

分数阶系统稳定性理论与控制研究*

胡建兵¹⁾ 赵灵冬^{1)2)†}

1) (南通大学电子信息学院, 南通 226019)

2) (东华大学信息科学与技术学院, 上海 201620)

(2013年8月20日收到; 2013年9月15日收到修改稿)

分数阶系统稳定性理论是分数阶非线性系统控制的基础. 针对分数阶非线性系统稳定性理论的讨论, 本文从另一角度证明了该理论的正确性. 结果表明, 分数阶非线性系统稳定性理论不仅适用于分数阶自治系统, 也同样适用于分数阶非自治系统. 利用该理论分析了多个实例并进行了数值仿真, 仿真结果验证了该理论的有效性.

关键词: 分数阶系统, 稳定性理论, 非自治, 自治

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.240504

1 引言

分数阶微积分差不多与整数阶微分有相同的历史, 然而由于理论的复杂性及缺乏相应的物理背景, 一直未得到应有的发展^[1]. 直到1983年Mandelbort^[2]指出自然界中存在大量分数维现象以来, 分数阶微积分迅速成为研究热点. 研究表明: 许多物理系统因其特殊的材料和化学特性而展现出分数阶动力学行为, 是分数阶系统, 采用分数阶模型描述本身带有分数阶特性的对象时, 能更好地揭示对象的本质特性及其行为^[3-6]. 分数阶微积分是整数阶微积分的推广, 整数阶微积分是分数阶微积分的特例, 研究分数阶系统更具有普遍意义. 在描述复杂物理力学问题时, 与整数阶模型比较, 分数阶模型的物理意义更清晰, 表述更简洁; 分数阶控制拓展了控制的自由度, 能获得更优良的控制性能; 分数阶微积分具有记忆功能, 这种记忆功能确保了历史信息对现在和未来的影响, 有利于改善控制的品质. 分数阶微积分以其独特优势在控制领域备受青睐^[7-9].

在整数阶领域, 基于Lyapunov稳定性理论, 非线性系统的控制得到了广泛研究并取得了系列成果. 但由于分数阶控制起步较晚及理论的复杂性,

分数阶稳定性理论和控制器设计方法远不如整数阶系统控制发展充分. 针对这一问题, 基于分数阶线性系统稳定性理论, 我们从不同角度提出了几种分数阶自治系统稳定性理论, 多种整数阶系统控制器设计方法可拓展于分数阶非线性自治系统控制并受到了一定关注^[10-13].

非线性系统包含自治和非自治非线性系统. 尽管分数阶自治系统稳定性与控制得到了一定研究, 但如何判定分数阶非自治系统稳定性及如何设计控制器实现分数阶非自治系统控制仍鲜见报道. 与此同时, 文献[13]分析了我们提出的分数阶稳定性理论, 指出非自治分数阶非线性系统不能通过特征值判定系统稳定性, 并利用例子进行了说明. 针对上述问题, 本文从另一角度证明了我们提出的理论不仅适用于分数阶自治系统, 同时也适用于分数阶非自治系统. 为了说明问题, 本文应用与文献[13]相同的例子进行了稳定性分析并设计控制器实现了控制.

2 分数阶微分概述

在研究过程中对分数阶微积分概念提出了多种定义, 其中常用的有Riemann-Liouville (R-L) 定义、Caputo定义. 本文以Caputo定义进行研究.

* 国家自然科学基金(批准号: 61304062, 61374061, 61174065, 61174066, 61273103)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhaolingdong@163.com

Caputo 分数阶微分定义为^[14]

$${}^C D_t^\alpha x(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \int_a^t (t-\tau)^{-\alpha+n-1} x^{(n)}(\tau) d\tau, \quad (1)$$

其中 n 为大于 α 的最小整数, $(n-1) < \alpha < n$, $\Gamma(\cdot)$ 为伽马函数. 从分数阶微积分定义, 显然有:

性质 1 ${}^C D_t^\alpha (kx(t)) = k {}^C D_t^\alpha x(t)$.

