

## 致密双星后牛顿偏心轨道的引力波研究\*

钟双英<sup>†</sup> 刘崧 胡淑娟

(南昌大学理学院, 南昌 330031)

(2013年8月30日收到; 2013年9月24日收到修改稿)

本文主要研究非保守的后牛顿哈密顿自旋致密双星偏心轨道的引力辐射, 数值比较保守的和非保守的自旋致密双星系统轨道参量偏心率大小与引力波形的关系及引力辐射耗散效应项对轨道动力特性的影响. 数值研究表明: 由于系统能量积分被保持, 保守的双星轨道偏心率值改变对时域引力波形变化影响不是很明显, 但辐射的引力波频率分布范围随着偏心率的增大而扩大. 而当运动方程中包含 2.5PN 引力耗散效应项时, 由于引力辐射时伴随着能量和角动量损失, 导致双星两体之间的距离和轨道偏心率逐渐衰减, 轨道动力特性变得更加复杂. 双星旋进合并过程中辐射的引力波受到轨道偏心率的调制, 引力辐射的强度随着偏心率的增大而增强, 而引力辐射持续的时间缩短, 且自旋与自旋耦合效应项对引力的贡献增大了.

**关键词:** 非保守的, 引力辐射, 耗散, 偏心率

**PACS:** 04.25.dg, 04.25.Nx, 04.30.-w, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.230401

## 1 引言

由中子星或黑洞构成的旋转致密双星后牛顿哈密顿系统属于高度非线性和不可积的相对论二体问题, 含有丰富的共振和混沌等动力学现象, 旋进合并过程中的引力辐射是引力波探测器理想的观测波源. 由于诸多因素的影响, 探测器接收到的是掺杂着大量噪声的信号, 数据分析时常采用后牛顿近似引力波理论模板进行对比确认. Kidder<sup>[1]</sup> 和 Will 等<sup>[2]</sup> 利用后牛顿展开分别给出了相对坐标系内双星系统包含自旋效应的 2PN 引力波计算公式. Blanchet 等<sup>[3]</sup> 讨论了致密双星旋进时期的类圆轨道辐射的 3PN 精度的引力波形. 上述文献讨论的轨道模型局限于类圆轨道, 即双星旋进合并时轨道偏心率对引力辐射的忽略不计, 因为致密双星旋进合并时由于引力辐射的能量损失, 轨道逐渐衰减, 演化趋于类圆轨道, 且 LIGO 和 Virgo 引力波探测器也是基于类圆轨道理论模型构造的匹配滤波器.

近年来许多文献开始关注双星旋进合并最后阶段时偏心率对轨道引力辐射的影响<sup>[4-8]</sup>. Peters<sup>[4]</sup> 和 Mathews 等<sup>[5]</sup> 两人最早讨论了偏心的双星轨道

的引力辐射的情形. Gopakumar 等<sup>[6]</sup> 和首次利用后牛顿修正重新讨论了文献 [4, 5] 数值结果. 文献 [7] 讨论了无旋任意质量比的双星椭圆轨道参量对后牛顿引力辐射和近星点的进动的影响. Brown 等<sup>[8]</sup> 利用文献 [9] 给出的被称为  $x$  模型后牛顿引力波形公式, 计算分析了无旋致密双星偏心的牛顿轨道在旋进合并时偏心率对引力波的影响. 他们的数值模拟结果表明: 在不考虑自旋效应的情形下, 牛顿引力辐射的强度随着轨道偏心率的增大而增强, 引力辐射的持续时间相应缩短. 对于总质量  $2M_{\odot} < M < 15M_{\odot}$  的致密双星而言, 当残余偏心率  $e_0 < 0.05$ , 此时对引力波探测器 LIGO 的探测灵敏度影响微乎其微; 若残余偏心率  $e_0 > 0.1$ , 由于偏心率对引力辐射的影响导致探测器滤波器的信噪比降低. 由此看来, 研究致密双星旋进合并时轨道偏心率对引力波形变化的影响具有重要的实际意义.

致密双星系统在引力辐射过程中伴随着系统总能量和总角动量的损耗. 因此, 将由引力辐射效应引起的耗散项添加到双星演化的后牛顿哈密顿运动方程中, 考虑耗散的致密双星后牛顿哈密顿系统动力学特性及引力辐射具有更实际应用研究

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11165011, 61261006) 和江西省自然科学基金 (批准号: 2012ZBAB202001) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn

价值. 自旋致密双星后牛顿近似的运动方程是由一系列不同的对系统运动加速度产生影响的修正项对构成, 分别包含纯轨道项及后牛顿修正项、自旋效应项和耗散项. 而在运动方程中牛顿引力辐射引起的耗散最开始出现对应着后牛顿展开项中的 2.5PN<sup>[1,2]</sup>, 当然还存在高阶 3.5PN 耗散项及自旋效应 3.5PN 耗散项<sup>[10-13]</sup>. 众所周知, 与引力辐射耗散相对应的加速度表达形式不是唯一的, 与具体的坐标体系有关<sup>[1,14,15]</sup>. 文献 [13] 利用坐标变换将拉格朗日变量表示的 2.5PN 耗散作用的引起的相对加速度表达式转变为哈密顿变量表示, 这样为我们研究非保守后牛顿哈密顿双星系统的引力辐射提供极大方便. 前期我们分别研究了保守的后牛顿哈密顿和后牛顿拉格朗日描述的自旋致密双星低偏心率轨道的引力波形<sup>[16,17]</sup>, 无论是哈密顿构型还是拉格朗日描述的致密双星辐射的引力波形都携有原始系统的动力学信息. 本文我们继续数值分析研究非保守的自旋致密双星的后牛顿哈密顿高偏心率轨道的动力学及其引力波形. 运动方程中删除了 3.5PN 耗散项, 仅考虑 2.5PN 引力辐射耗散效应对系统动力行为的影响. 当后牛顿近似运动方程中包含引力辐射导致的 2.5 阶 PN 耗散项时, 观察双星在演化过程中不同阶段的轨道变化, 比较系统在运动方程有、无引力耗散两种情形时轨道引力辐射强度和辐射持续时间与轨道偏心率之间的变化关系, 观察偏心率随频率的变化关系. 文中相关参量  $G = c = 1$  为几何单位.

