Z Y, Zhang Y B 2011 *Chin. Phys.* B **20** 080505

[17] Buckwar E, Luchko Y 1998 *J. Math. Anal. Appl.* **227** 81

[18] Gazizov R K, Kasatkin A A, Yu S 2007 *Vestnik, USATU* **9** 125 (in Russian)

[19] Djordjevic V D, Atanackovic T M 2008 *Comput. Appl.* **212** 701

[20] Gazizov R K, Kasatkin A A, Lukashchuk S Y 2009 *Phys. Scr. T.* **136** 014

[21] Sahadevan R, Bakkyaraj T 2012 *J. Math. Anal. Appl.* **393** 341

[22] Wang G W, Liu X Q, Zhang Y Y 2013 *Commun. Nonl. Sci. Num. Sim* **18** 2321

[23] Liu Y Q 2012 *Journal of Fractional Calculus and Applications* **3** 1

[24] Momani S, Odibat Z 2007 *Phys. Lett.* A **365** 345

[25] Jumarie G 2006 *Comput. Math. Appl.* **51** 1367

[26] Miller K S, Ross B 1993 *Wiley, New York*

[27] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (Academic Press, San Diego CA)

[28] Kiryakova V S 1994 *Generalized fractional calculus and applications* (Pitman Res. Notesin Math.) 301

Lie symmetry analysis of the time fractional Boussinesq equation*

Yu Xing-Jiang† Liu Xi-Qiang

(*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng* 252059, *China*)

(Received 27 June 2013; revised manuscript received 1 September 2013)

Abstract

We have applied the Lie group analysis method to the time fractional Boussinesq equation. This equation can be reduced to an equation which is related to the Erdelyi-Kober fractional derivative by Lie method as a result. It is shown that the approach introduced here is effective and easy to implement.

Keywords: Lie symmetry analysis method, the time fractional Boussinesq equation, modied Riemann- Liouville derivative, Erdelyi-Kober operator

PACS: 02.30.Jr, 02.20.sv, 02.20.Hj **DOI:** 10.7498/aps.62.230201

∗ Project supported by the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the China Academy of Engineering Physics (Grant No. 11076015).

† Corresponding author. E-mail: yuxj10086@163.com