当 $0 < \alpha \leq 1$ 时, Caputo 分数阶微分的解等价于

$$x(t) = x_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} {}^C D_\tau^\alpha x(\tau) d\tau, \quad (2)$$

对于一般的分数阶线性微分方程

$${}^C D_t^\alpha x(t) = Ax(t), \quad (3)$$

该方程的通解为

$$x(t) = x(0)E_\alpha(At^\alpha), \quad (4)$$

其中 Mittag-Leffler 函数

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

对于一般的分数阶自治非线性微分方程

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(x(t)), \quad (5)$$

有:

引理 1^[12] 对于分数阶系统 (5), 当系统阶数 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 如果存在实对称正定矩阵 P , 使得对任意状态变量 $x(x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T)$, 方程 $h(x(t)) = x(t)^T P \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \leq 0$ (令形如 $x(t)^T P \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha}$ 的函数为 $h(x(t))$ 函数) 恒成立, 则分数阶自治非线性系统 (5) 稳定.

3 分数阶系统稳定性理论

引理 1 研究了自治分数阶非线性系统稳定性并给出了证明, 文献 [13] 分析了分数阶非自治系统稳定性不能依赖于特征值进行研究的原因. 本文不依赖于特征值从另一角度进行证明, 证明引理 1 不仅适用于分数阶自治系统, 同样也适用于分数阶非自治系统稳定性判定与控制.

对于一般的分数阶非自治非线性系统通常可表示为

$${}^C D_t^\alpha x(t) = f(t, x(t)), \quad (6)$$

其中函数 $f(t, x(t))$ 满足 Lipschitz 条件.

定理 1 对于分数阶系统 (6), 当系统阶数 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 如果对任意状态变量 $x(t) \in \mathbb{R}$, 方程 $h(x(t)) = x(t) \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \leq 0$ 恒成立, 则分数阶非自治系统 (6) 稳定.

证明 设:

$$k_2 x^2(t) \leq x(t) {}^C D_t^\alpha x(t) = x(t) f(t, x(t)) \leq k_1 x^2(t), \quad (7)$$

显然 $k_2 < 0, k_1 \leq 0$. 根据性质 1 可得

$$k_2 (-x(t))^2 \leq -x(t) {}^C D_t^\alpha (-x(t)) = -x(t) f(t, -x(t)) \leq k_1 (-x(t))^2. \quad (8)$$

根据 (7) 和 (8) 式可得

$$k_2 |x(t)|^2 \leq |x(t)| {}^C D_t^\alpha |x(t)| = |x(t)| f(t, |x(t)|) \leq k_1 |x(t)|^2,$$

$$k_2 |x(t)| \leq {}^C D_t^\alpha |x(t)| = f(t, |x(t)|) \leq k_1 |x(t)|. \quad (9)$$

根据 (2) 式得

$$\begin{aligned} |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} k_2 |x(\tau)| d\tau \\ \leq |x(t)| = |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, |x(\tau)|) d\tau \\ \leq |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} k_1 |x(\tau)| d\tau. \end{aligned} \quad (10)$$

根据中值定理, 一定存在 k_ϵ 满足 $k_2 < k_\epsilon < k_1 \leq 0$, 使得

$$\begin{aligned} |x(t)| &= |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, |x(\tau)|) d\tau \\ &= |x_0| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} k_\epsilon |x(\tau)| d\tau \\ &= |x_0| E_\alpha(k_\epsilon t^\alpha). \end{aligned} \quad (11)$$

因为 $k_2 < k_\epsilon < k_1 \leq 0$, 故

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \lim_{t \rightarrow \infty} |x_0| E_\alpha(k_\epsilon t^\alpha) = 0. \quad (12)$$

定理 1 证毕.

定理 2 对于分数阶系统 (6), 当系统阶数 $0 < \alpha \leq 1$ 时, 对任意状态变量 $x(t) \in \mathbb{R}^n$, 存在正定矩阵 P , 使函数 $h(x(t)) = x(t)^T P \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} \leq 0$ 恒成立, 则分数阶非自治系统 (6) 稳定.