## 2 自旋致密双星的后牛顿运动方程及其引力辐射

### 2.1 自旋致密双星后牛顿哈密顿形式

设自旋致密黑洞双星两体的质量分别为  $m_1$  和  $m_2$  ( $m_1 \leq m_2$ ), 总质量  $M = m_1 + m_2$ , 约化质量  $\mu = m_1 m_2 / M$ , 质量比  $\beta = m_1 / m_2$ ,  $\eta = m_1 m_2 / M^2 = \beta / (1 + \beta)^2$ , 无量纲的坐标  $\mathbf{r}$  以质量  $M$  为单位, 动量  $\mathbf{p}$  以约化质量为单位, 时间  $t$  的单位也是质量  $M$ . 同时定义矢量  $\mathbf{r}$  的长度表示两体之间的距离, 那么单位矢量  $\mathbf{n} = \mathbf{r} / r$ . 保守的 2PN 哈密顿在相对坐标系下表示为

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2) = H_N + H_{1PN} + H_{2PN} + H_{SO} + H_{SS}, \quad (1)$$

方程 (1) 中的第一项  $H_N$  代表纯轨道部分牛顿项,  $H_{PN}$  表示表示轨道的后牛顿修正项 (包含 1PN, 2PN),  $H_{SO}$  为自旋轨道耦合效应项 (1.5PN),  $H_{SS}$  则为自旋与自旋耦合效应项 (2PN), 其中,  $H_N, H_{PN}, H_{SO}$  和  $H_{SS}$  的详细表达式分详见文献 [18].

$$H_N(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2} - \frac{1}{r}, \quad (2)$$

$$H_{1PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{8}(3\eta - 1)(\mathbf{p}^2)^2 - \frac{1}{2}[(3 + \eta)\mathbf{p}^2 + \eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})] \frac{1}{r} + \frac{1}{2r^2}, \quad (3)$$

$$H_{2PN}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{1}{16}(1 - 5\eta + 5\eta^2)(\mathbf{p}^2)^2 + \frac{1}{8}[(5 - 20\eta - 3\eta^2)\mathbf{p}^2 - 2\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2 P^2 - 3\eta^2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^4] \frac{1}{r} + \frac{1}{2}[(5 + 8\eta)\mathbf{p}^2 + 3\eta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2] \frac{1}{r^2} - \frac{1}{4}(1 + 3\eta) \frac{1}{r^3}, \quad (4)$$

$$H_{SO} = \frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{S}_{\text{eff}}}{r^3}, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$  牛顿轨道角动量,

$$\mathbf{S}_{\text{eff}} = \left(2 + \frac{3}{2\beta}\right) \mathbf{S}_1 + \left(2 + \frac{3}{2}\beta\right) \mathbf{S}_2. \quad (6)$$

此外, 自旋与自旋耦合效应项

$$H_{SS} = \frac{1}{2r^3}[3(\mathbf{S}_0 \cdot \mathbf{n})^2 - S_0^2], \quad (7)$$

其中

$$\mathbf{S}_0 = \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \mathbf{S}_1 + (1 + \beta) \mathbf{S}_2. \quad (8)$$

自旋矢量均采用无量纲形式,  $\mathbf{S}_i = \hat{\mathbf{S}}_i(\chi_i m_i^2 / M^2)$  ( $i = 1, 2$ ), 无量纲参数  $\chi_i \in [0, 1]$ . 若考虑由于牛顿引力辐射效应引起的引力耗散项, 则致密双星系统 (1) 变成非保守哈密顿系统, 那么描述系统演化规律坐标和动量  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  的运动方程为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{a}_{2.5PN}, \quad (9)$$

其中,  $\mathbf{a}_{2.5PN}$  表示由于牛顿引力辐射的耗散对系统相对加速度的贡献, 文献 [13] 中给出了由拉格朗日变量  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$  表示的  $\mathbf{a}_{2.5PN}$  变换到哈密顿变量  $(\mathbf{r}, \mathbf{p})$  表示的  $\mathbf{a}_{2.5PN}$ , 表达式如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2.5PN} = & \frac{8}{5} \left(\frac{\eta}{r}\right) \times \left\{ \frac{\mathbf{n}}{r^2} \left[ (\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) \left( \frac{17}{13r} + 3\mathbf{p}^2 \right) \right. \right. \\ & + \frac{9}{2}(3\eta - 1)\mathbf{p}^4 - \frac{1}{2} \left( 5\eta + \frac{179}{3} \right) \frac{\mathbf{p}^2}{r} \\ & \left. \left. - \frac{1}{3}(25\eta + 51) \frac{1}{r^2} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. -6\eta \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2}{r} + 6 \frac{\mathbf{S}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right] \\
 & - \frac{\mathbf{p}}{r^2} \left[ \frac{3}{r} + \mathbf{p}^2 + \frac{3}{2}(3\eta - 1)\mathbf{p}^4 \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2}(3\eta - 21)\frac{\mathbf{p}^2}{r} - 3(3 + \eta)\frac{1}{r^2} \right. \\
 & \left. - 2\eta \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})^2}{r} + 2 \frac{\mathbf{S}_{\text{eff}} \cdot \mathbf{L}}{r^3} \right] \\
 & \left. - \frac{\mathbf{S}_{\text{eff}} \times \mathbf{r}}{r^5} \left( \frac{3}{r} + \mathbf{p}^2 \right) \right\}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

而两体自旋的进动方程为

$$\frac{d\mathbf{S}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{S}_i} \times \mathbf{S}_i = \boldsymbol{\Omega}_i \times \mathbf{S}_i, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_1 = & \left( 2 + \frac{3}{2\beta} \right) \frac{\mathbf{L}}{r^3} + \frac{1}{\eta r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{S}_2] \\
 & + \frac{3}{r^3} \left( 1 + \frac{1}{\beta} \right)^2 \mathbf{n}(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{n}), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_2 = & \left( 2 + \frac{3\beta}{2} \right) \frac{\mathbf{L}}{r^3} + \frac{1}{\eta r^3} [3\mathbf{n}(\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{S}_1] \\
 & + \frac{3}{r^3} (1 + \beta)^2 \mathbf{n}(\mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{n}). \quad (13)
 \end{aligned}$$

## 2.2 引力波方程

假定观察者位于  $xoz$  平面上, 设  $\hat{\mathbf{p}} = (1, 0, 0)$ , 且  $\hat{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{N}} \times \hat{\mathbf{p}}$ ,  $\hat{\mathbf{N}}$  是观察者的方向, 引力波的两个偏振化状态分别为

$$h_+ = \frac{1}{2} (\hat{p}_i \hat{p}_j - \hat{q}_i \hat{q}_j) h^{ij}, \quad (14)$$

$$h_\times = \frac{1}{2} (\hat{p}_i \hat{q}_j + \hat{q}_i \hat{p}_j) h^{ij}, \quad (15)$$