证明 构造正定函数

$$V = \frac{1}{2} x^T(t) P x(t), \quad (13)$$

则

$$\begin{aligned} dV &= x^T(t) P dx(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} x^T(t) P \int_{t-\delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{t-\delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x^T(t) \times P f(\tau, x(\tau)) d\tau. \quad (14)$$

因为

$$J = x^T(t) P \frac{d^\alpha x(t)}{dt^\alpha} = x^T(t) P f(t, x(t)) \leq 0$$

且函数 $f(t, x(t))$ 满足 Lipschitz 条件, 当 $\delta t \rightarrow 0$ 且 $\tau \in (t - \delta t, t]$ 时, $x^T(t) P f(\tau, x(\tau)) \leq 0$. 可得

$$\begin{aligned} V' &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta V}{\delta t} \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{\delta t \rightarrow 0} \int_{t-\delta t}^t (t-\tau)^{\alpha-1} x^T(t) \\ &\quad \times P f(\tau, x(\tau)) d\tau (\delta t)^{-1} \\ &\leq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} x^T(t) P x(t) = 0, \quad (16)$$

从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$. 定理 2 证毕.

4 分数阶自治、非自治系统稳定性分析与控制

为了说明该理论不仅适用于分数阶自治系统, 同样适用于分数阶非自治系统, 本文仍然利用文献 [13] 的例子进行稳定性分析, 并对不稳定系统依据本文的理论设计控制器实现稳定性控制.

例 1 考虑如下分数阶非自治系统

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{0.95} x_1}{dt^{0.95}} \\ \frac{d^{0.95} x_2}{dt^{0.95}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 + 10x_2 \\ -1 + 0.9 \sin(3t)x_1 + 0.95x_2 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

根据定理 2 构造函数:

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \frac{d^{0.95} x_1}{dt^{0.95}} + x_2 \frac{d^{0.95} x_2}{dt^{0.95}} \\ &= -x_1^2 + 10x_1x_2 \\ &\quad + (-1 + 0.9 \sin(3t))x_1x_2 + 0.95x_2^2 \\ &= -x_1^2 + (9 + 0.9 \sin(3t))x_1x_2 + 0.95x_2^2, \end{aligned} \quad (18)$$

函数 $h(x)$ 既不恒大于零, 也不恒小于零, 系统 (17) 稳定性难以判定. 仿真结果如图 1 所示, 仿真结果表明系统不稳定.

为使系统 (17) 稳定, 设计控制器:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{0.95} x_1}{dt^{0.95}} \\ \frac{d^{0.95} x_2}{dt^{0.95}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -x_1 + 10x_2 - k_1x_1 \\ -1 + 0.9 \sin(3t)x_1 + 0.95x_2 - k_2x_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

根据 (18) 式, 可得

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \frac{d^{0.95} x_1}{dt^{0.95}} + x_2 \frac{d^{0.95} x_2}{dt^{0.95}} \\ &= -(k_1 + 1)x_1^2 + (9 + 0.9 \sin(3t))x_1x_2 \\ &\quad + (0.95 - k_2)x_2^2 \\ &\leq -(k_1 + 1)x_1^2 + \frac{9.9}{2}(x_1^2 + x_2^2) + (0.95 - k_2)x_2^2 \\ &= (3.95 - k_1)x_1^2 + (5.9 - k_2)x_2^2, \end{aligned} \quad (20)$$

当 $k_1 \geq 3.95, k_2 \geq 5.9$ 时, 函数 $h(x) \leq 0$. 根据定理 2, 受控非自治系统 (17) 稳定. 取 $k_1 = 3.95, k_2 = 5.9$ 进行数值仿真, 仿真结果如图 2 所示. 仿真结果表明受控系统 (19) 渐近稳定, 这验证了根据定理 2 设计的控制器有效.

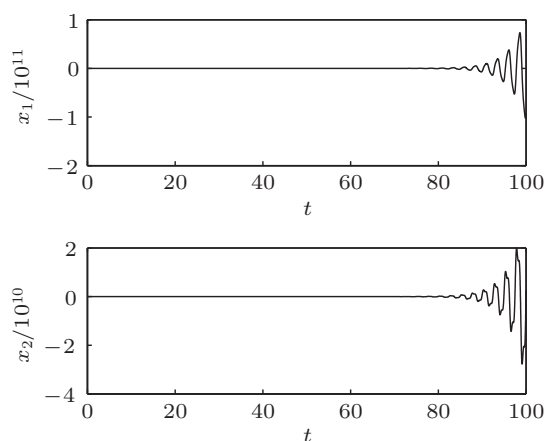


图 1 系统 (17) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

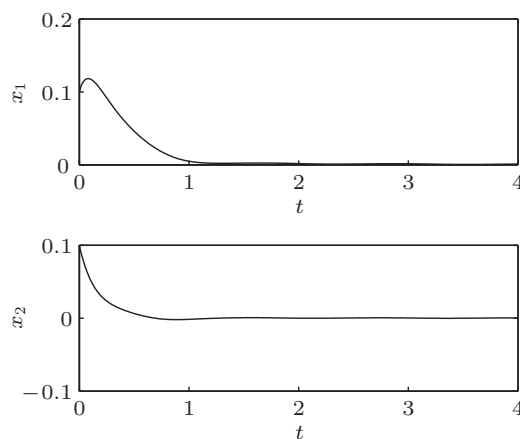


图 2 系统 (19) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

例 2 考虑如下分数阶非自治系统

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{0.95}x_1}{dt^{0.95}} \\ \frac{d^{0.95}x_2}{dt^{0.95}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b+a+a\cos(\omega t))x_1 + (b-a\sin(\omega t))x_2 \\ (-b-a\sin(\omega t))x_1 + (-b+a-a\cos(\omega t))x_2 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

其中 $a = 0.75, b = 1, \omega = 2$.

根据定理 2 构造函数:

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \frac{d^{0.95}x_1}{dt^{0.95}} + x_2 \frac{d^{0.95}x_2}{dt^{0.95}} \\ &= (-0.25 + 0.75 \cos(\omega t))x_1^2 \\ &\quad + (-0.25 - 0.75 \cos(\omega t))x_2^2 \\ &\quad - 1.5 \sin(\omega t)x_1x_2, \end{aligned} \quad (22)$$

函数 $h(x)$ 既不是恒大于零, 也不是恒小于零, 系统 (21) 稳定性难以判定. 仿真结果如图 3 所示, 仿真结果表明系统不稳定.

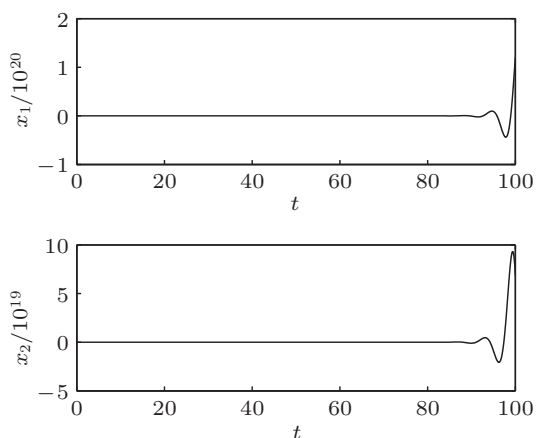


图 3 系统 (21) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

对系统 (21) 设计控制器:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{0.95}x_1}{dt^{0.95}} \\ \frac{d^{0.95}x_2}{dt^{0.95}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b+a+a\cos(\omega t))x_1 \\ + (b-a\sin(\omega t))x_2 - k_1x_1 \\ (-b-a\sin(\omega t))x_1 \\ + (-b+a-a\cos(\omega t))x_2 - k_2x_2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

根据定理 2 构造函数:

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \frac{d^{0.95}x_1}{dt^{0.95}} + x_2 \frac{d^{0.95}x_2}{dt^{0.95}} \\ &= (-0.25 + 0.75 \cos(\omega t) - k_1)x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (-0.25 - 0.75 \cos(\omega t) - k_2)x_2^2 \\ &- 1.5 \sin(\omega t)x_1x_2 \\ &\leq (1.25 - k_1)x_1^2 + (1.25 - k_2)x_2^2, \end{aligned} \quad (24)$$

当 $k_1 \geq 1.25, k_2 \geq 1.25$ 时, 函数 $h(x) \leq 0$. 根据定理 2, 受控非自治系统 (23) 稳定. 取 $k_1 = 1.25, k_2 = 1.25$, 仿真结果如图 4 所示, 仿真结果验证了根据定理 2 设计的控制器依然有效.

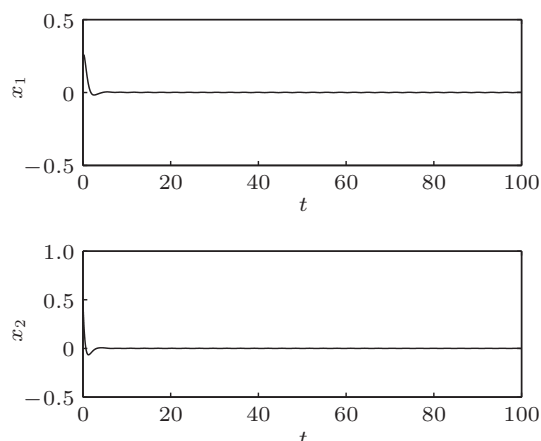


图 4 系统 (23) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

例 3 考虑如下整数阶非自治系统

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b+a\sin(\omega t))x_1 + a\cos(\omega t)x_2 \\ a\cos(\omega t)x_1 + (-b-a\sin(\omega t))x_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

当 $a > 0, b > \frac{3}{5}a$ 时, 整数阶非自治系统 (25) 稳定 [15]. 取 $a = 7.5, b = 5.5, \omega = 12$, 仿真结果如图 5 所示. 整数阶系统 (25) 的分数阶形式为:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{0.95}x_1}{dt^{0.95}} \\ \frac{d^{0.95}x_2}{dt^{0.95}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-b+a\sin(\omega t))x_1 + a\cos(\omega t)x_2 \\ a\cos(\omega t)x_1 + (-b-a\sin(\omega t))x_2 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

文献 [13] 从特征值的角度分析了当整数阶系统 (25) 稳定时, 分数阶系统 (26) 取与整数阶系统 (25) 相同的参数, 比如取 $a = 7.5, b = 5.5, \omega = 12$, 分数阶系统 (26) 未必稳定. 然而, 我们进行数值仿真如图 6 所示, 仿真结果表明分数阶系统 (26) 也渐

近稳定. 另外从定理 2 的证明过程依然可以看出: 如果一个整数阶系统 Lyapunov 稳定, 其分数阶形式也稳定. 这一点不仅适用于分数阶自治系统, 同样适用于分数阶非自治系统.