式中  $h^{ij}$  是对称横向无迹张量, 指标  $i, j = 1, 2, 3$  表示  $x, y, z$  方向三个分量, 指标上下相同时为爱因斯坦求和记号. 自旋致密双星的一般轨道 2PN 精度的引力波辐射  $h^{ij}$  公式<sup>[2]</sup> 如下:

$$\begin{aligned}
 h^{ij} = & \frac{2\mu}{R} [\tilde{Q}^{ij} + P^{1/2} Q^{ij} + PQ^{ij} + PQ_{\text{SO}}^{ij} + P^{3/2} Q^{ij} \\
 & + P^{3/2} Q_{\text{SO}}^{ij} + P^2 Q^{ij} + P^2 Q_{\text{SS}}^{ij} \\
 & + O(\epsilon^{5/2})]_{\text{TT}}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

其中, 上标中数字表示后牛顿近似的精度阶数,  $R$  是观察者和波源间的距离,  $\tilde{Q}^{ij}$  是标准四极矩项,  $PQ^{ij}$  代表纯轨道后牛顿部分对引力波贡献, 而  $PQ_{\text{SO}}^{ij}$  和  $PQ_{\text{SS}}^{ij}$  则表示引力波来源于致密双星的自旋效应辐射. 本论文中讨论的引力波主要来源于标准四极矩项、自旋与轨道耦合效应和自旋与自旋耦合效应

等这三部分的引力辐射, 不考虑纯轨道后牛顿修正项  $PQ^{ij}$  对轨道引力辐射的影响.  $\tilde{Q}^{ij}$ ,  $PQ_{\text{SO}}^{ij}$  和  $PQ_{\text{SS}}^{ij}$  具体表达式为

$$\tilde{Q}^{ij} = 2 \left( v^i v^j - \frac{m}{r} \hat{\mathbf{n}}^i \hat{\mathbf{n}}^j \right), \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 PQ_{\text{SO}}^{ij} = & 2 \left( \frac{m}{r} \right)^2 \left\{ \hat{\mathbf{N}} \times \left[ \left( \frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_s \right. \right. \\
 & \left. \left. + \boldsymbol{\chi}_a \right] \right\}^{(ij)}_{\hat{\mathbf{n}}}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^{3/2} Q_{\text{SO}}^{ij} = & 4 \left( \frac{m}{r} \right)^2 \left\{ 3(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v}) \cdot \left[ \left( \frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a + \boldsymbol{\chi}_s \right] n^i n^j \right. \\
 & - \left[ \mathbf{v} \times \left[ (2 + \eta) \boldsymbol{\chi}_s + 2 \left( \frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a \right] \right]^{(ij)}_{\hat{\mathbf{n}}} \\
 & + 3\dot{r} + 3\dot{r} \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \left[ \boldsymbol{\chi}_s + \left( \frac{\delta m}{m} \right) \boldsymbol{\chi}_a \right] \right]^{(ij)}_{\hat{\mathbf{n}}} \\
 & - 2\eta (\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\chi}_s)^{(ij)}_{\hat{\mathbf{v}}} + \eta [(\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{v} \\
 & + 2(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{v}) \hat{\mathbf{n}}] - 3\dot{r}(\hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{n}) \hat{\mathbf{n}} \left. \right\}^{(ij)} \\
 & \times (\hat{\mathbf{N}} \times \boldsymbol{\chi}_s)^j, \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P^2 Q_{\text{SS}}^{ij} = & -6 \left( \frac{m}{r} \right)^3 \eta \{ [|\boldsymbol{\chi}_s|^2 - |\boldsymbol{\chi}_a|^2 \\
 & - 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_s)^2 + 5(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_a)^2] n^i n^j \\
 & + 2[\boldsymbol{\chi}_s(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_s) - \boldsymbol{\chi}_a(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\chi}_a)] \left. \right\}^{(ij)}_{\hat{\mathbf{n}}}, \quad (20)
 \end{aligned}$$

上述公式中

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} = & \left( 1 + \frac{1}{2}(3\eta - 1)\mathbf{p}^2 - \frac{(3 + \eta)}{r} \right) \mathbf{p} \\
 & - \eta (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) \frac{\mathbf{n}}{r} + \frac{\mathbf{S}_{\text{eff}} \times \mathbf{r}}{r^3}, \quad (21)
 \end{aligned}$$

$$\dot{r} = \left( 1 + \frac{(3\eta - 1)}{2}\mathbf{p}^2 - \left( \frac{3 + 2\eta}{r} \right) \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}. \quad (22)$$

另外,  $\delta m = m_1 - m_2$ ,

$$\boldsymbol{\chi}_s = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{S}_1}{m_1^2} + \frac{\mathbf{S}_2}{m_2^2} \right), \quad \boldsymbol{\chi}_a = \frac{1}{2} \left( \frac{\mathbf{S}_1}{m_1^2} - \frac{\mathbf{S}_2}{m_2^2} \right).$$

数值积分上述自旋致密双星的运动方程 (9) 和 (11), 便可获得自旋致密双星旋进演化过程中关于变量  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_i)$  数值解, 从而获得相应轨道辐射的引力波形. 下面我们主要是利用变步长辛积分器模拟自旋致密双星轨道的引力辐射, 比较自旋致密双星演化过程中道偏心率的对引力辐射强度及辐射频率影响.

## 3 偏心轨道引力波形的数值比较

先数值比较、分析引力辐射耗散项对自旋致

密双星轨道动力特性的影响,再考察引力辐射随轨道偏心率的变化对引力辐射持续的时间、强度和辐射频率的产生的影响.

### 3.1 引力辐射耗散效应对致密双星系统的影响

取质量比  $\beta = 1$  和自旋参量  $\chi_1 = \chi_2 = 1$  两偏心轨道来比较当运动方程中包含 2.5PN 引力辐射耗散项时对轨道动力特性的影响. 轨道 1 的初始条件  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (10.14, 0, 0, 0, 0.3675, 0)$ ,  $\theta_1 = 1.11 \text{ rad}$ ,  $\theta_2 = -0.85 \text{ rad}$ ,  $\xi_1 = 0.24$ ,  $\xi_2 = -0.25$ , 牛顿轨道偏心率  $e_0 \approx 0.37$ ; 轨道 2  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = (20, 0, 0, 0, 0.315, 0)$ ,  $\theta_1 = \theta_2 = 1.6 \text{ rad}$ ,  $\xi_1 = 0.1625$ ,  $\xi_2 = 0.1875$ ,  $e_0 \approx 0.98$ .