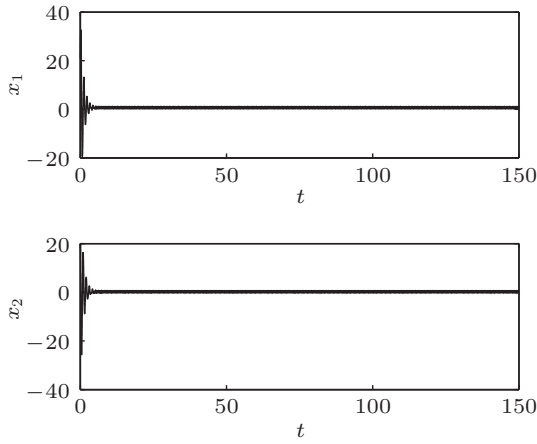


图 5 系统 (25) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

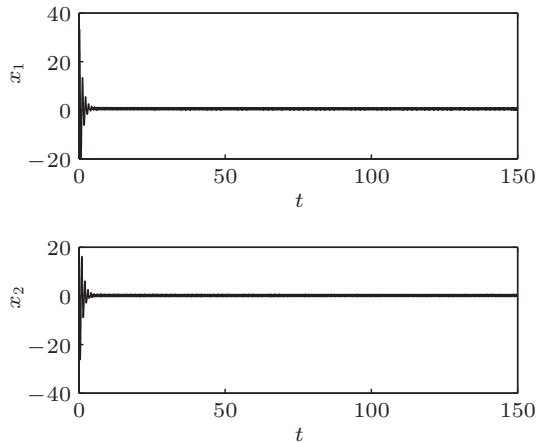


图 6 系统 (26) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

例 4 考虑如下整数阶非自治系统

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (-1 - 9\cos^2(6t)) \\ \quad + 12\sin(6t)\cos(6t)x_1 \\ \quad + (12\cos^2(6t) \\ \quad + 9\sin(6t)\cos(6t))x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = (-12\sin^2(6t) \\ \quad + 9\sin(6t)\cos(6t))x_1 \\ \quad + (-1 - 9\sin^2(6t) \\ \quad - 12\sin(6t)\cos(6t))x_2, \end{cases} \quad (27)$$

系统仿真如图 7 所示, 仿真结果表明该系统不稳定.

对系统 (27) 设计线性反馈控制器:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (-1 - 9\cos^2(6t) \\ \quad + 12\sin(6t)\cos(6t))x_1 \\ \quad + (12\cos^2(6t) \\ \quad + 9\sin(6t)\cos(6t))x_2 - k_1x_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = (-12\sin^2(6t) \\ \quad + 9\sin(6t)\cos(6t))x_1 \\ \quad + (-1 - 9\sin^2(6t) \\ \quad - 12\sin(6t)\cos(6t))x_2 - k_2x_2. \end{cases} \quad (28)$$

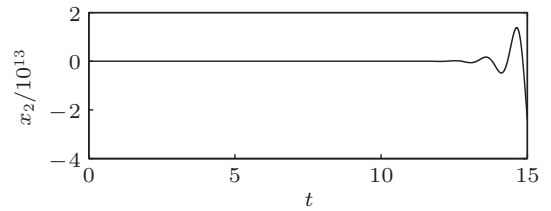
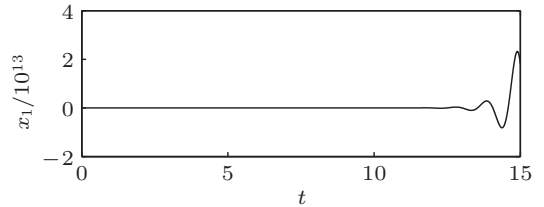


图 7 系统 (27) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

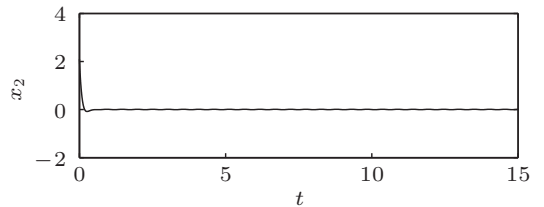
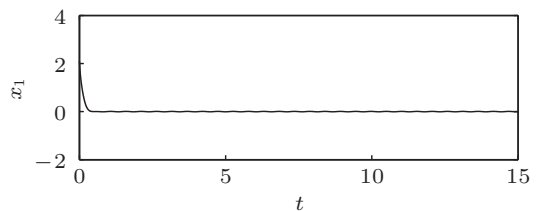