图 1 给出了运动方程中不包含引力耗散项时保守双星系统的三维视图及其对应的快速 Lyapunov 指标 (FLI) 随时间变化的情况. 图 1(b) 所示的随时间指数式膨胀 FLI 表明轨道 1 的混沌特性, 而轨道 2 是有序的, 如图 1(d) 所示. 当运动方程包含 2.5PN 引力辐射主要项时, 系统变为非保守的耗散系统, 图 2(a) 和 (c) 是原保守的混沌双星在引力辐射耗散效应影响下旋进时的三维视图及其坐标  $x$

分量随时间演化情形. 从图 2(a) 中可以看出, 非保守的原混沌双星轨道在  $xoy$  平面投影随时间逐渐趋近于坐标原点, 而图 1(a) 中保守的却不会, 另外, 它的坐标  $x$  分量随时间变化逐渐减小, 如 2(c) 所示. 这些事实说明了由于混沌和引力辐射耗散共同作用的影响, 系统能量迅速减少, 导致旋进过程中两体之间的距离快速地缩减, 这是引力辐射对轨道反作用的表现, 大约 6 圈以后双星出现合并. 类似的现象在原有序轨道 2 的构型图 2(b) 和坐标  $x$  分量随时间演化图 2(d) 中亦可见. 因为有效积分时间非常短暂, 收集到的数据量不足以用提供轨道在此状态下对应的 FLI, 我们无法再用 FLI 指标来监视轨道动力特性演化. 但从  $xoy$  平面投影和坐标  $x$  分量随时间的演化变化趋势可知系统的空间构型及动力特性由于引力耗散效应的影响发生明显地变化. 那么引力辐射耗散项对系统引力辐射的会产生何影响?

图 3 是上述两轨道在无耗散时引力波形及与波对应的功率谱图, 有耗散时引力波形见图 4. 原有序轨道 2 的引力辐射有周期性, 对应引力波波形随时间周期性地变化如图 3(d) 和 (c) 所示. 图 3(b) 所示随时间连续变化的功率谱表明原保守的混沌双

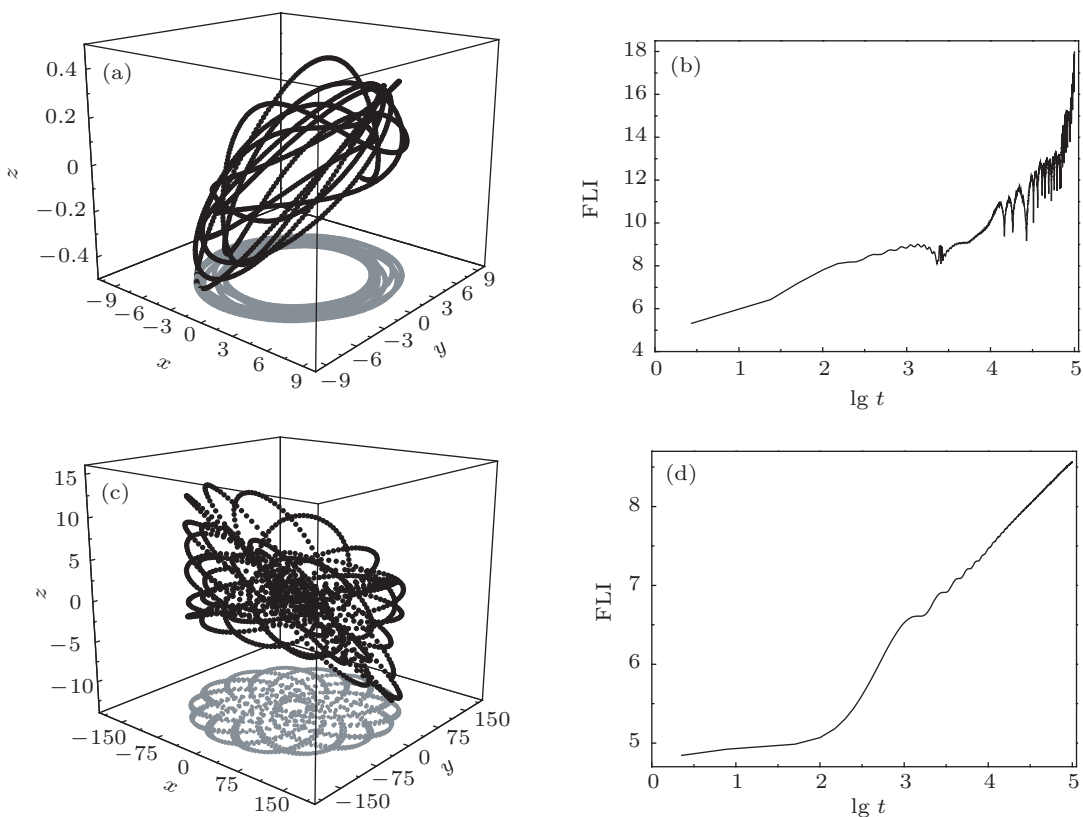


图 1 保守的双星系统三维视图及对应轨道的 FLIs (a) 和 (b) 是轨道 1; (c) 和 (d) 是轨道 2

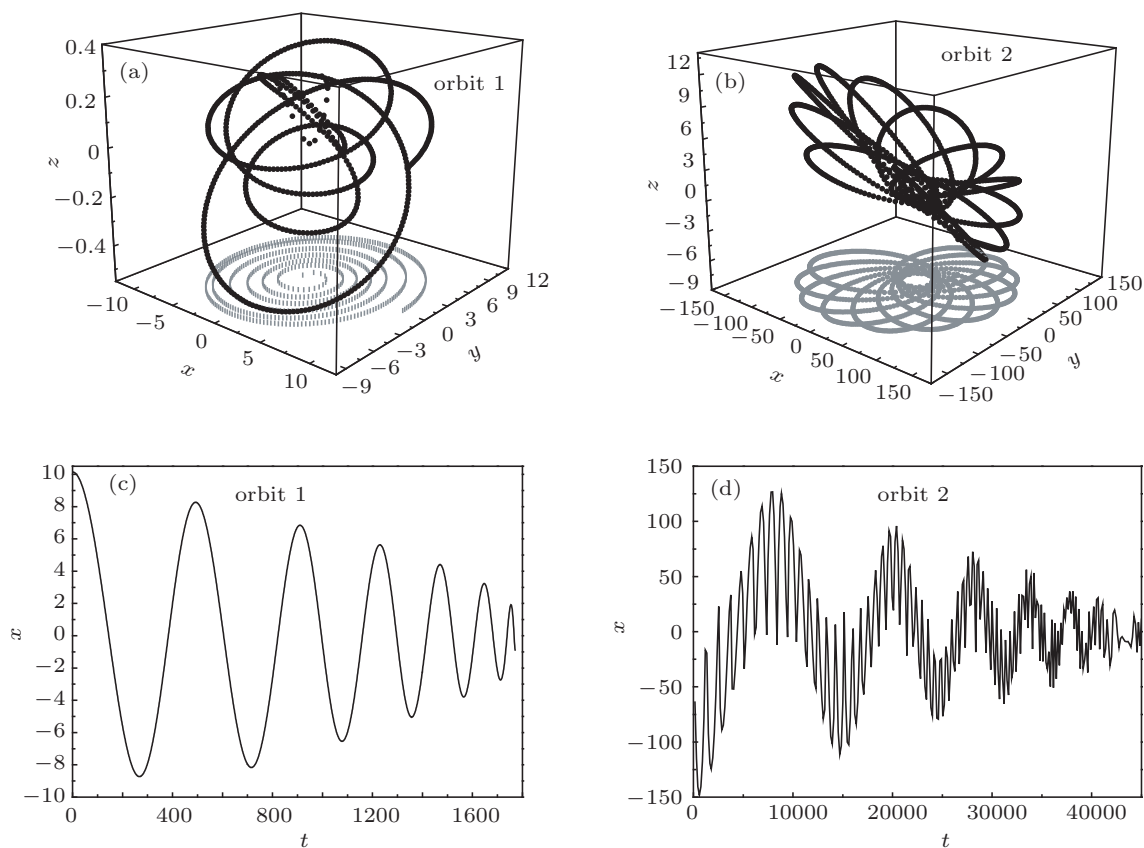


图2 有耗散时的双星系统三维视图及坐标  $x$  分量的随时间变化情形

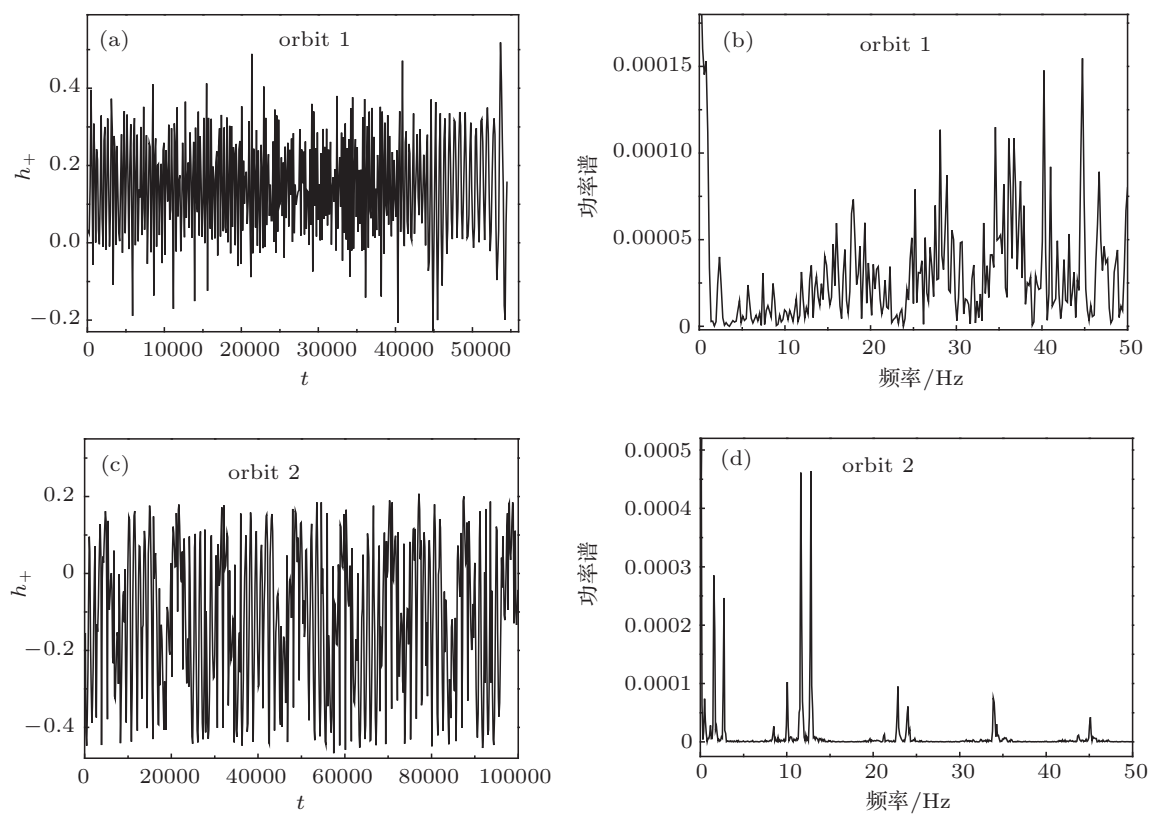


图3 无耗散项时的  $h_+$  型引力波形及对应的功率谱 (a) 和 (b) 混沌轨道; (c) 和 (d) 有序轨道

星引力辐射具有非周期性, 引力波形无规律的变化, 引力波形携带原始系统的混沌特性痕迹清晰可见, 如图 3(a) 示. 但考虑引力辐射耗散效应时, 图 4(a) 与图 3(a) 比较可知, 引力辐射持续较保守状态下短很多, 此时引力波形变化规律不清楚, 合并瞬间辐射强度极大, 类似的在图 4(b) 也出现, 原有序轨道引力辐射持续时间较长, 在合并之前引力波形仍拟周期性地变化. 此外, 在双星合并之前来源于自旋与轨道耦合效应的引力辐射非常微弱, 仅在合并的瞬间迸发强的尖脉冲, 而来自于自旋与自旋耦合效应的引力波与纯轨道部分量级相当. 而我们以前的工作发现保守双星的自旋与自旋耦合效应对引力波的贡献比纯轨道部分低一个量级<sup>[16]</sup>.

上述数值结果表明由于引力辐射耗散效应的

作用, 无论是有序双星系统还是混沌系统的空间构型和动力演化行为都发生明显地改变, 导致旋进时轨道半径衰减速度加快, 辐射持续时间缩短, 单位时间内能量和角动量损失更大, 自旋与自旋效应部分对引力辐射的贡献提高了, 但从引力波形状上辨别所携带原始系统的动力特性信息不是很清晰.