图 8 系统 (29) 状态变量 x_1, x_2 随时间演化

根据定理 2 构造函数:

$$\begin{aligned} h(x) &= x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \\ &= (-1 - 9\cos^2(6t) + 6\sin(12t) - k_1)x_1^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (12 \cos^2(12t) + 9 \sin(12t))x_1x_2 \\
& + (-1 - 9 \sin^2(6t) - 6 \sin(12t) - k_2)x_2^2 \\
\leq & \left(-1 - 9 \cos^2(6t) + 6 \sin(12t) \right. \\
& + \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{2} - k_1 \Big) x_1^2 + \left(-1 - 9 \sin^2(6t) \right. \\
& \left. - 6 \sin(12t) + \frac{\sqrt{12^2 + 9^2}}{2} - k_2 \right) x_2^2 \\
\leq & (12.5 - k_1)x_1^2 + (12.5 - k_2)x_2^2, \quad (29)
\end{aligned}$$

显然当 $k_1 \geq 12.5, k_2 \geq 12.5$ 时, $h(x) \leq 0$, 根据定理 2, 受控系统 (28) 稳定. 取 $k_1 = 12.5, k_2 = 12.5$, 仿真结果如图 8 所示. 仿真结果表明: 定理 2 用于整数阶

非自治系统同样有效.

5 结论

本文从一个新的角度证明了分数阶系统稳定性理论的正确性, 并通过多个例子进行稳定性分析与控制. 研究表明: 该系列理论不仅适用于分数阶自治系统, 同样也适用于分数阶非自治系统. 该理论的研究有助于进一步掌握分数阶系统性质, 丰富分数阶系统稳定性理论, 促进分数阶控制的发展.

-
- [1] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press)
- [2] Mandelbort B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York: Freeman)
- [3] Chen Y Q, Moore K L 2002 *Nonlinear Dyn.* **29** 191
- [4] Catherine B, Jonathan R P 200 *Syst. Control Lett.* **41** 167
- [5] Zhang H G, Zhao Y, Yu W, Yang D S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4056
- [6] Ning D, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 (in Chinese) [宁娣, 陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [7] Bhalekar S, Daftardar-Gejji V 2010 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **15** 3536
- [8] Sheu L J, Tam L M, Lao S K, Kang Y, Lin K T, Chen J H, Chen H K 2009 *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **10** 33
- [9] Ma T D, Zhang H G, Wang Z L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3796 (in Chinese) [马铁东, 张化光, 王智良 2007 物理学报 **56** 3796]
- [10] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1441 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 1441]
- [11] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4402 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 4402]
- [12] Hu J B, Han Y, Zhao L D 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2235 (in Chinese) [胡建兵, 韩焱, 赵灵冬 2009 物理学报 **58** 2235]
- [13] Li L X, Peng H P, Luo Q, Yang Y X, Liu Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020502 (in Chinese) [李丽香, 彭海朋, 罗群, 杨义先, 刘喆 2013 物理学报 **62** 020502]
- [14] Sun N, Zhang H G, Wang Z L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 050511 (in Chinese) [孙宁, 张化光, 王智良 2011 物理学报 **60** 050511]
- [15] Zhu J, Ray S, Vemula S K 1992 *System Theory, Proceedings The 24th Southeastern Symposium on and The 3rd Annual Symposium on Communications, Signal Processing Expert Systems, and ASIC VLSI Design* Greensboro, USA, March 1-3, 1992 p355

Stability theorem and control of fractional systems*

Hu Jian-Bing¹⁾ Zhao Ling-Dong^{1)2)†}

1) (School of Electronics and Information, Nantong University, Nantong 226019, China)

2) (College of Information Science and Technology, Donghua University, Shanghai 201620, China)

(Received 20 August 2013; revised manuscript received 15 September 2013)

Abstract

The stability theorem of fractional systems is the basis of controlling fractional nonlinear systems. The theorem of fractional nonlinear systems is proved by a new approach in this paper. The results show that the theorem is applicable not only to the fractional nonlinear autonomous system, but also to the fractional nonlinear nonautonomous system. Several examples are analyzed by the theorem, and simulations are carried out, whose results show the effectiveness of the theorem.

Keywords: fractional system, stability theorem, nonautonomous, autonomous

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.240504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61304062, 61374061, 61174065, 61174066, 61273103).

† Corresponding author. E-mail: zhaolingdong@163.com