### 3.2 偏心率与引力波

保持除动量  $\mathbf{p}$  外其他初始条件、动力学参量和初始自旋构型不变的前提下, 分别改变上述轨道 1 和轨道 2 初始动量  $\mathbf{p}$  值, 使得轨道具有不同的初始偏心率值演化, 观察轨道偏心率对系统的引力辐射会产生什么影响? 数值实验结果表明: 对于保守

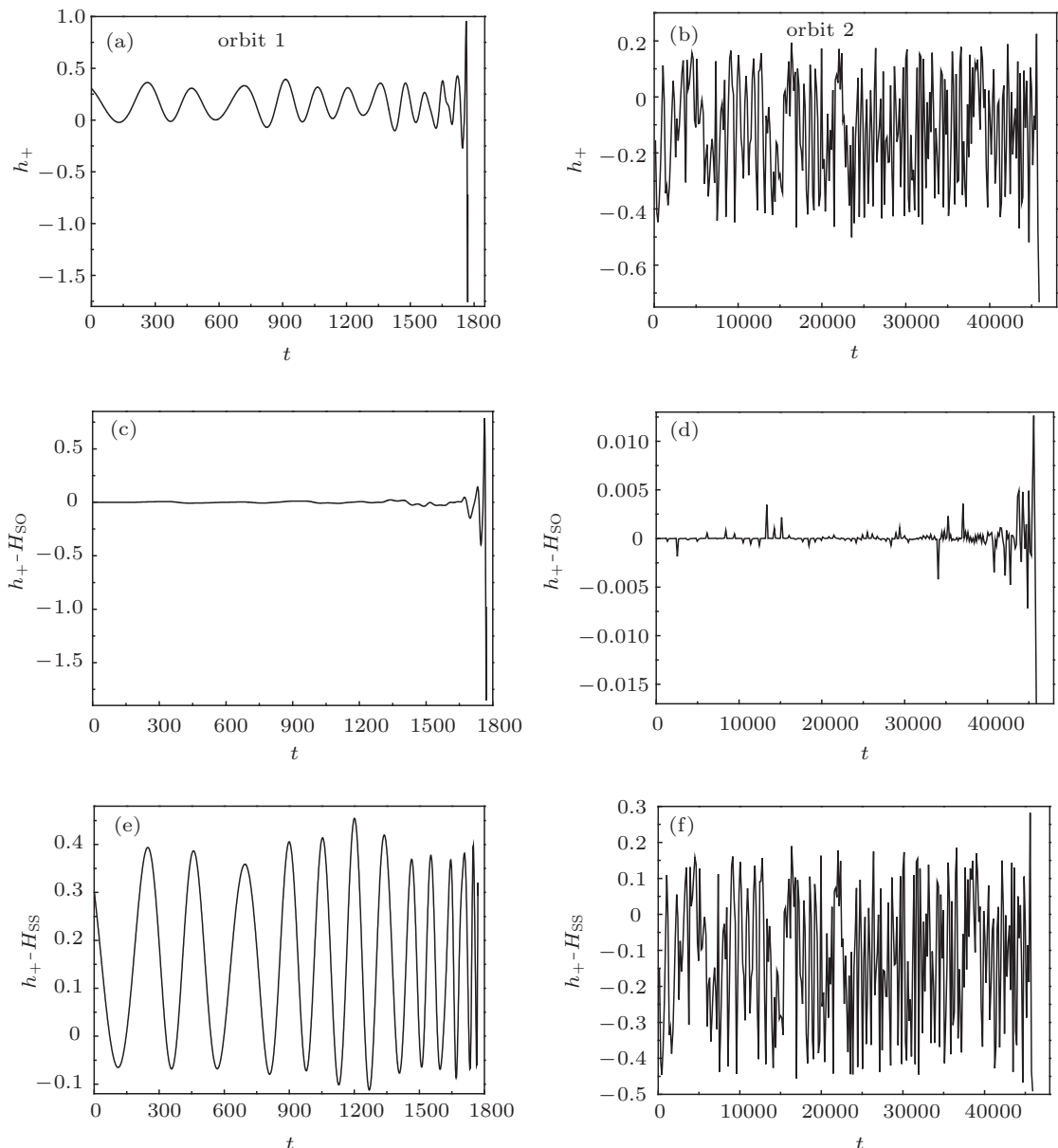


图 4 有耗散项时两轨道  $h_+$  型引力波形及自旋效应对引力波的贡献 (a), (c), (e) 是轨道 1; (b), (d), (f) 是轨道 2

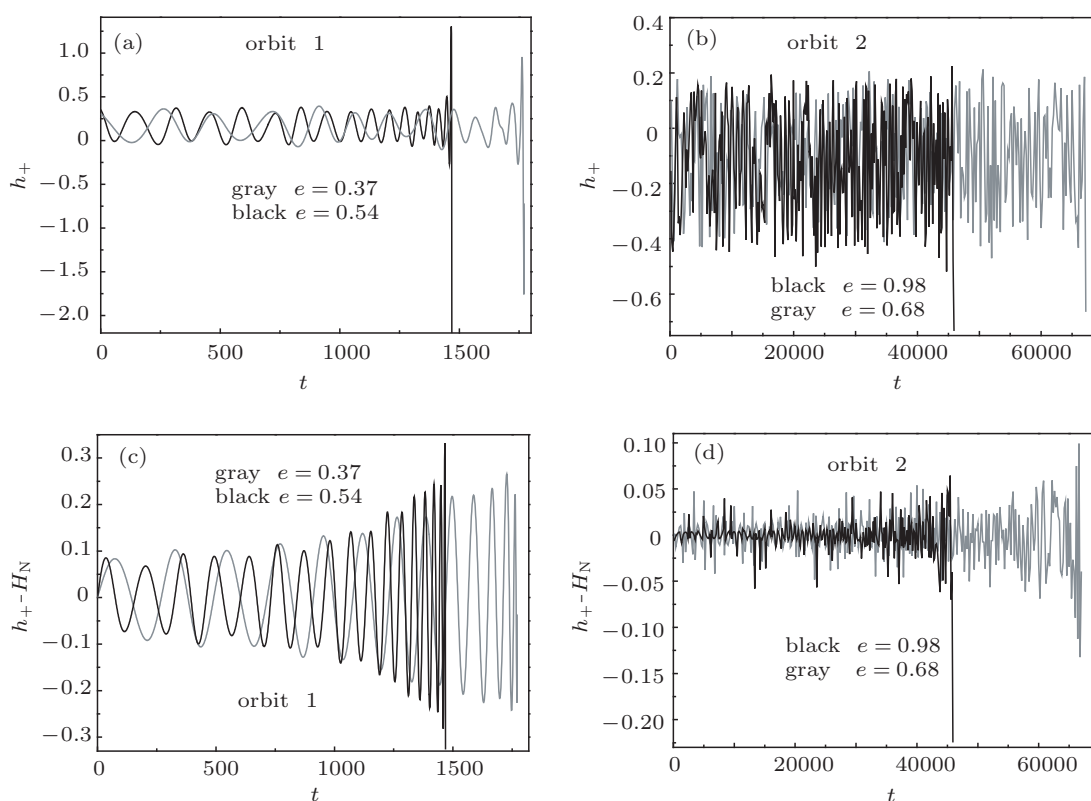


图5 (a)和(b)是非保守的双星系统具有不同初始偏心率时对应的引力波形;(c)和(d)是其牛顿轨道对引力波形的贡献

的双星系统而言,由于能量积分被保持,在给定的有限积分时间内轨道偏心率改变对系统引力波形变化影响不是很明显,而非保守的双星系统却不然.从图5(a)和(b)可以看出,随着偏心率的增大,轨道引力辐射的幅度增强,特别是在旋进合并的最后阶段,图5(c)和(d)所示的引力波分量图也很明显,但引力辐射持续的时间却相应减少了,即引力耗散效应加剧系统能量的损失,导致了双星两体之间的距离快速减小旋进合并.

由此可见,偏心率对轨道引力辐射产生极为重要的影响.那么频域引力波有何变化呢?从图6(a)可以看出,当偏心率 $e \approx 0.37$ 时,保守的混沌双星系统的引力波频率仅分布在(0—25 Hz)区间内,频带宽度明显小于偏心率 $e \approx 0.54$ 时频率分布范围.而保守的有序轨道2的引力波频率呈 $\delta$ 函数状分布,且偏心率越大,引力波频率分布范围越广,如图6(b)所示.另一方面,对于给定条件的耗散双星系统而言引力波的频率分布与轨道偏心率之间并未表现出与保守的双星一致的变化规律,即随偏心率增大而扩大.如图6(c)和(d)所示,无论偏心率如何变化,系统引力辐射的波频率都非常丰富,看不出明显差异.上述结果充分表明了轨道偏心率对引力波形的变化及频带分布都会产生影响.一般来说,

引力波信号被轨道偏心率调制,偏心率越大,轨道引力辐射增强,系统能量和角动量损失加快,双星轨道半长径迅速衰减,引力辐射持续时间减小.

图7(a)给出了当双星初始间距 $r = 10$ ,质量比 $\beta = 1$ ,自旋参量 $\chi_1 = \chi_2 = 1$ 时系统在旋进过程中伴随着引力辐射轨道偏心率衰减的变化情况.由图可知,当 $e < 0.65$ 时,偏心率 $e$ 随频率 $f$ 的增大而按线性函数关系单调递减;当 $e > 0.65$ 时, $e$ 随频率按非线性函数衰减.此外,我们也观察了偏心率衰减幅度与系统动力学参量的变化关系,如图7(b)所示.我们的数值实践表明,当固定系统的初始条件和初始自旋构型时,不同的质量比对轨道偏心率 $e$ 随频率变化的衰减幅度大小没有明显的差异变化.但当固定质量比 $\beta = 1$ ,而改变自旋大小时,从图7(b)可以看出,在同一频率点处,若自旋越大,对应的此时轨道偏心率值越大,意味着双星轨道演化时自旋量值越大,偏心率衰减幅度值越小;反之,衰减的幅度值越大.当然,由于引力辐射系统能量损失,必然导致轨道参量相应发生变化.其次,数值模拟观察偏心率的变化情况还与采用理论模型、坐标系及系统动力学特性等诸多因素有关,在特定条件下得到的结论,从某一侧面说明了自旋效应对轨道动力学

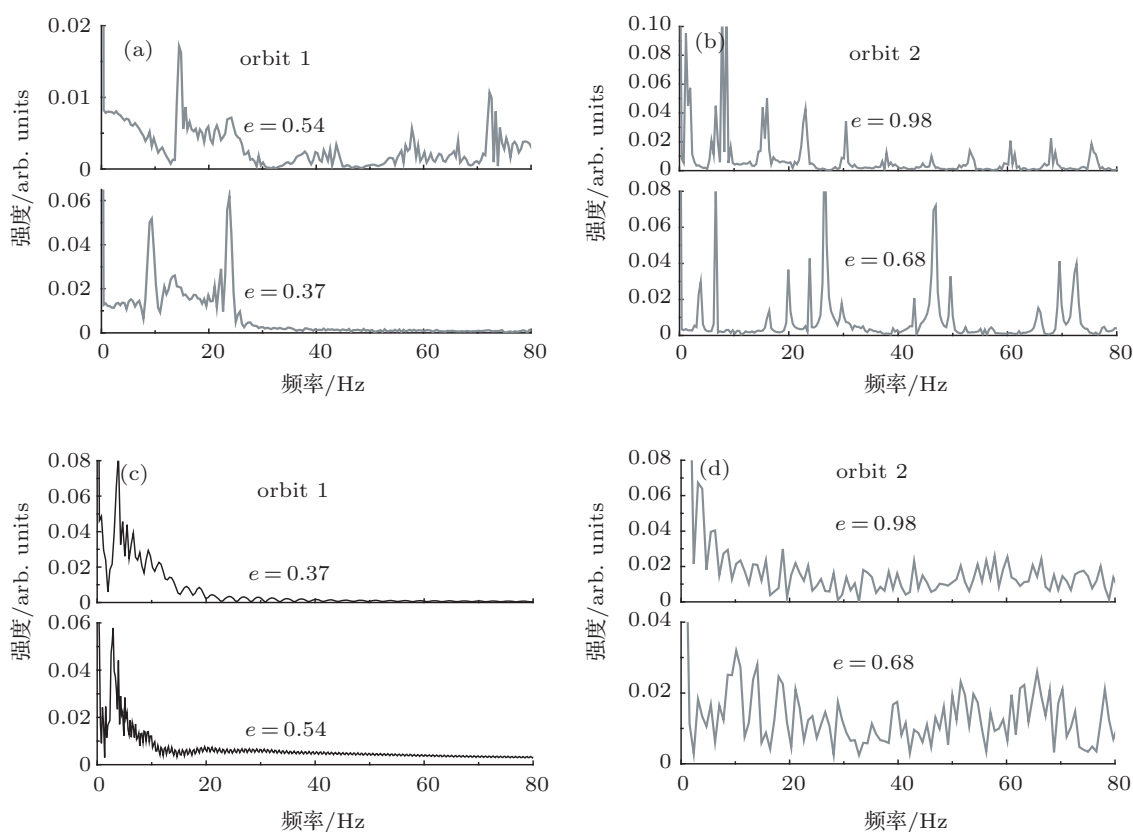


图6 (a)和(b)是保守的双星系统频域引力波形; (c)和(d)是非保守的

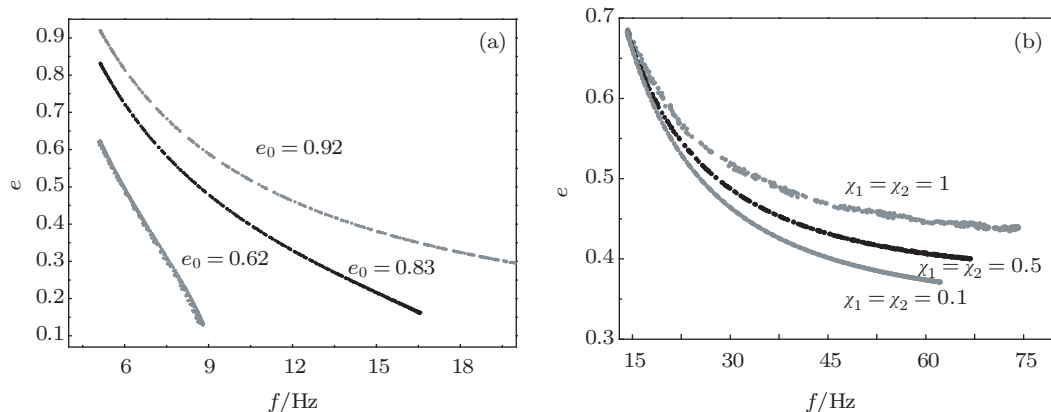


图7 (a)  $r=10, \beta=1, \chi_1=\chi_2=1$ , 初始频率  $f_0=5$  Hz, 轨道偏心率随频率变化情形; (b)  $r=20, \beta=1, e_0=0.68, f_0=15$  Hz,  $e$  的衰减幅度与双星两体自旋大小的关系

行为的演化有着及其重要的影响, 这和我们以前的研究结论一致的 [19,20].

#### 4 结论

本文主要研究考虑包含 2.5PN 引力辐射耗散效应在内的非保守的后牛顿哈密顿自旋致密双星偏心轨道与引力辐射的关系, 数值比较偏心率大小对轨道引力辐射的影响. 对保守系统而言, 在给定的有限积分时间内轨道偏心率值改变对系统引力

波形变化影响不是很明显, 但辐射的引力波频率分布范围随着偏心率的增大而扩大. 而考虑 2.5PN 主要引力耗散效应项时, 由于引力辐射时伴随着能量和角动量损失, 导致双星两体之间的距离和轨道偏心率逐渐衰减, 轨道动力特性变得更加复杂. 双星旋进合并过程中辐射的引力波受到轨道偏心率的调制, 引力辐射的强度随着偏心率的增大而增强, 引力辐射持续的时间缩短, 自旋与自旋耦合效应部分对引力波的贡献增大, 量级与纯轨道部分引力辐射相当.

- [1] Kidder L E 1995 *Phys. Rev. D* **52** 821  
 [2] Will C M, Wiseman A G 1996 *Phys. Rev. D* **54** 4813  
 [3] Blanchet L, Faye G, Iyer B R, Sinha S 2008 *Class. Quant. Grav.* **25** 165003  
 [4] Peters P C 1964 *Phys. Rev. B* **136** 1224  
 [5] Peters P C, Mathews J, 1963 *Phys. Rev.* **131** 435  
 [6] Gopakumar A, Iyer B R 1997 *Phys. Rev. D* **56** 7708  
 [7] Gopakumar A, Iyer B R 2002 *Phys. Rev. D* **65** 084011  
 [8] Brown D A, Zimmerman P J 2010 arXiv:0909.0066v2[gr-qc] 15Feb  
 [9] Hinder I, Herrmann F, Laguna P, Shoemaker D 2008 arXiv:0806.1037v1[gr-qc]  
 [10] Will C M 2005 *Phys. Rev. D* **71** 08402  
 [11] Wang H, Will C M 2007 *Phys. Rev. D* **75** 064017  
 [12] Konigsdorffer C, Faye G, Schafer G 2003 *Phys. Rev. D* **68** 044004  
 [13] Levin J, McWilliamms S C, Contreras H 2011 arXiv:1009.2533v3[gr-qc] 28 Jul 2011  
 [14] Thorne K S 1969 *Astrophys. J.* **158** 997  
 [15] Mora T, Will C M 2004 *Physical Rev. D* **69** 104021  
 [16] Zhong S Y, Liu S 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 120401 (in Chinese) [钟双英, 刘崧 2012 物理学报 **61** 120401]  
 [17] Wang Y Z, Wu X, Zhong S Y 2012 *Acta. Phys. Sin.* **61** 160401 (in Chinese) [王玉诏, 伍歆, 钟双英 2012 物理学报 **61** 160401]  
 [18] Damour T 2001 *Phys. Rev. D* **64** 124013  
 [19] Zhong S Y, Wu X 2010 *Phys. Rev. D* **81** 104037  
 [20] Zhong S Y, Wu X, Liu S Q, Deng X F 2010 *Phys. Rev. D* **82** 124040

# Study on the gravitational waveform emitted from post-Newtonian eccentric spinning compact binary\*

Zhong Shuang-Ying<sup>†</sup> Liu Song Hu Shu-Juan

(School of Sciences, Nanchang University, Nanchang 330031, China)

(Received 30 August 2013; revised manuscript received 24 September 2013)

## Abstract

This paper mainly deals with the effects of eccentricity on the gravitational waveforms emitted by the non-conservative post-Newtonian (PN) Hamiltonian formulations of the spinning compact binaries. The numerical results show that the change of eccentricity has a slight influence on the time-domain gravitational waveforms from the conservative spinning compact binaries, but the frequency bands of gravitational waveforms is broadened with increasing eccentricity. Owing to the effects of dissipation from the gravitational radiation reaction, the separation and the eccentricity decrease gradually with time, and the gravitational waveforms emitted from the non-conservative PN spinning compact binaries are modulated by the eccentricity, meanwhile the amplitude of the waveforms enhances with the increase of eccentricity; the duration of the waveforms decreases.

**Keywords:** non-conservative, gravitational radiation reaction, dissipation, eccentricity

**PACS:** 04.25.dg, 04.25.Nx, 04.30.-w, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.62.230401

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11165011, 61261006), and the Natural Science Foundation of Jiangxi Province, China (Grant No. 2012ZBAB202001).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zhongshuangying@ncu.edu.cn